Ejercicio 70 : En este ejercicio vamos a caracterizar completamente la expresión

$$f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$$

que se obtiene al aplicar el algoritmo de división, entre todas las posibles expresiones de f de esta forma.

Sea $\alpha(i) = exp(f_i)$ y definimos:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 & = & \alpha(1) + \mathbb{Z}_+^n \\ \Delta_2 & = & (\alpha(2) + \mathbb{Z}_+^n) - \Delta_1 \\ \Delta_3 & = & (\alpha(3) + \mathbb{Z}_+^n) - (\bigcup_{1 \le i \le 2} \Delta_i) \\ & \vdots & \\ \Delta_s & = & (\alpha(s) + \mathbb{Z}_+^n) - (\bigcup_{1 \le i \le s-1} \Delta_i) \\ \overline{\Delta} & = & \mathbb{Z}_+^n - (\bigcup_{1 \le i \le s} \Delta_i). \end{array}$$

(Observar que $\mathbb{Z}_+^n$ es la unión disjunta de Δ_i y $\overline{\Delta}$.)

(a) Probar que $\beta \in \Delta_i$ si y sólo si $x^{\alpha(i)}$ divide a x^β, pero ningún $x^{\alpha(j)}$ divide a x^β si $j < i$.

(b) Probar que $\gamma \in \overline{\Delta}$ si y sólo si ningún $x^{\alpha(i)}$ divide a x^γ.

(c) Probar que existe una división $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$, tal que , para todo i, todo monomio x^β de a_i verifica $\beta + \alpha(i) \in \Delta_i$, y todo monomio x^γ de r verifica que $\gamma \in \overline{\Delta}$.

(d) Probar que existe una única expresión $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$ verificando las condiciones de (c).

Ejercicio 71 : Un ideal $I \subset k[\underline{x}]$ es monomial si $\exists A \subset \mathbb{N}^n$ tal que $I = \langle \underline{x}^\alpha \quad | \quad \alpha \in A \rangle$. Es decir, admite un sistema de generadores dado por monomios. Sea I un ideal monomial. Probar que:

(a) $\underline{x}^\beta \in I$ si y sólo si $\exists \alpha \in A$ tal que $\underline{x}^\alpha$ divide a $\underline{x}^\beta$.

(b) Sea $f \in k[\underline{x}]$, $f = \sum a_\alpha \underline{x}^\alpha$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $f \in I$

(ii) $\underline{x}^\alpha \in I$ para todo α con $a_\alpha \neq 0$.

(c) I tiene un sistema de generadores formado por monomios minimal único.

Ejercicio 72 : Sea $I \subset k[\underline{x}]$ un ideal. Denotamos $A_I = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \quad | \quad \underline{x}^\alpha \in I\}$.

(a) Probar que A_I es una escalera de $\mathbb{N}^n$

(b) Probar que I es monomial si y sólo si $I = \langle \underline{x}^\alpha \quad | \quad \alpha \in A_I \rangle$

(c) Sean $I, J \subset k[\underline{x}]$ dos ideales monomiales. Probar que $I = J$ si y sólo si $A_I = A_J$.

Ejercicio 73 : Sea $G = \{x - z^2, y - z^3\}$. ¿Es G una base de gröbner del ideal $\langle G \rangle$ respecto del orden lexicográfico graduado? Razonar la respuesta y, en caso negativo, hallar una.

Ejercicio 74 : En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = (x^2y + z, xz + y)$. Se pide:

1) Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico con $x < y < z$.

2) ¿Es $G = \{x^2y + z, xz + y, yz - y\}$ una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado con $x > y > z$?

Ejercicio 75 : Sea $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$ y consideremos el anillo $k[x, y]$. Hallar la base de Gröbner reducida del ideal $I = (x^2 + y^2 + 1, x^2y + 2xy + x)$ para el orden lexicográfico con $x > y$.

Ejercicio 76 : En el anillo $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = (x^3 - 2xy, 2y^2 - x, x^2)$. Hallar la base de Gröbner reducida del ideal I para el orden lexicogrfico graduado.

Ejercicio 77 : En $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = (x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x)$. Se pide:

1. Hallar una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado.
2. A partir de la base obtenida, hallar una base de Gröbner minimal.

Ejercicio 78 : Sea $V = V(I) \subset A^2(\mathbb{C})$, donde $I = (x^2 - y, y + x^2 - 4)$. Probar que:

(a) $I = (x^2 - y, x^2 - 2)$.

(b) $V = \{(\pm\sqrt{2}, 2)\}$.

Ejercicio 79 : (1) Probar que si $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ factoriza como $g = g_1g_2$, entonces $V(f, g) = V(f, g_1) \cup V(f, g_2)$.

(2) Probar que $V(y - x^2, xz - y^2) = V(y - x^2, xz - x^4)$.

(3) Usando el primer apartado, describir la variedad del apartado segundo.

