

Apuntes de FÍSICA 2

1º Curso Ingeniería de la Salud

UNIVERSIDAD de SEVILLA



Francisco L. Mesa Ledesma

Copyright ©2012 by Francisco L. Mesa Ledesma; esta información puede ser copiada, distribuida y/o modificada bajo ciertas condiciones, pero viene SIN NINGUNA GARANTÍA; ver la *Design Science License* para más detalles.

DESIGN SCIENCE LICENSE

TERMS AND CONDITIONS FOR COPYING, DISTRIBUTION AND MODIFICATION

Copyright ©1999-2001 Michael Stutz <stutz@ds.org> Verbatim copying of this document is permitted, in any medium.

0. PREAMBLE.

Copyright law gives certain exclusive rights to the author of a work, including the rights to copy, modify and distribute the work (the reproductive, adaptative, and "distribution-ights").

The idea of copyleft is to willfully revoke the exclusivity of those rights under certain terms and conditions, so that anyone can copy and distribute the work or properly attributed derivative works, while all copies remain under the same terms and conditions as the original.

The intent of this license is to be a general copyleft that can be applied to any kind of work that has protection under copyright. This license states those certain conditions under which a work published under its terms may be copied, distributed, and modified.

Whereas "design science is a strategy for the development of artifacts as a way to reform the environment (not people) and subsequently improve the universal standard of living, this Design Science License was written and deployed as a strategy for promoting the progress of science and art through reform of the environment.

1. DEFINITIONS.

"License" shall mean this Design Science License. The License applies to any work which contains a notice placed by the work's copyright holder stating that it is published under the terms of this Design Science License.

"Work" shall mean such an aforementioned work. The License also applies to the output of the Work, only if said output constitutes a "derivative work" of the licensed Work as defined by copyright law.

"Object Form" shall mean an executable or performable form of the Work, being an embodiment of the Work in some tangible medium.

"Source Data" shall mean the origin of the Object Form, being the entire, machine-readable, preferred form of the Work for copying and for human modification (usually the language, encoding or format in which composed or recorded by the Author); plus any accompanying files, scripts or other data necessary for installation, configuration or compilation of the Work.

(Examples of "Source Data" include, but are not limited to, the following: if the Work is an image file composed and edited in PNG format, then the original PNG source file is the Source Data; if the Work is an MPEG 1.0 layer 3 digital audio recording made from a WAV format audio file recording of an analog source, then the original WAV file is the Source Data; if the Work was composed as an unformatted plaintext file, then that file is the Source Data; if the Work was composed in LaTeX, the LaTeX file(s) and any image files and/or custom macros necessary for compilation constitute the Source Data.)

"Author" shall mean the copyright holder(s) of the Work.

The individual licensees are referred to as "you."

2. RIGHTS AND COPYRIGHT.

The Work is copyrighted by the Author. All rights to the Work are reserved by the Author, except as specifically described below. This License describes the terms and conditions under which the Author permits you to copy, distribute and modify copies of the Work.

In addition, you may refer to the Work, talk about it, and (as dictated by "fair use") quote from it, just as you would any copyrighted material under copyright law.

Your right to operate, perform, read or otherwise interpret and/or execute the Work is unrestricted; however, you do so at your own risk, because the Work comes WITHOUT ANY WARRANTY – see Section 7 ("NO WARRANTY") below.

3. COPYING AND DISTRIBUTION.

Permission is granted to distribute, publish or otherwise present verbatim copies of the entire Source Data of the Work, in any medium, provided that full copyright notice and disclaimer of warranty, where applicable, is conspicuously published on all copies, and a copy of this License is distributed along with the Work.

Permission is granted to distribute, publish or otherwise present copies of the Object Form of the Work, in any medium, under the terms for distribution of Source Data above and also provided that one of the following additional conditions are met:

(a) The Source Data is included in the same distribution, distributed under the terms of this License; or

(b) A written offer is included with the distribution, valid for at least three years or for as long as the distribution is in print (whichever is longer), with a publicly-accessible address (such as a URL on the Internet) where, for a charge not greater than transportation and media costs, anyone may receive a copy of the Source Data of the Work distributed according to the section above; or

(c) A third party's written offer for obtaining the Source Data at no cost, as described in paragraph (b) above, is included with the distribution. This option is valid only if you are a non-commercial party, and only if you received the Object Form of the Work along with such an offer.

You may copy and distribute the Work either gratis or for a fee, and if desired, you may offer warranty protection for the Work.

The aggregation of the Work with other works that are not based on the Work – such as but not limited to inclusion in a publication, broadcast, compilation, or other media – does not bring the other works in the scope of the License; nor does such aggregation void the terms of the License for the Work.

4. MODIFICATION.

Permission is granted to modify or sample from a copy of the Work, producing a derivative work, and to distribute the derivative work under the terms described in the section for distribution above, provided that the following terms are met:

(a) The new, derivative work is published under the terms of this License.

(b) The derivative work is given a new name, so that its name or title cannot be confused with the Work, or with a version of the Work, in any way.

(c) Appropriate authorship credit is given: for the differences between the Work and the new derivative work, authorship is attributed to you, while the material sampled or used from the Work remains attributed to the original Author; appropriate notice must be included with the new work indicating the nature and the dates of any modifications of the Work made by you.

5. NO RESTRICTIONS.

You may not impose any further restrictions on the Work or any of its derivative works beyond those restrictions described in this License.

6. ACCEPTANCE.

Copying, distributing or modifying the Work (including but not limited to sampling from the Work in a new work) indicates acceptance of these terms. If you do not follow the terms of this License, any rights granted to you by the License are null and void. The copying, distribution or modification of the Work outside of the terms described in this License is expressly prohibited by law.

If for any reason, conditions are imposed on you that forbid you to fulfill the conditions of this License, you may not copy, distribute or modify the Work at all.

If any part of this License is found to be in conflict with the law, that part shall be interpreted in its broadest meaning consistent with the law, and no other parts of the License shall be affected.

7. NO WARRANTY.

THE WORK IS PROVIDED AS IS, AND COMES WITH ABSOLUTELY NO WARRANTY, EXPRESS OR IMPLIED, TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.

8. DISCLAIMER OF LIABILITY.

IN NO EVENT SHALL THE AUTHOR OR CONTRIBUTORS BE LIABLE FOR ANY DIRECT, INDIRECT, INCIDENTAL, SPECIAL, EXEMPLARY, OR CONSEQUENTIAL DAMAGES (INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, PROCUREMENT OF SUBSTITUTE GOODS OR SERVICES; LOSS OF USE, DATA, OR PROFITS; OR BUSINESS INTERRUPTION) HOWEVER CAUSED AND ON ANY THEORY OF LIABILITY, WHETHER IN CONTRACT, STRICT LIABILITY, OR TORT (INCLUDING NEGLIGENCE OR OTHERWISE) ARISING IN ANY WAY OUT OF THE USE OF THIS WORK, EVEN IF ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

END OF TERMS AND CONDITIONS

Índice general

1. Electrostática	1
1.1. Introducción	1
1.2. Campo eléctrico de una distribución de cargas	2
1.2.1. Ley de Coulomb	2
1.2.2. Principio de superposición	4
1.2.3. Campo eléctrico de cargas puntuales	4
1.2.4. Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga	6
1.2.5. (*) Ley de Gauss	9
1.3. Potencial eléctrico	13
1.4. Conductores en un campo electrostático	19
1.4.1. Campo eléctrico de un conductor cargado en equilibrio electrostático	19
1.4.2. Conductor neutro en un campo eléctrico externo	21
1.5. Condensadores	22
1.5.1. Capacidad de un conductor	22
1.5.2. Influencia entre conductores	24
1.6. Energía Electrostática	26
1.6.1. Trabajo para trasladar una carga puntual	26
1.6.2. Energía en un condensador de placas paralelas	27
1.7. Dieléctricos	29
1.8. Problemas propuestos	32
2. Circuitos de Corriente Continua	35
2.1. Introducción	35
2.2. Vector densidad de corriente	36
2.3. Conductividad, Ley de Ohm	40
2.3.1. Conductividad eléctrica	40

2.3.2.	Ley de Ohm circuital	41
2.3.3.	Efecto Joule	43
2.4.	Fuerza electromotriz	44
2.4.1.	Potencia suministrada por el generador	47
2.5.	Reglas de Kirchhoff	48
2.5.1.	Regla de Kirchhoff de las tensiones	48
2.5.2.	Regla de Kirchhoff de las intensidades	50
2.6.	Resolución de circuitos de corriente continua	51
2.6.1.	(*) Método de las corrientes de malla	52
2.6.2.	(*) Teorema de superposición	53
2.6.3.	(*) Teorema de Thevenin	55
2.6.4.	Balance de potencia	56
2.7.	Circuito RC. Carga y descarga de un condensador	57
2.8.	Problemas propuestos	60
3.	Magnetostática	63
3.1.	Introducción	63
3.2.	Fuerza de Lorentz	63
3.2.1.	Movimiento de una carga puntual en presencia de un campo magnético	65
3.2.2.	Efecto Hall (*)	68
3.3.	Fuerzas magnéticas sobre conductores	70
3.3.1.	Fuerza magnética sobre un hilo	70
3.3.2.	Momento de la fuerza sobre una espira de corriente	71
3.4.	Ley de Biot-Savart	74
3.5.	Ley de Ampère	76
3.5.1.	Campo magnético producido por un hilo infinito y rectilíneo de radio R recorrido por una intensidad I	77
3.5.2.	Campo magnético en un solenoide	78
3.6.	Problemas propuestos	80
4.	Inducción electromagnética	83
4.1.	Introducción	83
4.2.	Ley de Faraday	84
4.2.1.	Fuerza electromotriz de movimiento	84
4.2.2.	Fuerza electromotriz inducida	87

4.3. Inductancia	92
4.3.1. Inductancia mutua	92
4.3.2. Autoinducción	94
4.3.3. Caso general	95
4.4. Transitorios en circuitos RL	96
4.5. Energía magnética	98
4.6. Ley de Ampère-Maxwell (*)	101
4.7. Ecuaciones de Maxwell (*)	104
4.8. Problemas propuestos	106
5. Circuitos de Corriente Alterna	109
5.1. Introducción	109
5.2. Generador de fem alterna	110
5.3. Aspectos generales de funciones armónicas	111
5.3.1. Valores eficaces	112
5.3.2. Análisis fasorial	113
5.4. Relación $I \leftrightarrow V$ para Resistencia, Condensador y Bobina	115
5.5. Análisis fasorial de circuitos de CA	116
5.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina	116
5.5.2. Reglas de Kirchhoff	118
5.5.3. Circuito RLC serie	120
5.5.4. Resonancia	121
5.5.5. (*) Análisis de mallas	123
5.6. Balance de potencia	126
5.6.1. Potencia media	126
5.6.2. Factor de potencia	127
5.6.3. Consumo de potencia	128
5.7. Problemas propuestos	131
6. Ondas Electromagnéticas	135
6.1. Introducción	135
6.2. Nociones generales de ondas	136
6.2.1. (*) Ecuación de ondas	138
6.2.2. Ondas armónicas	139

6.3. (*) Ecuación de Ondas Electromagnéticas	141
6.4. Ondas electromagnéticas planas armónicas	143
6.5. Intensidad de la onda electromagnética	144
6.6. Interferencia de Ondas	147
6.6.1. Superposición de dos ondas electromagnéticas planas armónicas	148
6.6.2. Focos incoherentes	149
6.6.3. Focos coherentes	150
6.7. (*) Difracción	153
6.8. Ondas estacionarias	157
6.9. Espectro electromagnético	161
6.10. Fuentes de las Ondas Electromagnéticas	162
6.11. Problemas propuestos	163
A. Análisis vectorial	165
A.1. Vectores	165
A.1.1. Notación vectorial	165
A.1.2. Suma de vectores	166
A.1.3. Producto escalar	166
A.1.4. Producto vectorial	167
A.1.5. Productos triples	168
A.1.6. Diferencial y derivada de funciones de una sola variable	169
A.1.7. Teorema fundamental del cálculo	169
A.1.8. Diferencial y derivada parcial de una función de varias variables	170
A.1.9. Operador gradiente	170
A.1.10. Integral de camino	171
A.1.11. Teorema fundamental del gradiente	172
A.2. Integral de flujo	172
A.3. Problemas propuestos	173

Prefacio

La presente colección de notas sobre Electromagnetismo, Circuitos, Ondas y Fundamentos de Semiconductores pretende ser una ayuda al estudiante en la asignatura cuatrimestral *Física 2* de la titulación de Ingeniería de la Salud que se imparte en la E.T.S. de Ingeniería Informática de la Universidad de Sevilla. Aunque estas notas han sido inspiradas por diversas fuentes (permítaseme destacar y agradecer la importante contribución de los profesores de la ETS de Ingeniería Informática del Departamento de Física Aplicada 1 de la Universidad de Sevilla), cualquier defecto o error sólo es atribuible al autor de estos apuntes. Es importante resaltar que estas notas no pueden ni deben sustituir a otros textos más elaborados sobre la materia.

El propósito principal de la materia aquí presentada es dotar al alumno de algunos de los fundamentos físicos elementales en los que se basa el funcionamiento de los dispositivos eléctricos, electrónicos y opto-electrónicos usados en la tecnología actual. Dado que la Electrónica consiste básicamente en el control del flujo de los electrones en materiales conductores y semiconductores, es evidente la necesidad de estudiar en primer lugar el comportamiento general de las cargas y corrientes eléctricas. Este estudio se llevará a cabo mediante una serie de temas dedicados al Electromagnetismo básico y a la Teoría de Circuitos de corriente continua y alterna. Por otra parte, dada la relevancia de las ondas electromagnéticas en las comunicaciones actuales, se llevará a cabo un estudio general de las ondas para acabar con una descripción y análisis elemental de las ondas electromagnéticas.

Por último me gustaría acabar estas líneas recordando una máxima muy antigua atribuida a Confucio, y que creo que resume con mucha precisión la naturaleza del proceso de aprendizaje.

Lo escuché y lo olvidé...
Lo vi y lo recordé...
Lo hice y lo aprendí.

Con estas palabras solo deseo motivar a los posibles lectores de estos apuntes con la idea de que únicamente su esforzada labor personal podrá guiarles adecuadamente por el camino de un aprendizaje provechoso.

FRANCISCO L. MESA LEDESMA
Sevilla, enero de 2020

TEMA 1

Electrostática

1.1. Introducción

Dado que uno de los objetivos de esta asignatura será el estudio básico de los principales fenómenos electromagnéticos y buena parte de estos fenómenos están relacionados con la interacción entre cargas eléctricas, empezaremos este tema con el estudio de las interacciones de **cargas eléctricas en reposo**. La parte del Electromagnetismo que aborda esta materia se denomina *Electrostática*.

La carga eléctrica es una propiedad fundamental e intrínseca de la materia (al igual que la masa) que tiene las siguientes propiedades:

- Presenta **dos polaridades**: positiva y negativa. Cantidades iguales de ambas polaridades se anulan entre sí.
- La carga total del universo (suma algebraica de todas las cargas existentes) **se conserva**, esto es, la carga no se puede crear ni destruir. No obstante, debe notarse que esto no imposibilita que los efectos de las cargas positivas y las negativas se anulen entre sí. Además de esta propiedad de conservación global, la carga también se conserva localmente. Esto quiere decir que si cierta carga desaparece en un sitio y aparece en otro, esto es porque ha “viajado” de un punto a otro.
- La carga está **cuantizada**: cualquier carga que existe en la naturaleza es un múltiplo entero de una carga elemental q_e . Esta carga elemental corresponde a la carga del protón.

La unidad de carga en el Sistema Internacional es el **culombio (C)** y equivale a la carga de $6,2414959 \times 10^{18}$ protones, o lo que es lo mismo, la carga del protón es $q_e = 1,60218 \times 10^{-19}$ C.

Unidad de carga eléctrica
1 culombio (C)

Es interesante hacer notar que de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitatoria, la interacción electromagnética (o electrostática cuando es entre cargas en reposo) es la segunda más fuerte. De hecho la interacción eléctrica

entre dos electrones (de carga e igual a $-q_e$) es aproximadamente 10^{39} veces más fuerte que su correspondiente interacción gravitatoria. Esto da una idea de la magnitud tan importante de las fuerzas eléctricas. No obstante, en la naturaleza hay muchas situaciones en las que la interacción eléctrica no se manifiesta debido a la *compensación* tan precisa que ocurre en la materia entre cargas positivas y negativas. De hecho los agregados de materia se presentan generalmente en forma *neutra* y por ello las interacciones entre grandes cantidades de materia (planetas, estrellas, etc) es fundamentalmente de carácter gravitatorio. No obstante, esto no implica que la interacción entre cargas eléctricas sea irrelevante sino que por el contrario, estas interacciones están en la base de multitud de fenómenos fundamentales, por ejemplo: la formación y estabilidad de los átomos, las fuerzas moleculares, las fuerzas de rozamiento, las tensiones mecánicas, las fuerzas de contacto, etc.

Actividad 1.0:

- ¿Es la forma geométrica una propiedad intrínseca de la materia?
- Explique la diferencia entre el “principio de conservación de la carga” y el “principio de conservación local de la carga.”
- Describa algunas consecuencias de la “cuantización” de la carga eléctrica.
- Enumera algunos ejemplos simples y prácticos donde la interacción electrostática es la principal fuerza involucrada. Dé también algunos ejemplos donde esta interacción está ausente.

1.2. Campo eléctrico de una distribución de cargas

1.2.1. Ley de Coulomb

El estudio de la Electrostática se iniciará mediante la ley de Coulomb, *ley experimental* que describe la interacción entre dos **cargas puntuales** en reposo en el *vacío* (esto es, no existe ningún medio material entre ellas). El concepto de carga puntual es una idealización por la que se considerará que cierta carga está localizada estrictamente en un punto. Aunque en principio, esta idealización pudiera parecer poco realista, la experiencia demuestra que es una aproximación muy precisa en múltiples situaciones. De hecho, la carga uniformemente distribuida de cuerpos esféricos o incluso cuerpos cargados considerados a distancias lejanas se comporta muy aproximadamente como cargas puntuales.

La ley de Coulomb (~ 1785) establece que la fuerza, \vec{F} , que ejerce una carga *fuentes* q sobre una carga *prueba* Q , viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

donde ϵ_0 es una constante llamada **permitividad del vacío** cuyo valor en el S.I. es

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right]. \quad (1.2)$$

y

$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{r} \quad (r \equiv |\vec{r}|)$$

es el vector que va desde la carga fuente hasta la carga prueba siendo $r = |\vec{r}|$ su módulo y $\hat{r} = \vec{r}/r$ su vector unitario asociado.

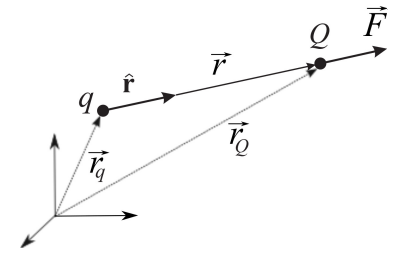
Vea el Apéndice A para un breve repaso de vectores y tenga en cuenta que en las figuras del presente texto usaremos tipo de letra **negrita** para denotar a los vectores, de modo que $\vec{u} \equiv \mathbf{u}$. Además los **vectores unitarios** se denotarán en letra negra con el signo $\hat{}$ encima, de modo que $\hat{\mathbf{u}}$ debe leerse como “vector unitario en la dirección y sentido de \vec{u} ”. Asimismo el **módulo** del vector \vec{u} se denotará indistintamente como $|\vec{u}|$ o bien simplemente como u .

Algunas propiedades destacables de la ley de Coulomb, expresión (1.1), son:

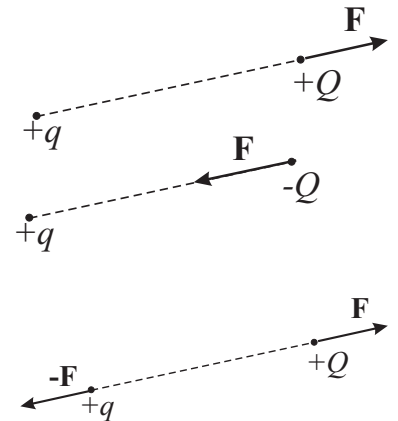
- La fuerza va dirigida según la línea que une las dos cargas (fuerza central), estando su sentido determinado por el signo del producto qQ . Por tanto, la fuerza entre dos cargas será atractiva para cargas de signo opuesto o bien repulsiva para cargas del mismo signo.
- La fuerza decrece con el cuadrado de la distancia. No obstante, a distancias cortas esta interacción crece extraordinariamente.
- La fuerza que ejercería la carga prueba sobre la carga fuente sería $-\vec{F}$ (principio de acción y reacción).

Actividad 1.1:

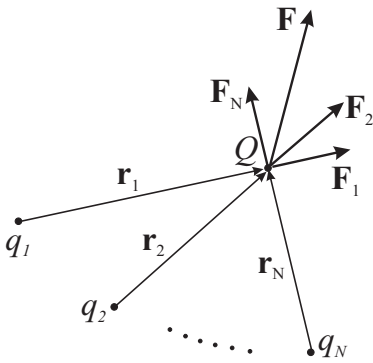
- ¿De dónde viene la ley de Coulomb?
- Explique con palabras el significado de \vec{r} en la Ec. (1.1). ¿Por qué tenemos dos expresiones para la fuerza en (1.1)?
- ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales?
- Represente gráficamente la magnitud de la fuerza entre dos cargas puntuales en función de la distancia entre dichas cargas. Obtenga algunas conclusiones relevantes de esta gráfica.



\vec{r} es el vector posición que va desde la carga fuente a la carga prueba



1.2.2. Principio de superposición



La ley de Coulomb describe el efecto de una *única* carga puntual fuente, q , sobre la carga prueba, Q . El efecto de un conjunto de cargas sobre cierta carga prueba viene determinado por el principio de superposición. Este principio de superposición establece que

La interacción entre dos cargas es completamente independiente de la presencia de otras cargas.

Esto significa que para calcular el efecto de un conjunto de cargas fuente sobre cierta carga prueba, se puede proceder calculando el efecto de cada una de las cargas fuentes sobre la carga prueba para obtener el efecto total como la suma de los efectos parciales (esto es, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$).

De este modo, la fuerza que produce el conjunto de cargas fuentes, $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, sobre la carga prueba Q situada en el punto P puede calcularse como

$$\vec{F}(P) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (1.3)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.4)$$

1.2.3. Campo eléctrico de cargas puntuales

En la expresión de la fuerza dada por (1.4) puede apreciarse que el sumatorio *depende exclusivamente de la configuración de cargas fuente*, por lo que podemos escribir

$$\vec{F}(P) = Q\vec{E}(P), \quad (1.5)$$

donde el vector $\vec{E}(P)$ se denomina **campo eléctrico** producido por las cargas fuente en el punto P , viniendo éste dado por

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i. \quad (1.6)$$

La introducción de este vector \vec{E} permite definir una magnitud vectorial que varía punto a punto y que sólo depende de las cargas fuentes. De este modo se consigue dotar a cada punto del espacio de una propiedad vectorial tal que el producto del valor de una carga prueba situada en ese punto por el valor de dicho vector en ese punto proporciona la fuerza que ejercerá la configuración de cargas fuentes sobre dicha carga prueba. En este sentido, el campo eléctrico, \vec{E} , puede, por tanto, definirse como la fuerza por unidad de carga y sus unidades son consecuentemente N/C. Es interesante observar que el campo eléctrico “recoge” de alguna manera la información sobre las cargas fuentes, “escondiendo” la disposición particular de esta configuración y mostrando únicamente su efecto global.

Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales

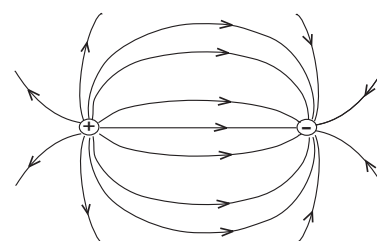
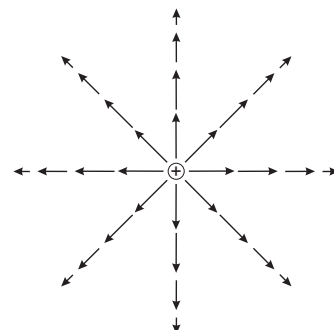
Unidad de campo eléctrico:
1 N/C

Tal y como se ha introducido el campo eléctrico podría pensarse que este campo es únicamente un ente matemático útil para calcular la fuerza pero sin significado físico concreto. No obstante, tal y como se verá en temas posteriores, \vec{E} posee por sí mismo una realidad física clara y por tanto desde este momento es conveniente considerar al campo eléctrico como un ente real (con el mismo grado de realidad física que la fuerza o el momento lineal) independiente de que exista o no una carga prueba.

A partir de la expresión (1.6), el campo producido por una carga puntual situada en el punto O en el punto de observación P ($\vec{r} \equiv \overline{OP}$) vendrá dado por

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (1.7)$$

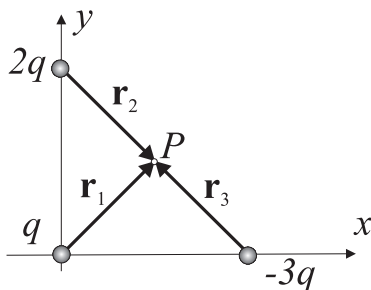
Una forma de visualizar dicho campo es dibujando el vector \vec{E} en ciertos puntos del espacio. No obstante, es más conveniente describir el campo mediante las **líneas de campo**, que son aquellas líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector campo. Para un sistema de dos cargas idénticas en magnitud, una positiva y otra negativa, las líneas de campo salen de la carga positiva y acaban en la carga negativa según el patrón que se muestra en la figura. Este hecho particular es una propiedad del campo electrostático, esto es, las líneas de campo *salen* de las cargas positivas y *acaban* en las negativas o van al infinito. Dado que las cargas eléctricas son las únicas *fuentes* del campo electrostático, siempre que existan cargas eléctricas descompensadas espacialmente (cuando no se anulen unas a otras en cada punto), existirá campo electrostático.



Actividad 1.2:

- ¿De dónde proviene el principio de superposición?
- Explique cómo el principio de superposición nos puede ayudar a calcular la fuerza que tres cargas puntuales ejercen sobre una cuarta.
- ¿Cuáles son las ventajas de ascribir una magnitud vectorial (campo eléctrico) a los puntos del espacio?
- La magnitud del campo eléctrico siempre decrece como el inverso de la distancia al cuadrado. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- Dibuje de forma aproximada la forma de las líneas de campo en una configuración con tres cargas puntuales donde dos de ellas son positivas y la tercera negativa.

EJEMPLO 1.1 Calcular el campo en el punto P debido al efecto de las tres cargas señaladas en el dibujo.



Para calcular el campo eléctrico en el punto P aplicaremos el principio de superposición, por lo que primero debemos obtener el campo producido por cada una de las cargas. Antes de calcular este campo, debemos identificar el vector que va desde cada una de las cargas hasta el punto de observación P . Según el dibujo adjunto tendremos que

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_3 = -\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y},$$

siendo el módulo de los tres anteriores vectores idéntico y de valor

$$|\vec{r}_i| \equiv D = \sqrt{1/2}.$$

El campo en P viene dado por

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

por lo que tras sustituir el valor de \vec{r}_i obtenido anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^3} \left[\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^3} (3\hat{x} - 2\hat{y}) = \frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0} (3\hat{x} - 2\hat{y}). \end{aligned}$$

1.2.4. Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

Aunque el carácter discreto de la materia (naturaleza atómica) es bien conocido, en multitud de situaciones prácticas, este carácter discreto puede “obviarse” y considerar que la materia puede describirse como un *continuo*. Desde un punto de vista matemático, esto implica que la materia se describirá como una *superposición de elementos diferenciales infinitesimales*, por ejemplo para calcular su masa: $m = \int dm$ (en vez de describir la materia como un agregado de partículas individuales, donde: $m = \sum_i^N m_i$). Esta consideración del continuo para la masa de la materia también es extensible a su carga, de modo que en múltiples situaciones la carga se considerará como una **distribución continua**. En este caso, la carga total q de una distribución de carga se obtendrá como

$$q = \int dq. \quad (1.8)$$

Para obtener el campo eléctrico producido por la anterior distribución de carga en un punto P , se considerará que la contribución de cada elemento diferencial de carga, dq , al campo eléctrico en P , $d\vec{E}(P)$, puede asimilarse al campo eléctrico producido por una carga puntual de valor dq (notemos aquí la similitud geométrica que existe entre el problema de una carga puntual y un diferencial de carga; es decir, el volumen ocupado por un carga diferencial

tiende a cero). La expresión del campo diferencial producido por la carga diferencial puede, por tanto, expresarse en similitud con (1.7) como

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.9)$$

donde el vector \vec{r} va desde la posición de dq hasta el punto P .

El campo total producido por toda la distribución de carga se obtendrá usando el principio de superposición, tal y como se hizo para cargas discretas en (1.6), al sumar las distintas contribuciones infinitesimales:

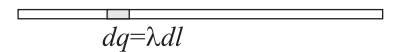
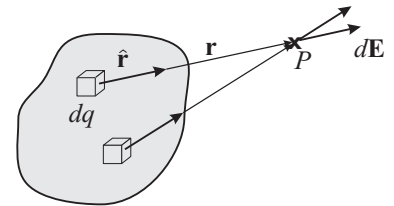
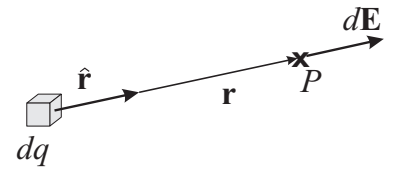
$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}. \quad (1.10)$$

En la práctica, para calcular el campo producido por las distribuciones de carga se introduce el concepto de **densidad de carga**, que relaciona la cantidad de carga existente en cada elemento diferencial con el volumen, superficie o longitud de dicho elemento. Si la geometría del problema es muy sencilla, entonces es posible que la integral (1.10) pueda hacerse de forma analítica (es decir, encontrando la primitiva correspondiente). En general, la integral anterior puede obtenerse mediante procedimientos numéricos

En función del carácter geométrico del elemento diferencial de carga pueden distinguirse tres tipos distintos de distribuciones de carga y expresar el campo en cada uno de los casos según:

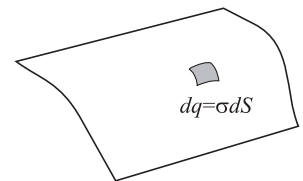
- **Distribución lineal de carga** λ : $dq = \lambda dl$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{línea}} \lambda \frac{\hat{r}}{r^2} dl. \quad (1.11)$$



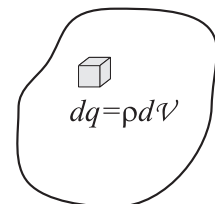
- **Distribución superficial de carga** σ : $dq = \sigma dS$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{superficie}} \sigma \frac{\hat{r}}{r^2} dS. \quad (1.12)$$

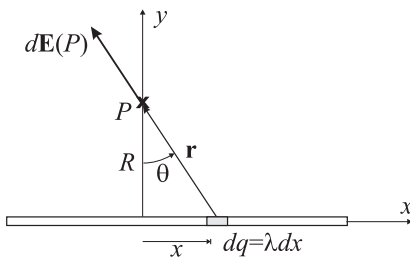


- **Distribución volumétrica de carga** ρ : $dq = \rho dV$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volumen}} \rho \frac{\hat{r}}{r^2} dV. \quad (1.13)$$



Debe notarse que en las integrales anteriores, la región de integración está extendida únicamente a la región donde existen cargas.



EJEMPLO 1.2 (*) Campo de una distribución de carga lineal finita

Con referencia en la figura adjunta, el diferencial de campo en el punto P viene dado por

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \hat{r}, \quad (1.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -x\hat{x} + R\hat{y} \\ \hat{r} &= -\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{R}{r}\hat{y} = -\text{sen } \theta \hat{x} + \text{cos } \theta \hat{y}. \end{aligned}$$

Para expresar tanto dx como r en función del ángulo, debe considerarse que

$$\begin{aligned} x &= R \tan \theta \\ dx &= R \sec^2 \theta d\theta \\ r &= R \sec \theta \end{aligned}$$

y reescribir por tanto (1.14) como

$$\begin{aligned} d\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \sec^2 \theta d\theta}{R^2 \sec^2 \theta} (-\text{sen } \theta \hat{x} + \text{cos } \theta \hat{y}) \\ &= \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} (-\text{sen } \theta \hat{x} + \text{cos } \theta \hat{y}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Para obtener el campo eléctrico se integrará la expresión anterior, de modo que

$$E_x(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\text{sen } \theta) d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\text{cos } \theta_2 - \text{cos } \theta_1) \quad (1.16)$$

$$E_y(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cos } \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1), \quad (1.17)$$

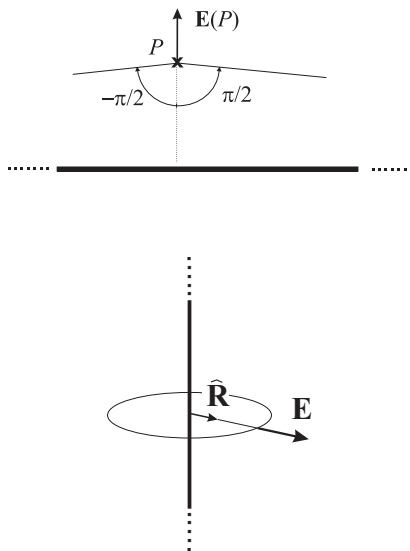
donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que determinan los bordes inferior y superior de la distribución lineal de carga (nótese que los ángulos son medidos en sentido anti-horario).

Para el caso de un hilo *infinito*, se tiene que $\theta_1 = -\pi/2$ y $\theta_2 = \pi/2$, por lo que las componentes del campo eléctrico al sustituir en (1.16) y (1.17) son

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la simetría cilíndrica que presenta el problema, el campo para el hilo infinito se puede expresar finalmente como

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R}. \quad (1.18)$$



1.2.5. (*) Ley de Gauss

La ley de Gauss (~ 1867) dice que el flujo del campo eléctrico debido a una distribución de carga a través una superficie S es igual a $1/\epsilon_0$ veces la carga total, Q_{int} , encerrada en el interior de la superficie S , esto es,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

Ley de Gauss

Aunque las expresiones (1.11)-(1.13) son suficientes para calcular el campo en cualquier punto supuestas conocidas las distribuciones de carga (tal como se ha mostrado en el Ejemplo 1.2), este procedimiento de cálculo no es trivial incluso para los casos más simples. Afortunadamente la ley de Gauss nos permitirá obtener fácilmente el campo eléctrico en una serie de situaciones con alta simetría.

Para justificar la ley de Gauss, considérese el campo producido por una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Es interesante notar que la expresión (1.7) dice que el campo en una superficie esférica de radio r centrada en la posición de la carga q puede expresarse como

$$\vec{E} = |\vec{E}(r)| \hat{r}, \quad (1.20)$$

esto es, el módulo del campo sólo depende del radio de dicha esfera y va siempre dirigido según la normal exterior a dicha esfera en cada punto (este campo presenta, por tanto, simetría esférica).

Si se realiza la siguiente integral (ver sección A.2):

$$\oint_{\text{superf.}} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (1.21)$$

que se conoce con el nombre de **flujo del campo eléctrico**, Φ , para el campo producido por la carga puntual en una superficie esférica de radio r centrada en la carga q se tiene que

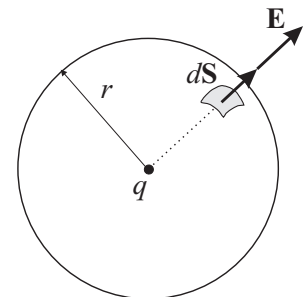
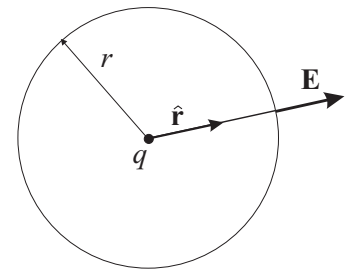
$$\Phi = \oint_{\text{superf.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}(r)| \oint_{\text{superf.}} \hat{r} \cdot d\vec{S}, \quad (1.22)$$

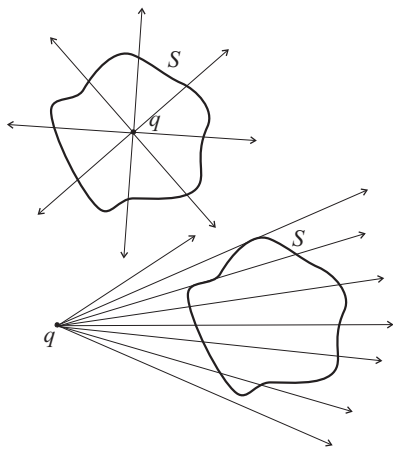
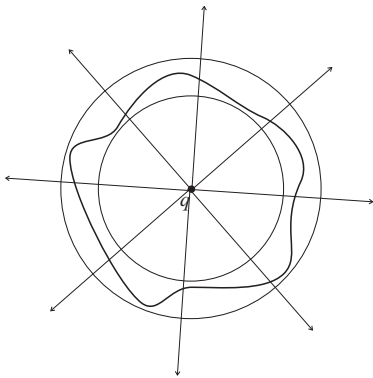
dado que $|\vec{E}(r)|$ permanece *constante* al integrar sobre la superficie esférica. Teniendo ahora en cuenta que

$$\hat{r} \cdot d\vec{S} = dS \quad (\hat{r} \parallel d\vec{S}),$$

la integral (1.21) puede escribirse para el presente caso como

$$\begin{aligned} \Phi &= |\vec{E}(r)| \oint_{\text{superf.}} dS = |\vec{E}(r)| \times (\text{Area esfera}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.23)$$





Es interesante notar que el flujo Φ *no depende* del radio de la esfera y es igual al valor de la carga encerrada en la esfera dividido por ϵ_0 . Si se considera, por tanto, una esfera centrada en el mismo punto y de distinto radio, se obtendrá que el flujo seguirá siendo el mismo. Parece entonces razonable suponer que el flujo a través de cualquier superficie cerrada que incluya a la carga y comprendida entre ambas esferas concéntricas venga también dado por q/ϵ_0 .

Dado que el número de líneas de campo que atraviesa cualquiera de las anteriores superficies es el mismo, el flujo del campo eléctrico a través de estas superficies podría interpretarse como una “medida” del número de líneas de campo que las atraviesa. En este sentido, si el número de líneas de campo que atraviesa una superficie cerrada es cero (esto es, entran tantas líneas como salen), parece razonable suponer que el flujo del campo eléctrico a través de dicha superficie sea igualmente nulo. Podría por tanto escribirse para una superficie cerrada arbitraria, S , que el flujo de una carga puntual a través de dicha superficie es

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \subset S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.24)$$

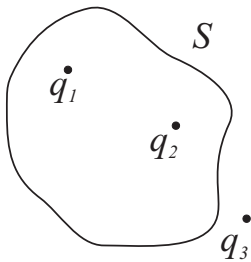
En el caso de que se tenga una distribución de cargas puntuales, por el principio de superposición, se obtiene que

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i, \quad (1.25)$$

esto es, el flujo de la distribución a través de la superficie S es igual a la suma del flujo asociado a cada una de las cargas individualmente. Dado que el flujo asociado a una sola carga ya fue obtenido en (1.24) se puede concluir que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

donde Q_{int} representa la carga total encerrada en el interior de la superficie S . La expresión anterior también se aplica en el caso de una distribución continua de carga.



EJEMPLO 1.3 Calcule el flujo de \vec{E} que atraviesa S en la figura adjunta.

En la situación mostrada en la figura, la carga en el interior de la superficie S es justamente

$$Q_{\text{int}} = q_1 + q_2,$$

por lo que el flujo a través de dicha superficie, según (1.19), será

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Aunque la ley de Gauss (1.19) es **válida** para cualquier tipo de distribución de carga y superficie, ésta sólo es **útil** para obtener el campo en *situaciones de alta simetría*. Estas situaciones se dan cuando exista una superficie de Gauss, S_G , tal que, en aquellas partes donde el flujo sea distinto de cero (superficie que se denominará S'_G), la integral del flujo se pueda realizar de modo que el módulo del campo sea *constante* sobre dicha superficie, esto es, cuando se pueda proceder de la siguiente manera:

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| \oint_{S'_G} dS. \quad (1.26)$$

Ley de Gauss útil en situaciones de alta simetría

Aplicaciones de la ley de Gauss

Algunas de las situaciones donde es útil aplicar la ley de Gauss se detallan a continuación:

■ Campo de un hilo recto infinito cargado.

Este campo ya fue obtenido en el Ejemplo 1.2 mediante integración directa. Ahora se obtendrá siguiendo la ley de Gauss. Para ello puede notarse que debido a la simetría cilíndrica del problema puede deducirse que

$$\vec{E} = |\vec{E}(R)|\hat{R}.$$

Este hecho implica que se puede escoger como superficie de Gauss, una superficie cilíndrica cuyo eje coincida con el propio hilo. De este modo se tendrá que el flujo a través de las superficies superior e inferior (tapaderas del cilindro) es nulo dado que $\vec{E} \perp d\vec{S}$ en dichas superficies y en la superficie lateral, el módulo del campo será constante, esto es,

$$\oint_{S_L+S^++S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}(R)| S_L.$$

El flujo debe ser igual al valor de la carga en el interior de la superficie cerrada y ésta incluye un trozo de hilo de altura h , por lo que $Q_{\text{int}} = \lambda h$. Por otra parte, como $S_L = 2\pi R h$ obtendremos que

$$|\vec{E}| 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

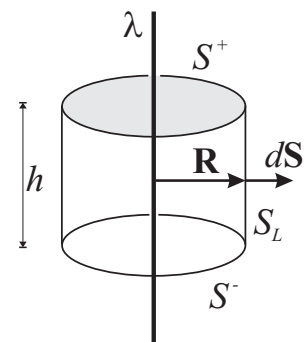
de donde se deduce que el módulo del campo viene dado por

$$|\vec{E}(R)| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

■ Campo de una distribución uniforme esférica de carga

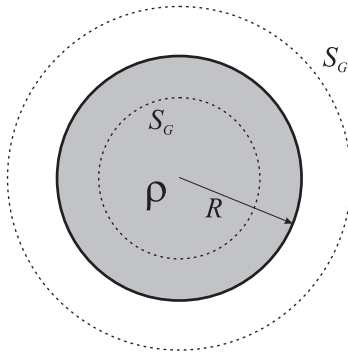
Sea una esfera de radio R con una distribución uniforme de carga ρ . Dado que en esta situación el campo eléctrico presenta simetría esférica, esto es, $\vec{E} = |\vec{E}(r)|\hat{r}$, se tiene que

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}(r)|\hat{r} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}(r)| dS$$



y, por tanto, el flujo a través de una superficie de radio r y área $4\pi r^2$ será

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S d\Phi = |\vec{E}(r)| \oint_S dS = |\vec{E}(r)| (4\pi r^2) \\ &= \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$



Debe notarse que la carga total encerrada por la superficie sólo depende del radio de esta superficie y por tanto sólo debe considerarse aquella carga en el interior del volumen de la esfera de radio r , esto es,

$$Q_{\text{int}} = \int_{\mathcal{V}} \rho dV = \rho \int_{\mathcal{V}} dV = \begin{cases} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r < R \\ \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \equiv Q & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

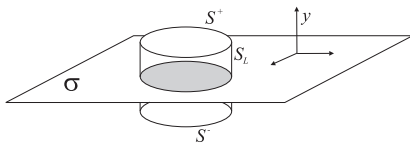
A partir de los resultados de las expresiones anteriores puede fácilmente deducirse que el campo en cualquier punto viene dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

- **Campo de un plano infinito cargado uniformemente** ($S_G \neq S'_G$) Un plano infinito con una densidad de carga superficial uniforme σ provoca un campo eléctrico del tipo

$$\vec{E} = |\vec{E}(y)|\hat{y}.$$

El módulo del campo no presenta dependencia respecto a las variables x y z debido a que cualquier punto con la misma coordenada y es totalmente equivalente (es decir, desde cualquier punto del plano $y = \text{Cte}$ se observa la misma distribución de cargas). Con respecto a la dirección del campo, por simetría cualquier componente que no sea vertical es perfectamente cancelada dado el carácter infinito del plano.



Eligiendo como superficie de Gauss una superficie cilíndrica como la mostrada en la figura, se tiene que

$$\oint_{S_L+S^++S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2|\vec{E}|S$$

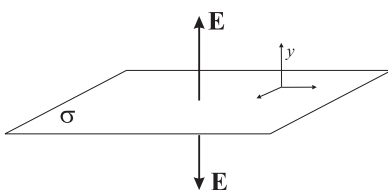
e igualando el flujo al valor de la carga encerrada en el interior de la superficie, $Q_{\text{int}} = \sigma S$, se obtiene

$$2|\vec{E}|S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

y, por tanto, el campo será

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y)\hat{y}. \quad (1.27)$$

Es interesante notar que el campo, por ejemplo para $y > 0$, no depende de la altura sobre el plano y por tanto es constante en todos los puntos (puede sorprender que incluso no decrezca con la distancia).



Actividad 1.3:

- Explique las razones que hacen que el cálculo del campo eléctrico creado por una distribución continua de carga sea más difícil que el creado por una distribución discreta.
- ¿Hay situaciones en las que el cálculo del campo eléctrico producido por una distribución de carga sea simple? Justifique su respuesta.
- Para puntos de observación lejanos de una esfera carga uniformemente, ¿existe alguna diferencia entre el campo eléctrico producido por dicha esfera y el que produciría una carga puntual situada en el centro de la esfera anterior?
- ¿Cómo calcularía el campo creado por una carga puntual q situada a una distancia d de un plano cargado uniformemente con densidad de carga σ ? Obtenga la expresión para dicho campo en cualquier punto del espacio.

