Ejercicio 52.– Orden lexicográfico inverso graduado: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Diremos que $\alpha >_{lexinvgr} \beta$ si $|\alpha| > |\beta|$, o $|\alpha| = |\beta|$ y, en $\alpha - \beta$, el entero no nulo más a la derecha es negativo. Probar que *lexinvgr* es un orden monomial.

Ejercicio 53.– Escribir cada uno de los polinomios siguientes ordenando los términos usando el orden lex., el orden lexgr. y el orden lexinvgr, dando el $\exp(f)$ en cada caso:
(a) $f(x, y, z) = 2x + 3y + z + x^2 - z^2 + x^3$.
(b) $f(x, y, z) = 2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$.
(c) $f(x, y, z) = 7x^2y^4z - 2xy^6 + x^2y^2$.
Hacer lo mismo con las variables ordenadas $z > y > x$.

Ejercicio 54.– Sea $>$ un orden monomial. Probar que:
(a) $\alpha \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.
(b) Si x^α divide a x^β, entonces $\alpha \leq \beta$. ¿Es cierto el recíproco?
(c) Si $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, entonces α es el elemento menor de $\alpha + \mathbb{Z}_+^n$.

Ejercicio 55.– Calcular el resto de la división del polinomio f respecto del conjunto F. Usar el orden lex y el lexgr.
(a) $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$, $F = (xy^2 - x, x - y^3)$.
(b) $f = xy^2z^2 + xy - yz$, $F = (x - y^2, y - z^3, z^2 - 1)$

Ejercicio 56.– Un ideal $I \subset k[\underline{x}]$ es monomial si $\exists A \subset \mathbb{N}^n$ tal que $I = \langle \underline{x}^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$. Es decir, admite un sistema de generadores dado por monomios. Sea I un ideal monomial. Probar que:
(a) $\underline{x}^\beta \in I$ si y sólo si $\exists \alpha \in A$ tal que $\underline{x}^\alpha$ divide a $\underline{x}^\beta$.
(b) Sea $f \in k[\underline{x}]$, $f = \sum a_\alpha \underline{x}^\alpha$. Las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) $f \in I$
(ii) $\underline{x}^\alpha \in I$ para todo α con $a_\alpha \neq 0$.
(c) I tiene un sistema de generadores formado por monomios minimal único.

Ejercicio 57.– Sea $I \subset k[\underline{x}]$ un ideal. Denotamos $A_I = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \quad | \quad \underline{x}^\alpha \in I\}$.
(a) Probar que A_I es una escalera de $\mathbb{N}^n$
(b) Probar que I es monomial si y sólo si $I = \langle \underline{x}^\alpha \quad | \quad \alpha \in A_I \rangle$
(c) Sean $I, J \subset k[\underline{x}]$ dos ideales monomiales. Probar que $I = J$ si y sólo si $A_I = A_J$.

Ejercicio 58.– Sea $G = \{x - z^2, y - z^3\}$. ¿Es G una base de gröbner del ideal $\langle G \rangle$ respecto del orden lexicográfico graduado? Razonar la respuesta y, en caso negativo, hallar una.

Ejercicio 59.– En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^2y + z, xz + y \rangle$. Se pide:
1) Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico con $x < y < z$.
2) ¿Es $G = \{x^2y + z, xz + y, yz - y\}$ una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado con $x > y > z$?

Ejercicio 60.– Sea $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$ y consideremos el anillo $k[x, y]$. Hallar la base de Gröbner del ideal $I = \langle x^2 + y^2 + 1, x^2y + 2xy + x \rangle$ para el orden lexicográfico con $x > y$.

Ejercicio 61.– En el anillo $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - 2xy, 2y^2 - x, x^2 \rangle$. Hallar la base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico graduado.

Ejercicio 62.– En $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$. Hallar una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado.

Ejercicio 63.– En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^2 - xy - x, xz + y^2, y^2 + yz \rangle$. Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico.

Ejercicio 64.– En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - y, x^2y - z \rangle$. Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico.