Relación de problemas. Álgebra lineal.

Tema 1. Matrices. Determinantes. Sistemas lineales.

Sección 1. Matrices.

Ejercicio 1.1 Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

calcular, si es posible, los siguientes productos: AB, BA, AC, CA, AD, DA, CD, DC. Comprobar que $AB \neq BA$.

Ejercicio 1.2 Obtener las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3 Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que la matriz A es **antisimétrica** (es decir $A^t = -A$).
2. Probar que la matriz $M = A^2 + I_3$ es **simétrica** (es decir $M^t = M$), siendo I_3 la matriz unidad de orden tres.
3. Demostrar que la matriz M es **idempotente** (es decir $M^2 = M$).

Ejercicio 1.4 Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, entonces se define la **traza** de A, que notaremos Tr (A), así:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Probar que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces:

1. Tr $(A - B) =$ Tr $(A) -$ Tr(B).
2. Tr $(A \cdot B) =$ Tr $(B \cdot A)$.
3. $A \cdot B - B \cdot A \neq I_n$, siendo I_n la matriz unidad de orden n.

Sección 2. Determinantes

Ejercicio 1.5 Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad e)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix},$$

$$f)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad g)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 1.6 Calcular el determinante $|A41|$. Calcular los siguientes determinantes, a partir de $|A41|$, usando las propiedades de las aplicaciones multilineales alternadas y explicando cuáles se han usado.

$$|A41| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad |A42| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$|A43| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & 4 \end{vmatrix}, \quad |A44| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A45| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad |A46| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$|A47| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad |A48| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.7 Demostrar las siguientes identidades:

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & -x+y-z & 2y \\ 2z & 2z & -x-y+z \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+1)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

Sección 3. Formas escalonadas y reducidas

Ejercicio 1.8 Hallar formas escalonadas por filas de las matrices siguientes:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},\quad d)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 9 \end{pmatrix},\quad f)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},\quad g)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$h)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad i)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad j)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$k)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix},\quad l)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -20 & 6 \\ 0 & 0 & -16 & 6 \end{pmatrix},\quad m)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n)\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix},\quad \tilde{n})\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},\quad o)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix},$$

$$p)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix},\quad q)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix},$$

$$r)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad s)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.9 Calcular la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad d)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad f)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad g)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$h)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad i)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad j)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$k)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad l)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sección 4. Rango

Ejercicio 1.10 Hallar los rangos de las matrices siguientes, en función de los correspondientes parámetros:

$$a)\begin{pmatrix} -a & 2 \\ 2a & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix} a & a+1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad d)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} 2 & -a & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & -a & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad f)\begin{pmatrix} -3 & -a & -1 & b \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -4 & -a & -2 & b \end{pmatrix},\quad g)\begin{pmatrix} 2a & b & 4 & a-b \\ a & 2b & 5 & a-b \\ a & b & 3 & a-b \end{pmatrix},$$

$$h)\begin{pmatrix} 2a & 2b & -c \\ a & 2b & -c \\ -a & -b & c \end{pmatrix},\quad i)\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix},\quad j)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sección 5. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1.11 Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas, resolviéndolos cuando sea posible.

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & 3y & = & 7 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{array}\right.,\quad b)\left\{\begin{array}{rcrcr} -3x & - & 3y & = & -6 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.,\quad c)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 6 \\ -x & + & 2y & = & 5 \end{array}\right.,$$

$$d)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 9y & + & 2z & = & 10 \end{array}\right.,\quad e)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & 2z & = & 6 \\ -x & + & y & + & z & = & -2 \end{array}\right.,$$

$$f)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ -2x & + & y & + & 5z & = & -6 \\ x & & & - & z & = & 4 \end{array}\right.,\quad g)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right.,$$

$$h)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ -2x & - & 4y & + & z & = & 7 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 8 \end{array}\right.,\quad i)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \\ 2x & - & 2y & & & = & 4 \end{array}\right.,$$