Ejercicio 80 : Dado $f \in I = (f_1, \ldots, f_r) \subset k[\underline{x}]$, describir un algoritmo para encontrar $g_i \in k[\underline{x}]$ tales que $\sum_{i=1}^{r} f_ig_i = f$.

Ejercicio 81 : (Teorema de eliminación) Sea $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal y sea G una base de gröbner de I con respecto al orden lexicográfico ($x_1 > x_2 > \ldots > x_n$). Probar que para cada m, $0 \leq m \leq n$, el conjunto $G_m = G \cap k[x_{m+1}, \ldots, x_n]$ es una base de gröbner del ideal $I_m = I \cap k[x_{m+1}, \ldots, x_n]$.

Ejercicio 82 : Sea $I = \langle x^2+y+z-1, x+y^2+z-1, x+y+z^2-1\rangle$. Calcular $I_1 = I \cap \mathbb{C}[y, z]$, $I_2 = I \cap \mathbb{C}[z]$.

Ejercicio 83 : (Intersección de ideales) Sean I_1, I_2 ideales de $k[x_1, \ldots, x_n]$, y sea $J \subset k[T, x_1, \ldots, x_n]$ el ideal

$$J = (T)I_1^e + (1-T)I_2^e.$$

Probar que

$$I_1 \cap I_2 = J \cap k[x_1, \ldots, x_n].$$

Ejercicio 84 : Calcular, aplicando el ejercicio anterior, $I \cap J$, siendo $I = \langle x^2y\rangle$ y $J = \langle xy^2\rangle$.

Ejercicio 85 : Sean los ideales $I_1 = \langle x, y\rangle$ e $I_2 = \langle y^2, z\rangle$ de $\mathbb{C}[x, y, z]$. Calcular $I_1 \cap I_2$.

Ejercicio 86 : (m.c.m. de polinomios) Sean $I = (f), J = (g)$, con $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que $I \cap J = (h)$ con $h = m.c.m.(f, g)$.

Ejercicio 87 : (Cociente de ideales) Sean I, g un ideal y un elemento de $k[x_1, \ldots, x_n]$ respectivamente.Probar que si $I \cap (g) = (h_1, \ldots, h_p)$, entonces $(I : (g)) = (h_1/g, \ldots, h_p/g)$. Si J es otro ideal, deducir un procedimiento para calcular $(I : J)$.

Ejercicio 88 : (Polinomio reducido) Sea k un cuerpo, $\mathbb{Q} \subset k$. Sea $I = (f) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que $\sqrt{I} = f_{red}$ donde

$$f_{red} = \frac{f}{m.c.d.(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})}$$

Ejercicio 89 : Diremos que $f \in k[\underline{x}]$ es un *binomio* si f es de la forma $f = a\underline{x}^\alpha - b\underline{x}^\beta$. Un ideal I de $k[\underline{x}]$ se dice *binomial* si admite un sistema de generadores formado por binomios. Supongamos fijado un orden monomial. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) I es binomial

(b) la base de gröbner reducida de I está formada por binomios.

Probar que si I es binomial y f un monomio, entonces $(I : f)$ es binomial.

Ejercicio 90 : Sea I un ideal de $k[\underline{x}]$, definimos

$$(I : g^\infty) = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} (I : g^s).$$

(a) Probar que si $(I : g^s) = (I : g^{s+1})$ para algún $s \in \mathbb{N}$, entonces $(I : g^\infty) = (I : g^s)$. ¿Existe s verificando tal propiedad? Razonar la respuesta.

(b) Sea I^e el ideal extendido de I en $k[T, x_1, \ldots, x_n]$, y sea $J = I^e + (Tg - 1)$. Probar que $(I : g^\infty) = J \cap k[x_1, \ldots, x_n]$.

(c) Describir un algoritmo con entrada el polinomio g y unos generadores de I, y con salida unos generadores de $(I : g^\infty)$.

Ejercicio 91 : Sean $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in \sqrt{I}$

(b) Para todo $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s g \in I$.

Dar un algoritmo con entrada f e I, y que de su salida se obtenga si $f \in \sqrt{I}$ o no.

Ejercicio 92 : Sean k un cuerpo, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $I_1, \ldots, I_r \subset A$ ideales. Definimos la aplicación

$$\Phi : A \to A/I_1 \times \ldots \times A/I_r, \Phi(f) = (f + I_1, \ldots, f + I_r).$$

1. Demostrar que Φ es un homomorfismo de anillos.
2. Dar una condición necesaria y suficiente para que Φ sea sobreyectiva.
3. Idem para que sea inyectiva.

Describir un algoritmo cuya entrada sean unos generadores de los ideales $I_1, \ldots, I_r$, y como salida responda si Φ es o no sobreyectiva, inyectiva y biyectiva.