1.3. Potencial eléctrico

Si se realiza la integral de camino del campo eléctrico, \vec{E}_q , producido por una carga puntual, q , entre dos puntos A y B , a través de una curva Γ , se obtiene que

$$C_A^B = \int_{A,\Gamma}^B \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Gamma}^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A,\Gamma}^B \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}. \quad (1.28)$$

El numerador de la integral anterior puede expresarse como

$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = dl \cos \alpha = dr$$

y por tanto se encuentra que

$$C_A^B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (1.29)$$

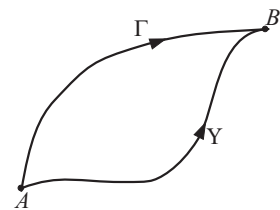
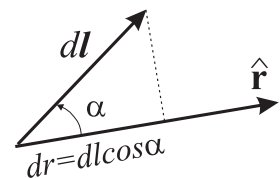
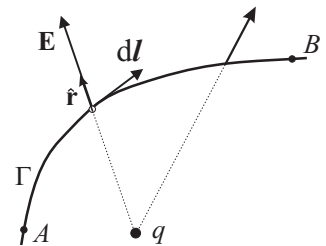
Es interesante observar en (1.29) que:

- La integral de camino es independiente del camino tomado para ir desde el punto A hasta el punto B ,

$$\int_{A,\Gamma}^B \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Upsilon}^B \vec{E}_q \cdot d\vec{l}. \quad (1.30)$$

- La integral de camino a través de cualquier curva cerrada es nula,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.31)$$



Para una *distribución discreta/continua de carga*, la integral de camino del campo eléctrico entre los puntos A y B puede calcularse, teniendo en cuenta el principio de superposición, como

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(\sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_A^B \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (1.32)$$

Dado que esta magnitud se ha podido expresar como superposición de las circulaciones relacionadas con cargas puntuales, la circulación del campo de una distribución arbitraria de cargas presentará las propiedades (1.30) y (1.31) expuestas anteriormente. En particular la propiedad (1.31) (la circulación del campo a lo largo de una curva cerrada es nula) nos dice que

el campo electrostático es conservativo.

Esta propiedad, cuya forma matemática viene descrita en (1.31), implica que necesariamente la integral de camino de cualquier campo electrostático entre un punto A y otro B a lo largo de una curva arbitraria Γ pueda escribirse como

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B), \quad (1.33)$$

donde la función V es cierta función escalar que se denomina **potencial eléctrico**. Las unidades del potencial eléctrico serán el producto de la unidad de campo eléctrico por la de longitud, esto es: Nm/C en el SI. Esta unidad de potencial recibe el nombre de **voltio** (V). Usualmente, la unidad de campo eléctrico se expresa como V/m.

Unidad de potencial eléctrico:
1 voltio (V)

Introduciendo en (1.33) la expresión para el campo eléctrico de una *carga puntual* y observando (1.28) podemos concluir que el potencial producido por una carga puntual en el punto P situado a una distancia r de dicha carga vendrá dado por

Potencial producido por una carga puntual

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.34)$$

Para una distribución continua de carga, debido al principio de superposición y siguiendo el mismo procedimiento que para el campo, se tendrá que

Potencial producido por una distribución de cargas

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{región de cargas}} \frac{\rho}{r} dV. \quad (1.35)$$

Actividad 1.4:

- Enumere algunas conclusiones relevantes que pueda extraer de la expresión (1.29) referente a la integral de camino del campo electrostático producido por una carga puntual.
- Trate de entender qué nos dice la identidad (1.31) para el caso de un campo eléctrico uniforme y un camino cerrado. Encuentre las razones matemáticas que hacen que esta integral de línea sea nula en este caso.
- ¿Es la expresión (1.34) la definición general del potencial eléctrico? Justifique su respuesta. ¿Puede tomarse la expresión (1.33) como la definición general del potencial eléctrico? Justifique su respuesta.
- Escriba una expresión general para el potencial eléctrico cuando conocemos el campo eléctrico. Escriba otra expresión para el caso en que conozcamos la densidad de carga eléctrica.
- Algunas veces decimos “potencial eléctrico en el punto P ”. No obstante, esta aseveración es incorrecta. Justifique por qué.

EJEMPLO 1.4 Cálculo del potencial eléctrico producido por un plano cargado infinito.

Teniendo en cuenta la expresión (1.27) para el campo producido por un plano infinito con densidad de carga σ , encontramos al aplicar (1.33) que esta expresión se reduce a

$$V(y) - V(0) = - \int_0^y \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y) dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y) y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |y| .$$

EJEMPLO 1.5 Halle la diferencia de potencial entre dos puntos A y B en una región donde existe un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 .

Haciendo uso de la definición de diferencia de potencial dada en (1.33), encontramos para el presente caso que

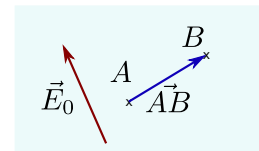
$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \vec{E}_0 \cdot \int_A^B d\vec{l}$$

donde el campo eléctrico puede sacarse de la integral debido a que no varía a lo largo del camino de integración desde A hasta B . Notemos ahora que la integral

$$\int_A^B d\vec{l} = \vec{AB}$$

donde \vec{AB} es el vector posición que va desde A hasta B . Finalmente obtenemos que

$$V(A) - V(B) = \vec{E}_0 \cdot \vec{AB} .$$



Energía potencial

El trabajo, W_E , que realiza el *campo electrostático* para mover una carga prueba puntual Q desde el punto A hasta el punto B , vendrá dado por

$$W_E = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_{A,\Gamma}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.36)$$

Aplicando los resultados de la sección anterior podemos ver que la integral (1.36) no depende del camino y, por tanto, la fuerza es *conservativa*. Para fuerzas conservativas es sabido que el trabajo realizado por dichas fuerzas puede escribirse como la variación (con signo negativo) de la energía potencial, esto es,

$$W_E = -\Delta U = -[U(B) - U(A)]. \quad (1.37)$$

Este hecho queda patente al escribir el trabajo en (1.36) en términos del potencial eléctrico (ver (1.33)) como

$$W_E = QV(A) - QV(B) \quad (1.38)$$

e identificar la **energía potencial** de la carga Q en el punto P como

$$U(P) = QV(P). \quad (1.39)$$

Energía potencial eléctrica de una carga puntual

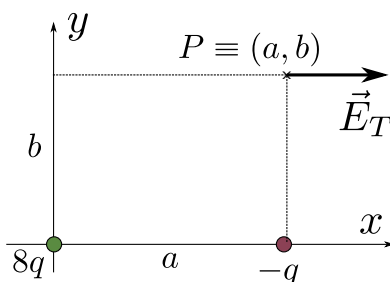
Si ahora tenemos en cuenta (según el teorema de las fuerzas vivas) que el trabajo es igual al incremento de la energía cinética del sistema, esto es: $W_E = \Delta E_c$; podemos escribir al igualar ΔE_c con (1.37) que

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = 0. \quad (1.40)$$

Dado que la energía mecánica, E_m , del sistema se define como

$$E_m = E_c + U,$$

entonces podemos establecer que *la energía mecánica de la carga Q en el campo electrostático se conserva*.



EJEMPLO 1.6 Trabajo del campo de cargas puntuales.

Para la situación de cargas mostrada en la figura, **(a)** calcular la distancia b para que el campo creado por ambas cargas, \vec{E}_T , en el punto $P \equiv (a, b)$ vaya dirigido únicamente según la dirección x . **(b)** Calcular el trabajo que realiza el campo total para llevar una tercera carga Q desde el punto $A \equiv (0, b)$ al punto P bajo las condiciones del apartado anterior.

(a) Si denominamos carga #1 a la carga de $8q$ y carga #2 a la carga q , tenemos que los vectores posición que van desde estas cargas al punto P son

$$\vec{r}_1 = a\hat{x} + b\hat{y} \quad , \quad \vec{r}_2 = b\hat{y}.$$

Los campos eléctricos que crea cada carga en el punto de observación serán

$$\vec{E}_1 = K \frac{8q}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (a\hat{x} + b\hat{y}) \quad , \quad \vec{E}_2 = -K \frac{q}{b^2} \hat{y}$$

y el campo total, por superposición,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = Kq \left\{ \frac{8a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{x} + \left[\frac{8b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \right] \hat{y} \right\} .$$

La condición para que se anule el campo en la dirección vertical será

$$\frac{8b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{1}{b^2} \Rightarrow (a^2 + b^2)^{3/2} = 8b^3 .$$

Si operamos en la expresión anterior

$$(a^2 + b^2)^{3/2} = (2b)^3 \Rightarrow a^2 + b^2 = (2b)^2$$

que se reduce a

$$a^2 = 3b^2 \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{3}} .$$

(b) El trabajo W para trasladar la carga Q desde el punto A al B puede expresarse como

$$W = Q[V(A) - V(B)]$$

donde el potencial eléctrico en cualquier punto, $V(P)$, es la suma de los potenciales creados por cada carga individualmente. Para este cálculo, debemos entonces notar que

$$\begin{aligned} V_1(A) &= K \frac{8q}{b} & V_1(B) &= K \frac{8q}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ V_2(A) &= -K \frac{q}{(a^2 + b^2)^{1/2}} & V_2(B) &= -K \frac{q}{b} \end{aligned}$$

lo que nos lleva a

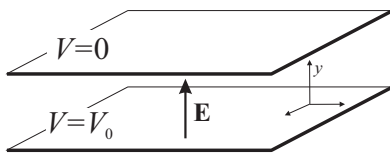
$$\begin{aligned} W &= Q [V_1(A) + V_2(A) - V_1(B) - V_2(B)] \\ &= KqQ \left[\frac{8}{b} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{8}{(a^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{1}{b} \right] \\ &= KqQ \left[\frac{9}{b} - \frac{9}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \right] . \end{aligned}$$

Si tenemos ahora en cuenta que $b = a/\sqrt{3}$, la expresión anterior puede escribirse como

$$W = 9KqQ \left[\frac{\sqrt{3}}{a} - \frac{1}{a(1+1/3)^{1/2}} \right] = \frac{9KqQ}{a} \left[\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{9\sqrt{3}}{2} \frac{KqQ}{a} .$$

Actividad 1.5:

- ¿Podemos afirmar que el trabajo realizado por *cualquier* fuerza para desplazar una partícula entre dos puntos es menos el cambio de la energía potencial? Justifique su respuesta.
- ¿Podemos afirmar que el trabajo realizado por *cualquier* fuerza para desplazar una partícula entre dos puntos es el cambio de la energía cinética? Justifique su respuesta.
- ¿Es la Ec. (1.39) una definición de la energía potencial de una carga puntual en un campo electrostático? ¿Puede aplicarse la expresión anterior al caso de una distribución arbitraria de cargas? Justifique su respuesta.
- ¿Se conserva siempre la energía mecánica de una distribución arbitraria de cargas en un campo electrostático? Justifique su respuesta.
- Describa algunas razones por las que la conservación de la energía mecánica resulta tan útil.

**EJEMPLO 1.7 Energía de una carga q en el interior de un condensador plano**

Si entre las placas de un condensador plano se establece una diferencia de potencial V_0 (ver figura adjunta), entonces el campo en el interior del condensador será

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{y}.$$

Dado que el potencial es la integral de camino del campo eléctrico, esto es,

$$\int_0^y \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(0) - V(y)$$

y como $V(0) = V_0$, se tiene que

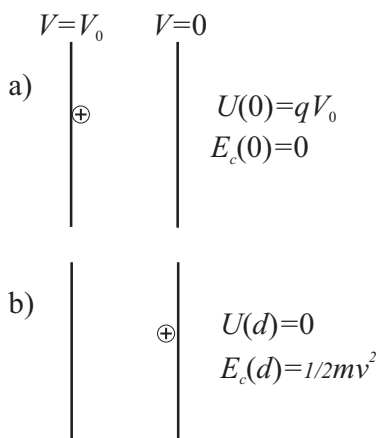
$$V(y) = V_0 - \int_0^y E(y) dy = V_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right).$$

La energía potencial, $U(y)$, de una carga q en el interior del condensador será por tanto

$$U(y) = qV_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right).$$

Una partícula de carga positiva que parta del reposo ($E_c = 0$) en la placa del condensador a potencial V_0 , se desplazará hacia zonas de menor energía potencial a la vez que irá aumentando su energía cinética. Debido a la conservación de su energía mecánica, la energía cinética al llegar a la otra placa, según (1.40), toma un valor de

$$E_c(d) = \frac{1}{2}mv^2 = qV_0,$$



por lo que la partícula adquirirá una velocidad al llegar a dicha placa dada por

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}. \quad (1.41)$$

El hecho de que una diferencia de potencial entre dos electrodos aumente la energía cinética de las cargas es usado muy a menudo para acelerar partículas cargadas. En la práctica, la placa final puede ser sustituida por una rejilla metálica que deje pasar las partículas.

1.4. Conductores en un campo electrostático

Es bien conocido que la materia está formada por partículas elementales cargadas y neutras. Las partículas de carga positiva (protones) forman parte de los núcleos de los átomos y por consiguiente están *fijas* en promedio en los sólidos. En ciertos materiales llamados **dieléctricos**, las cargas negativas (electrones) pueden considerarse igualmente *fijas*. No obstante, en otros materiales denominados **conductores**, algunos de los electrones no están ligados a átomos en particular sino que forman una especie de “gas de electrones” que vaga por todo el sólido. En esta sección consideraremos un modelo ideal de conductor en el cual existen *infinitas* cargas móviles que pueden desplazarse libremente. Dicho modelo se denominará **conductor perfecto**.

1.4.1. Campo eléctrico de un conductor cargado en equilibrio electrostático

En general, los conductores aparecen de forma natural como sistemas neutros (igual número de cargas negativas que positivas). No obstante, añadiendo o quitando cargas libres al conductor, éste quedará *cargado*. Si se define **equilibrio electrostático** como aquella situación en la que todas las cargas libres están en *reposo*, y se tiene en cuenta la definición de conductor perfecto dada anteriormente, podemos derivar las siguientes conclusiones acerca del campo eléctrico:

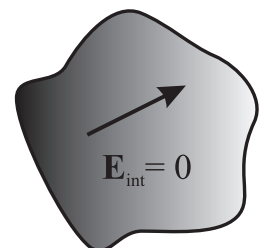
- **El campo eléctrico es nulo en el interior del conductor.**

Si el campo eléctrico no fuese nulo en el interior del conductor daría lugar a movimientos de las cargas libres, lo cual estaría en contradicción con la condición de equilibrio electrostático.

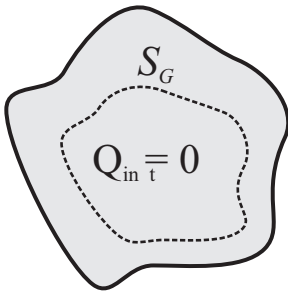
Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, al calcular la integral de camino del campo entre dos puntos *A* y *B* en el interior del conductor obtenemos que

$$\int_A^B \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B) = 0 \Rightarrow V \equiv \text{Cte}, \quad (1.42)$$

esto es, el conductor es **equipotencial** y en particular la superficie del mismo es una *superficie equipotencial*.



Conductor es equipotencial



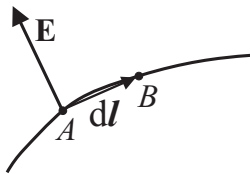
■ **La carga en exceso se localiza en la superficie del conductor.**

Si el campo en *todos* los puntos del interior del conductor *cargado* es nulo es porque no existe carga neta en el interior.

Este hecho puede también justificarse utilizando la ley de Gauss. Si existiese carga neta en el interior, eligiendo una superficie de Gauss que la envolviese, el flujo del campo eléctrico a través de la misma sería proporcional a la carga encerrada. Esto estaría en contradicción con el hecho de que el flujo debe ser cero puesto que el campo en el interior es nulo. Por tanto, la carga en exceso debe localizarse en la superficie.

■ **El campo eléctrico en la superficie es normal a ésta y de valor σ/ϵ_0 .**

Dado que el potencial es constante en todo el conductor, para dos puntos cercanos A y B sobre la superficie se verificará que



$$dV = \lim_{A \rightarrow B} [V(A) - V(B)] = \lim_{A \rightarrow B} \Delta V = 0$$

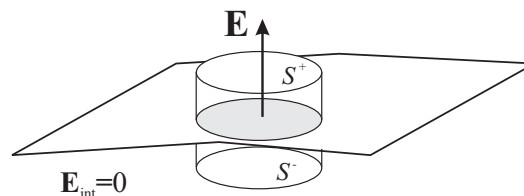
y, por tanto, se tiene que

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

donde $d\vec{l} \equiv \lim_{A \rightarrow B} \vec{AB}$. Esto implica que el campo en la superficie, \vec{E}_S es perpendicular a $d\vec{l}$ y, puesto que $d\vec{l}$ es tangente a la superficie, podemos concluir que

$$\vec{E}_S = E\hat{n}. \quad (1.43)$$

(*) Si se aplica ahora la ley de Gauss a una superficie en forma cilíndrica



tal como muestra la figura, se tiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0},$$

de donde obtenemos finalmente que

$$\vec{E}_S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}. \quad (1.44)$$

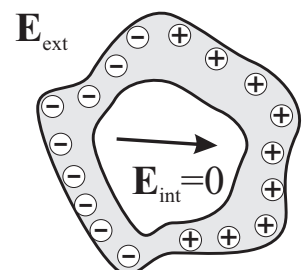
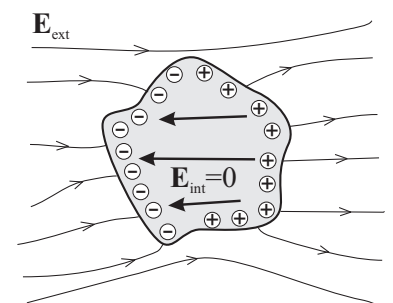
Actividad 1.6:

- Todos los electrones de un conductor perfecto tienen la libertad de moverse dentro de los límites geométricos de dicho conductor. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- En los materiales dieléctricos se forma una nube de electrones por la contribución de ciertos electrones de cada átomo del material. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- ¿Bajo qué condiciones el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo?
- Si un conductor está cargado, el campo eléctrico en su interior puede ser no nulo. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- En un conductor neutro, el campo eléctrico en los puntos de su superficie es normal a dicha superficie. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- Halle el valor del campo eléctrico y el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio creado por un conductor esférico de radio R cargado con una carga neta Q .
- Halle los valores del potencial y campo eléctrico en todos los puntos del espacio creados por una distribución de carga consistente en una carga puntual q localizada en el origen de coordenadas y una esfera cargada superficialmente con una carga Q y cuyo centro está en $(0, 2R, 0)$.

