Ejercicio 1.– Describir las relaciones de inclusión o pertenecia entre los siguientes conjuntos:

$$A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\},\ C = \{a, b\},\ D = \{\{a\}, b\},\ E = \{a\},\ F = \{\{a\}\}.$$

Ejercicio 2.– Probar que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ si y sólo si $a = a', b = b'$.

Ejercicio 3.– Se suponen conocidos los cardinales de los conjuntos

$$A,\quad B,\quad C,\quad A \cap B,\quad A \cap C,\quad B \cap C,\quad A \cap B \cap C,$$

y que son finitos. Existe una fórmula que relaciona el cardinal de $A \cup B \cup C$ con los siete números anteriores. Hallar esta fórmula y demostrarla.

Ejercicio 4.– Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación, y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

1. ¿Qué relación existe entre $f\big(f^{-1}(B)\big)$ y B?
2. ¿Qué relación existe entre $f^{-1}\big(f(A)\big)$ y A?
3. ¿Y si además se supone que f es inyectiva o sobreyectiva?

Ejercicio 5.– Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación. Demostrar que

1. f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g\colon \mathrm{Im(f)} \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. (Esto se conoce como una inversa a izquierda.)
2. f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h\colon Y \to X$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. (Esto se conoce como una inversa a derecha.)

Ejercicio 6.– Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones.

1. Si $g \circ f$ es sobreyectiva, ¿qué se puede decir sobre f y g?
2. Si $g \circ f$ es inyectiva ¿qué se puede decir sobre f y g?

Ejercicio 7.– ¿Son las siguientes relaciones de equivalencia?

1. En $\mathbb{R}$, $x\,R\,y \iff xy > 0$.
2. En $\mathbb{Z}$, $x\,R\,y \iff xy \geq 0$.
3. En $\mathbb{R}^2$, $(x, y)\,R\,(x'y') \iff$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $x = \lambda x'$ e $y = \lambda y'$
4. En $\mathbb{Z}$, $x\,R\,y \iff x - y$ es múltiplo de 6.

Ejercicio 8.–

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $G' \subseteq G$ un subconjunto no vacío. Demostrar que G' es un subgrupo si y sólo si, para cualesquiera $a, b \in G'$ se tiene $ab^{-1} \in G'$.
2. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y $R' \subseteq R$ un subconjunto no vacío. Demostrar que R' es subanillo si y sólo si para cualesquiera $a, b \in R'$, se tiene $a - b \in R'$ y $ab \in R'$. ¿Tiene R' elemento unidad?

Ejercicio 9.– ¿Cuáles de las siguientes estructuras $(G, \circ)$ son grupos o semigrupos?

1. $G = \mathcal{P}(X)$ (con $X \neq \emptyset$), y $A \circ B = A \triangle B$.
2. $G = \mathcal{P}(X)$ (con $X \neq \emptyset$), y $A \circ B = A \cup B$.

3. $G = \mathbb{R}$, y $x \circ y = xy$.
4. $G = \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $x \circ y = xy$.
5. $G = \mathbb{R}_{>0}$, y $x \circ y = xy$.
6. $G = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{tales que } |z| = 1\}$ y $x \circ y = xy$.

Ejercicio 10.– Demostrar que existe un isomorfismo de grupos $(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Ejercicio 11.– Sea G un grupo abeliano, y N un subgrupo de G. Demostrar que el conjunto de subgrupos de G que contienen a N es biyectivo con el conjunto de subgrupos del grupo cociente G/N. (Si se elimina la hipótesis de abeliano, y se impone que N sea normal, entonces la correspondencia lleva normales en normales.)

Ejercicio 12.– [Segundo Teorema de Isomorfía] Sea G un grupo abeliano y $N \subseteq H$ dos subgrupos. Entonces, existe un isomorfismo canónico de grupos

$$G/H \simeq (G/N) \; / \; (H/N).$$

Ejercicio 13.– [Tercer Teorema de Isomorfía] Sean N y H subgrupos de un grupo abeliano G. Entonces, $N \cap H$ es un subgrupo de H, N es un subgrupo de NH, y se verifica

$$H \; / \; (N \cap H) \simeq NH/N.$$

Ejercicio 14.– Sea k un cuerpo. Probar que $k[x, y]$ es un anillo con las operaciones usuales. Sea I el conjunto de los polinomios en la indeterminada x sin término independiente. Tenemos $I \subset k[x] \subset k[x, y]$.

