Tema 6. Formas bilineales.

Ejercicio 6.1 En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz de la forma bilineal simétrica $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} \varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) & = & 5 \\ \varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) & = & 1 \\ \varphi(\mathbf{w},\mathbf{w}) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcr} \varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) & = & 0 \\ \varphi(\mathbf{v},\mathbf{w}) & = & 4 \\ \varphi(\mathbf{u},\mathbf{w}) & = & -1 \end{array} \right.$$

siendo: $\mathbf{u} = (1,2,1)$, $\mathbf{v} = (-1,2,0)$, $\mathbf{w} = (1,0,1)$.

Ejercicio 6.2 Sea $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ sea diagonal.

Ejercicio 6.3 Hallar una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$ congruente con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

y obtener una matriz P no singular tal que $D = P^t \cdot A \cdot P$.

Ejercicio 6.4 Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar una base de V tal que la matriz de φ respecto de ella sea diagonal.

Ejercicio 6.5 Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y $\varphi : V \longrightarrow V$ una forma bilineal simétrica verificando:

$$\varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{i!}{j!}, \quad \forall\, i \geq j.$$

(a) Hallar una base $\mathcal{C}$ de V tal que $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ sea diagonal, con sólo 1, -1 ó 0 en la diagonal.

(b) Determinar todas las posibles matrices diagonales con sólo 1, -1 ó 0 en la diagonal que sean la matriz de φ respecto de alguna base. Para cada posible matriz A, dar una base $\mathcal{D}$ tal que $A = M_{\mathcal{D}}(\varphi)$.

Ejercicio 6.6 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V. Sea

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

una forma bilineal sobre V definida por:

$$\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q) = \left\{ \begin{array}{ccc} i^{p+q} & \text{si} \ \ p+q & \text{es par} \\ i^{p+q+1} & \text{si} \ \ p+q & \text{es impar} \end{array} \right. \qquad (i^2 = -1).$$

Se pide:

1. Demostrar que φ es simétrica.
2. Calcular la matriz de φ respecto de $\mathcal{B}$.
3. Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de un vector $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$.

4. Sea $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, hallar una matriz diagonal S con 1, -1 ó 0 en dicha diagonal y que sea congruente con A.

Ejercicio 6.7 Sea V un $\mathbf{R}$–espacio vectorial de dimensión 4, $\mathcal{B}$ una base fijada cualquiera de V y φ una forma bilineal simétrica definida sobre V tal que

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se considera el subespacio $L \subset V$ dado por

$$L : x_1 - x_4 = 0.$$

1. Hallar una base $\mathcal{B}_L$ de L tal que la matriz de $\varphi_{|L\times L}$ sea diagonal. Se recuerda que

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{|L\times L} : L \times L & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \longmapsto & \varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{array}$$

2. Probar que para todo $\mathbf{v} \in L^{\perp}$, $\mathcal{B}_L \cup \{\mathbf{v}\}$ es una base de V que diagonaliza a φ.

3. Probar que para todo $\mathbf{v} \in L^{\perp}$, $\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) \neq 0$.

Ejercicio 6.8 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica φ cuya matriz, respecto de cierta base $\mathcal{B}$, es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Para $a = 1$, dada la variedad $L \equiv x+y+z = 0$, calcular, respecto de φ, las ecuaciones de las variedades $L^{\perp}$ y $(L^{\perp})^{\perp}$. ¿Es $V = L \oplus L^{\perp}$? ¿Es $(L^{\perp})^{\perp} = L$? ¿Por qué?

2. Para $a = 1$, probar que si $\mathcal{B}_L$ es una base de L, entonces para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus L$, se verifica que $\mathcal{B}_L \cup \{\mathbf{v}\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que diagonaliza φ.

3. Para $a = 2$, calcular por el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, respecto de φ.

Ejercicio 6.9 Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Es decir,

$$V = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea φ la aplicación

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\forall p(x), q(x) \in V, \;\; \varphi\big(p(x), q(x)\big) = p(0)q(0),$$

donde $p(0)$ es valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = 0$.
Se pide:

1. Probar que φ es una forma bilineal simétrica sobre V.

2. Sea $\mathcal{B} = \{1, x-1, x^2+1\}$ una base de V. Probar que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y calcular una base ortogonal, $\mathcal{B}'$ de V, respecto de la cual $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ sea diagonal.

3. Probar que el polinomio $p(x) = 2x + x^2$ es ortogonal, respecto de φ, a todos los polinomios de V (tómese $\mathcal{B}$ como base de V).