Ejercicio 93 : Buscar las componentes irreducibles en $A^2(\mathbb{R})$ y $A^2(\mathbb{C})$ de

(a) $V(y^2 - xy - x^2y + x^3)$

(b) $V(y^2 - x(x^2 - 1))$

(c) $V(x^3 + x - x^2y - y)$.

Ejercicio 94 : Sea $I \subset k[\underline{x}]$ un ideal tal que $V = V(I) \subset k^n$ sea un conjunto algebraico finito de cardinal m, $V = \{P_1, \ldots, P_m\}$.

(a) Probar que la aplicación $\varphi : k[\underline{x}]/I \to k^m$ dada por $\varphi(f + I) = (f(P_1), \ldots, f(P_m))$, está bien definida y es un homomorfismo sobreyectivo de anillos.

(b) Supongamos que k es algebraicamente cerrado. Probar que φ es un isomorfismo si y sólo si I es radical.

(c) Dar un ejemplo donde se vea que la condición de ser algebraicamente cerrado es necesaria.

Ejercicio 95 : Sea k un cuerpo, V, W conjuntos algebraicos de k^n y I, J ideales de $k[\underline{x}]$.

(a) Dar un ejemplo donde se vea que $V - W = \{P \in V \quad | \quad P \notin W\}$ no es, en general, un conjunto algebraico.

(b) Probar que $\overline{V(I) - V(J)} \subset V(I : J)$. Además, si k es algebraicamente cerrado e I es radical, se da la igualdad.

(c) Probar que $I(V) : I(W) = I(V - W)$.

Ejercicio 96 : Probar que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, con $d =$m.c.d(m, n).

Ejercicio 97 : Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal, M un $A-$módulo. Probar que $(A/\mathfrak{a}) \bigotimes_A M \simeq M/\mathfrak{a}M$.

Ejercicio 98 : Sea A un anillo local, M y N $A-$módulos de generación finita. Probar que si $M \bigotimes N = 0$, entonces $M = 0$ o $N = 0$.

Ejercicio 99 : Sea M_i, $i \in I$, una familia cualquiera de $A-$módulos y sea M su suma directa. Demostrar que M es plano sii cada M_i es plano.

Ejercicio 100 : Demostrar que $A[x]$ es una $A-$álgebra plana.

Ejercicio 101 : Para cada $A-$módulo, sea $M[x]$ el conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes en M. Probar que $M[x]$ tiene estructura de $A[x]-$módulo. Probar que $M[x] \simeq A[x] \bigotimes_A M$.

Ejercicio 102 : Sea $h(x)$ un polinomio del anillo $\mathbb{C}[x]$ y sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios multiplos de $h(x)$.

1. Probar que la aplicación $\Phi : \frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))} \times \frac{\mathbb{C}[x]}{(g(x))} \to \frac{\mathbb{C}[x]}{(h(x))}$, definida por $\phi(p(x)+(f(x)), q(x)+(g(x))) = p(x)q(x)+(h(x))$ está bien definida y es $\mathbb{C}[x]$-bilineal.

2. En el caso particular de que $h(x)$ sea el máximo común divisor de $f(x)$ y $g(x)$, probar que el producto tensorial $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))} \otimes \frac{\mathbb{C}[x]}{(g(x))}$ es isomorfo a $\frac{\mathbb{C}[x]}{(h(x))}$.

Ejercicio 103 : Sean F y K dos cuerpos tales que $F \subset K$. Dado un polinomio $f(X)$ de $K[X]$, consideramos las F-álgebras

$$K \otimes_F \frac{F[X]}{(f(X))} \quad y \quad \frac{K[X]}{(f(X))}.$$

Probar que son isomorfas.

Ejercicio 104 : Probar que:

1. Si M y N son $A-$módulos planos, también lo es $M \bigotimes N$.

2. Si B es una $A-$álgebra plana y N es un $B-$módulo plano entonces N es un $A-$módulo plano.

Ejercicio 105 : Sean C una B-álgebra, M un B-módulo y N un C-módulo. Dado un homomorfismo de B-módulos $f : M \to N$, probar que existe un único homomorfismo de C-módulos de $M_C = M \otimes_B C$ en N tal que la imagen de $m \otimes 1$ sea $f(m)$.

Ejercicio 106 : Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de $A-$módulos. Probar que si M' y M'' son de generación finita, también lo es M.

Ejercicio 107 : Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en el radical de Jacobson, M un $A-$módulo y N un $A-$módulo de generación finita. Sea $f : M \to N$ un homomorfismo. Probar que si el homomorfismo inducido $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ es suprayectivo, entonces f es suprayectivo.

Ejercicio 108 : Sea A un anillo no nulo. Probar que $A^m \simeq A^n$ entonces $m = n$.

Ejercicio 109 : Sea M un $A-$módulo de generación finita y $f : M \to A^n$ un homomorfismo suprayectivo. Probar que $ker(f)$ es de generación finita.