1. ¿es $k[x]$ un ideal (y/o un subanillo) de $k[x, y]$?
2. ¿es I un ideal (y/o un subanillo) de $k[x]$?
3. ¿es I un ideal (y/o un subanillo) de $k[x, y]$?

Ejercicio 15.– (Ejemplo de anillo no conmutativo) Sea R un anillo. Denotemos por $\mathcal{M}_n(R)$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en R. Probar que, con la suma y el producto de matrices, $\mathcal{M}_n(R)$ es un anillo no conmutativo. ¿Tiene elemento unidad?

Ejercicio 16.– Sea X un conjunto y sea $R = \mathcal{P}(X)$. Consideramos en R las siguientes operaciones: para $A, B \in R$

1. $A + B = A \triangle B$ (diferencia simétrica de A y B que es el conjunto de los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos)
2. $A \cdot B = A \cap B$.

Probar que R es un anillo conmutativo con elemento unidad.

En todos los ejercicios que siguen anillo significa anillo conmutativo con elemento unidad

Ejercicio 17.– Sean I_1, I_2 ideales de un anillo A. Se definen las operaciones:
Suma de ideales: $I_1 + I_2 = I(I_1 \cup I_2)$.
Producto de ideales: $I_1 I_2 = I(\{a_1 a_2 \mid a_1 \in I_1,\, a_2 \in I_2\})$.
Cociente de ideales: $(I_1 : I_2) = \{a \in A \mid \forall x \in I_2 \; ax \in I_1\}$.

Se pide probar que:
(a) $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1,\, a_2 \in I_2\}$.
(b) Si $I_1 = I(S_1)$ y $I_2 = I(S_2)$, entonces $I_1 I_2 = I(\{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1,\, s_2 \in S_2\})$.
(c) $(I_1 : I_2)$ es un ideal de A.

Ejercicio 18.– Sean I, I' ideales de un anillo A. Probar que se verifican las siguientes propiedades:

(a) $II' \subset I \cap I'$.
(b) $I + I' = A \Rightarrow II' = I \cap I'$.
(c) $I \subset (I : I')$.
(d) $I' \subset I \leftrightarrow (I : I') = A$.

Ejercicio 19.– (a) Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset \mathbb{Z}$. Probar que $(s_1, \ldots, s_n) = \mathbb{Z}d$, siendo $d = \text{m.c.d}(s_1, \ldots, s_n)$.
(b) Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$, $d = \text{m.c.d}(n_1, n_2)$, $m = \text{m.c.m}(n_1, n_2)$ y $q = n_1/d$. Probar: que $\mathbb{Z}n_1 + \mathbb{Z}n_2 = \mathbb{Z}d$; $\mathbb{Z}n_1 \cap \mathbb{Z}n_2 = \mathbb{Z}m$; $(\mathbb{Z}n_1)(\mathbb{Z}n_2) = \mathbb{Z}(n_1 n_2)$; y $(\mathbb{Z}n_1) : (\mathbb{Z}n_2) = \mathbb{Z}q$.

Ejercicio 20.– Estudiar los ideales de $\mathbb{Z}$ y los de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 21.– Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ un entero y sea q un divisor de n. Probar que el anillo cociente $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)/q(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q$.

Ejercicio 22.– Hallar todos los anillos cocientes de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}21$.

Ejercicio 23.– Generalizar los teoremas de isomorfía a anillos conmutativos

Ejercicio 24.– En $\mathbb{Q}[x]$ consideramos el polinomio $f(x) = x^3 - x + 1$ y el ideal I generado por él. Describir el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/I$.

Ejercicio 25.– Sean el anillo $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4)[X]$ y el anillo cociente $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4)[X]/(X^2 + 1)$ respecto al ideal engendrado por $X^2 + 1$. Se pide:
(a) Describir $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4)[X]/(X^2 + 1)$.
(b) ¿ Es el anillo cociente un cuerpo ? Determinar qué elementos tienen inversos y qué elementos son divisores de cero, caso de que los haya.

Ejercicio 26.– Sean A y B dos anillos. Probar que el grupo multiplicativo $A \times B$ es un anillo si definimos el producto $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$. Comprobar que si U_A y U_B son los conjuntos de las unidades de A y B respectivamente, entonces $U_A \times U_B$ es el conjunto de las unidades de $A \times B$. ¿ Ocurre lo mismo con los divisores de cero ?

