Ejercicio 43.– Probar que:

1. $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$
2. $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$
3. $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$
4. $r(\mathfrak{a}) = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$
5. $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$
6. Si $\mathfrak{p}$ es primo, $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$, para todo $n > 0$.
7. $r(\mathfrak{a})^e \subseteq r(\mathfrak{a}^e)$.
8. $r(\mathfrak{a})^c = r(\mathfrak{a}^c)$

Ejercicio 44.– Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos sobreyectivo, y B un dominio. Probar que si A es un D.I.P. entonces B también es D.I.P. En particular probar que todo cociente de un D.I.P. por un ideal primo es un D.I.P.

Ejercicio 45.– Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$, con m entero libre de cuadrados. Probar que A es un dominio de integridad con la suma y el producto de números complejos. Definimos la aplicación norma $N : A \to \mathbb{N}$ como $N(a + b\sqrt{m}) = |a^2 - mb^2|$. Probar que

1. $N(xy) = N(x)N(y)$.
2. $N(x) = 1 \iff x$ es una unidad.
3. $x \mid y$ y $N(x) = N(y)$ si y sólo si x e y son asociados.
4. Si $N(x)$ es un número primo, entonces x es irreducible.

Ejercicio 46.– Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ no es un D.F.U.

Ejercicio 47.– Probar que $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ es un D.I.P. pero no es un D.E. (véase The American Mathematical Monthly, Volumen 95, número 9, noviembre 1988, págs 868-870).

Ejercicio 48.– Dar un procedimiento para calcular los coeficientes de la identidad de Bezout en un dominio euclídeo. Como aplicación, calcular la identidad de Bezout para $f(x) = x+3x+2$ y $g(x) = x^5+2x^4+5x^3+6x+2$ como polinomios de $\mathbb{R}[x]$ y de $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5)[x]$.

Ejercicio 49.– Probar que el anillo $\mathbb{Z}[i]$ de los enteros de Gauss es un dominio euclídeo con la norma dada por $\delta(x + iy) = x + y$.

Ejercicio 50.–

1. Caracterizar las unidades de los enteros de Gauss.
2. Demostrar que los elementos irreducibles de $\mathbb{Z}[i]$ son de uno de los dos siguientes tipos: (a) primos p que no se pueden escribir como suma de dos cuadrados y (b) elementos $x + iy$ con $\delta(x + iy)$ un primo en $\mathbb{Z}$.

(Nota: p es la suma de dos cuadrados si y sólo si $p = 2$ o p es congruente con uno módulo cuatro.)

Ejercicio 51.– Se define el anillo de los enteros de Eisenstein como el conjunto $\mathbb{E}$ de los números complejos de la forma $a + b\sqrt{-3}$, con a y b enteros simultáneamente, o $a - \frac{1}{2}$ y $b - \frac{1}{2}$ enteros simultáneamente.

1. Probar que $\mathbb{E}$ es un anillo.
2. Probar que es un dominio euclídeo.