$$j)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -4 \\ 3x & & & + & 2z & = & -2 \\ x & - & y & + & z & = & -4 \end{array}\right.,\quad k)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$l)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 7 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.,\quad m)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & + & z & = & 11 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 7 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.,$$

$$n)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & + & 4t & = & -3 \\ 3x & & & + & 2z & + & 4t & = & -6 \end{array}\right.,\quad ñ)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x & - & 4y & - & z & - & t & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & -1 \\ -3x & - & 6y & + & z & + & 2t & = & -4 \end{array}\right.,$$

$$o)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & 2z & + & t & = & -3 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & t & = & -3 \\ 3x & + & y & + & 5z & + & 2t & = & -6 \end{array}\right.,\quad p)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & + & t & = & 2 \\ -2x & - & 6y & + & z & - & 5t & = & -1 \\ -x & - & 3y & + & z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$q)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & - & 2y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ -x & - & 2y & + & 2z & - & 5t & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 9 \end{array}\right.,\quad r)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & - & t & = & -6 \\ x & & & - & z & + & 2t & = & -3 \\ -2x & + & y & & & - & 2t & = & 9 \end{array}\right.,$$

$$s)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & + & 3t & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & -4 \\ -x & + & 2y & & & + & 2t & = & -3 \\ x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & = & -5 \end{array}\right.,\quad t)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & 2z & + & 3t & = & -6 \\ x & - & y & - & z & + & 3t & = & 5 \\ -x & + & y & & & - & t & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$u)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 8z & - & 2t & = & 13 \\ & + & y & - & z & - & t & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & 4z & + & 2t & = & -7 \\ x & + & y & - & 3z & - & t & = & 5 \end{array}\right., \quad v)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & - & 3t & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 7z & - & 9t & = & 2 \\ & & y & + & z & & & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & + & 3t & = & 1 \end{array}\right.,$$

$$w)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & + & 3t & = & 4 \\ -x & & & + & z & + & t & = & 6 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & -11 \end{array}\right..$$

Ejercicio 1.12 Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos. Si son verdaderos dar una razón **breve** y si son falsos, dar un contraejemplo.

1. Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
2. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.
3. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.
4. Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.
5. El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.
6. No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Ejercicio 1.13 Responder a las siguientes cuestiones si se puede. Tanto si se puede como si no, dar una razón del por qué.

1. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con dos ecuaciones y tres incógnitas.
2. Dar un ejemplo de un sistema compatible determinado con tres ecuaciones y dos incógnitas.
3. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con tres ecuaciones y dos incógnitas.
4. Dar un ejemplo de un sistema compatible indeterminado con tres ecuaciones y tres incógnitas
5. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea
$$x_1 = \frac{-7}{3} + t, \quad x_2 = u, \quad x_3 = 3t - 2u$$
6. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea
$$x_1 = -9 + t, \quad x_2 = -10 + 2t, \quad x_3 = -t.$$
7. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea
$$x_1 = \frac{-13}{5} + t + u, \quad x_2 = \frac{12}{5} + t, \quad x_3 = u, \quad x_4 = 5t + 2u$$

Ejercicio 1.14 Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos. Si son verdaderos dar una razón **breve** y si son falsos, dar un contraejemplo.

1. Un sistema compatible determinado con coeficientes enteros tiene su solución entera.
2. Una matriz de enteros tiene siempre una forma escalonada por filas con pivotes enteros.
3. La forma reducida por filas de una matriz de enteros tiene pivotes enteros.
4. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(m,n)$ se llama *matriz de relaciones de las filas de* A (resp. *de las columnas*) a una matriz de soluciones linealmente independientes del sistema $A(x_1,\ldots,x_n)^t = 0$ (resp. $(x_1,\ldots,x_m)A = 0$). Hallar la matriz de relaciones del vector $(1,-1,3,2)$.
5. Si A es una matriz de elementos enteros, existe siempre una matriz B de relaciones de sus filas (resp. columnas) cuyos elementos son enteros.