Ejercicio 27.– Sean $f : A \to B$ homomorfismo de anillos, I_1, I_2 ideales de A . Probar que:

(a) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$ (b) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$ (c) $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$ (d) $(I_1 : I_2)^e \subseteq (I_1^e : I_2^e)$

Ejercicio 28.– Sean $f : A \to B$ homomorfismo de anillos, J_1, J_2 ideales de B. Probar que:

(a) $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$ (b) $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$ (c) $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$ (d) $(J_1 : J_2)^c \subseteq (J_1^c : J_2^c)$

Ejercicio 29.– Sea A un anillo y $x \in A$ un elemento nilpotente (es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$). Probar que $1 + x$ es una unidad en A. Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es una unidad.

Ejercicio 30.– Probar que un elemento a de un anillo no nulo A es invertible (es decir, existe $b \in A$ tal que $ab = 1$) si y sólo si a no pertenece a ningún ideal maximal.

Ejercicio 31.– Sea I un ideal primo propio de un dominio de integridad A. Probar que

$$I[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{r} a_i x^i \mid a_i \in I, r \in \mathbb{N} \right\}$$

es un ideal primo de $A[x]$ y no es maximal.

Ejercicio 32.– Sea A un anillo. Consideremos el conjunto

$$Nil(A) = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$$

(a) Probar que $Nil(A)$ es un ideal de A.

(b) Probar que si P es un ideal primo de A, entonces $Nil(A) \subseteq P$.

(c) Sea A un dominio de integridad, calcular $Nil(A)$.

Ejercicio 33.– Sea A un anillo y sea $A[x]$ el anillo de los polinomios en una indeterminada x, con coeficientes en A. Sea $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in A[x]$. Demostrar que:

(a) f es una unidad en $A[x]$ si y sólo si a_0 es una unidad en A y $a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.

(b) f es nilpotente si y sólo si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.

(c) f es un divisor de cero si y sólo si $\exists a \in A$, $a \neq 0$ tal que $af = 0$.

Ejercicio 34.– Responder a las siguientes cuestiones:

(a) Consideremos el anillo $\mathbb{Q}[x]$ y el ideal $I = (x^2 - x - 2, x + 1)$, ¿es I principal ? En caso afirmativo, encontrar un elemento $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $I = (f(x))$.

(b) En el anillo $\mathbb{Z}[x]$ se considera el ideal $I = (3x, x^2)$. Se pide:

(b.1.) Probar que $x \notin I$.

(b.2.)¿Es I primo? ¿Es maximal?

(b.3.)¿Es I un ideal principal? Caso afirmativo, encontrar un polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $I = (f(x))$.

Ejercicio 35.– En $\mathbb{Z}[x]$ se considera el subconjunto formado por los polinomios cuyo término constante es múltiplo de 3.

(a) ¿Es un ideal principal? ¿Es ideal maximal? ¿Es un ideal primo?

(b) ¿Es $\mathbb{Z}[x]$ un dominio de ideales principales?

Ejercicio 36.– Consideremos el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[X, Y]$ y sea I el subconjunto definido por $I = \{f \in \mathbb{Q}[X, Y] \mid f(0, Y) = 0\}$.

- Demostrar que I es un ideal principal de $\mathbb{Q}[X, Y]$.
- Estudiar si I es primo o maximal.

Ejercicio 37.– Sea A un anillo. El radical de Jacobson de A (que denotaremos $J(A)$) es la intersección de todos los ideales maximales de A. Sea $a \in A$. Probar que son equivalentes:

1. $a \in J(A)$.
2. $1 - ab$ es una unidad para todo $b \in A$.

Ejercicio 38.– Probar que en $A[x]$ el radical de Jacobson es igual al nilradical.

Ejercicio 39.– Sea A un anillo, $Nil(A)$ su nilradical. Probar que son equivalentes:

(a) A tiene exactamente un ideal primo.

(b) Cada elemento de A es o una unidad o nilpotente.

(c) $A/Nil(A)$ es un cuerpo.

Ejercicio 40.– Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \text{ no divide a } n\}$. Probar que:

(a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathfrak{m} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)} : p|m\}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

(c) $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$.

Ejercicio 41.– Probar que $I = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ es un ideal maximal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y que el homomorfismo natural de k en $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ es un isomorfismo.

Ejercicio 42.– Sea k un cuerpo,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad | \quad a, b, c \in k \right\}.$$

Probar que R es un anillo local. Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal, probar que $\mathfrak{m}^2 = 0$.