1.4.2. Conductor neutro en un campo eléctrico externo

Si un conductor inicialmente descargado (esto es, con una compensación perfecta de cargas eléctricas positivas y negativas) se somete al efecto de un campo eléctrico externo, la carga móvil del conductor se redistribuye de manera que se establezca la condición de equilibrio electrostático $\vec{E}_{\text{int}} = 0$. (Este proceso ocurre típicamente en un tiempo del orden de 10^{-14} s para un conductor de cobre.) La redistribución de la carga provoca la aparición de una densidad superficial inhomogénea de carga que a su vez da lugar a un campo en el interior del conductor que anula justamente al campo externo, provocando así la anulación punto a punto del campo total en el interior.

Es interesante observar que el proceso de redistribución de carga fruto del equilibrio electrostático puede considerarse como si ocurriese únicamente en la superficie, sin que eso implicase cambio alguno en el interior del conductor. Es más, si parte del material conductor del interior es extraído, con la consiguiente aparición de un hueco, se daría la misma redistribución de carga en la superficie *exterior* del conductor y, por tanto, el campo segui-



ría siendo nulo en todo el interior del conductor, incluyendo al hueco.¹ Esto quiere decir que para un conductor con un hueco, el interior está completamente *aislado* del exterior y, en consecuencia, los campos del exterior no afectarían a un dispositivo sensible al campo eléctrico (por ejemplo, circuitos electrónicos) situado en el interior del conductor. Este fenómeno se usa para diseñar **jaulas de Faraday** que aislen los sistemas eléctricos. Una simple carcasa metálica (o un plástico conductor) aislaría, por ejemplo, los sistemas electrónicos del interior de un ordenador con respecto a posibles influencias eléctricas externas.

Actividad 1.7:

- Los materiales dieléctricos se usan para aislar eléctricamente a dispositivos sensibles a las interferencias eléctricas externas. ¿Verdadero o Falso? Justifique su respuesta.
- Describa algunas razones que expliquen la *inhomogeneidad* de la distribución de carga en la superficie de un conductor sometido a un campo eléctrico externo.
- Si un conductor tiene dos huecos en su interior. ¿Estarán ambos huecos eléctricamente aislados de posibles interferencias eléctricas externas? ¿Y entre ellos? Justifique su respuesta.

1.5. Condensadores

1.5.1. Capacidad de un conductor

Si se añade cierta carga Q a un conductor inicialmente descargado, esta carga se redistribuye en la superficie del conductor creando una densidad de carga superficial σ y consecuentemente un potencial, V , cuyo valor viene dado por la siguiente integral:

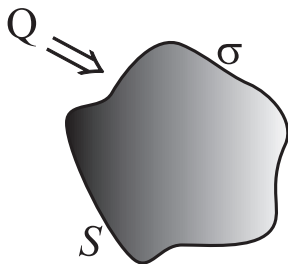
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}, \quad P \in S. \quad (1.45)$$

El principio de superposición nos dice que, si se aumenta la carga total, $Q = \int \sigma dS$, en un factor β , este hecho simplemente se traduzca en un

¹ Una manera alternativa de comprobar que el campo es nulo en el interior pasa por notar que la integral de camino del campo eléctrico entre dos puntos arbitrarios, A y B , situados en la superficie interna del hueco será nula,

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

debido a que dicha superficie es una *equipotencial*. La única manera de que se verifique la anterior expresión para puntos arbitrarios es que el campo eléctrico en el interior del hueco sea nulo.



aumento proporcional de la densidad superficial de carga; esto es, si

$$Q \longrightarrow Q' = \beta Q \Rightarrow \sigma(S) \longrightarrow \sigma'(S) = \beta\sigma(S)$$

podemos concluir que

$$V \longrightarrow V' = \beta V .$$

En la situación descrita anteriormente, encontramos que el cociente entre la carga y el potencial es siempre el mismo,

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} \equiv \frac{\beta Q}{\beta V} ,$$

lo que implica que la relación entre la carga y el potencial en un conductor es una magnitud independiente de los valores concretos de Q y V . Esta magnitud se conoce como **capacidad**, C , del conductor y se define como

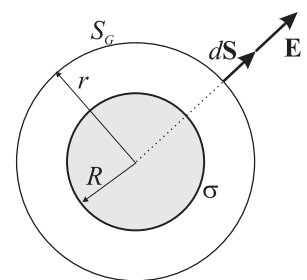
$$C = \frac{Q}{V} . \quad (1.46)$$

La capacidad del conductor determina la carga que este "adquiere" para un potencial dado; es decir, a mayor capacidad mayor carga, siendo C un *parámetro puramente geométrico* que sólo depende de la forma del conductor.

La unidad de capacidad es el **faradio** (F), definida en el sistema internacional como $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Capacidad de un conductor

Unidad de capacidad:
1 faradio(F)



EJEMPLO 1.8 (*) Capacidad de un conductor esférico de radio R

Por simetría esférica, el campo en el exterior del conductor será del tipo $\vec{E} = |\vec{E}(r)|\hat{r}$ y, por consiguiente, al aplicar la ley de Gauss a una superficie esférica concéntrica con el conductor se obtiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.47)$$

$$|\vec{E}(r)| \oint dS = |\vec{E}(r)| 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.48)$$

de donde se obtiene que el campo en el exterior del conductor es

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (1.49)$$

El potencial en un punto arbitrario se obtiene como

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \end{aligned}$$

por lo que en la superficie de la esfera, el potencial será simplemente

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.50)$$

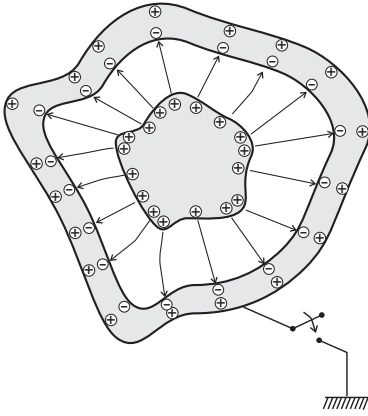
y la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (1.51)$$

Como puede verse, la capacidad sólo depende de la geometría (el radio) de la esfera conductora.

Si el radio de la esfera fuese $R = 1\text{m}$, la capacidad del conductor sería

$$C \approx 111 \times 10^{-12} \text{ F} \equiv 111 \text{ pF}.$$



Condensador: sistema de dos conductores en influencia total

1.5.2. Influencia entre conductores

Si un conductor cargado con una carga Q , que suponemos positiva, se introduce en el hueco interior de otro conductor inicialmente descargado, esto origina una redistribución de cargas en el conductor inicialmente neutro (ver figura). Esta redistribución es consecuencia del establecimiento de la condición de equilibrio electrostático en ambos conductores ($\vec{E}_{\text{int}} = 0$). Si la superficie exterior del conductor neutro se conecta a tierra (almacén infinito de cargas libres), suben tantos electrones desde tierra como sean necesarios para compensar las cargas positivas, dando lugar todo este proceso a la aparición de una carga neta $-Q$ en dicho conductor.

La situación anterior se conoce como *influencia total* dado que los dos conductores tienen la misma carga pero de signo contrario. Todas las líneas de campo que parten de un conductor acaban en el otro. (Esta situación se encuentra estrictamente en la práctica cuando un conductor está encerrado en el interior de otro). Dos conductores en influencia total forman un sistema que se conoce como **condensador**, definiéndose la capacidad de un condensador como

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad (1.52)$$

donde Q es el valor de la carga en módulo de cualquiera de los dos conductores y ΔV es la diferencia de potencial en módulo existente entre los dos conductores.

Algunos ejemplos típicos de condensadores se presentan a continuación:

■ (*) Condensador esférico

Para calcular la diferencia de potencial entre los dos conductores esféricos se parte de la expresión del campo en la zona intermedia entre los dos conductores, donde

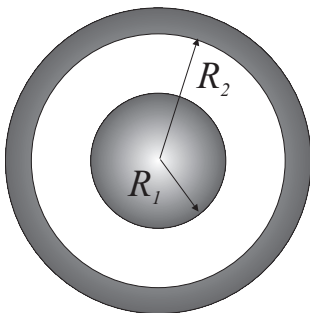
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

La capacidad del sistema viene entonces dada a partir de (1.52) por

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.53)$$



Es interesante notar que la capacidad del *condensador* esférico puede llegar a ser mucho más grande que la de un *conductor* esférico del mismo tamaño, dado que

$$\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} > R_1 .$$

■ Condensador de placas paralelas

Para calcular la diferencia de potencial entre las placas paralelas, este condensador se tratará suponiendo que las dimensiones de dichas placas son mucho mayores que la distancia entre ellas y, por tanto, éstas se modelarán por dos planos infinitos cargados. Teniendo en cuenta la expresión (1.27) para el campo producido por un plano cargado uniformemente, en el caso de dos planos infinitos cargados con distinta polaridad, por superposición se tiene que

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}, & \text{si } 0 < y < d \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.54)$$

Obsérvese que el campo eléctrico es uniforme en el interior del condensador y nulo fuera de éste. El condensador plano suele usarse generalmente para producir campos uniformes e intensos.

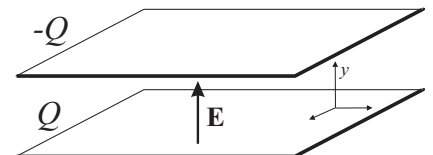
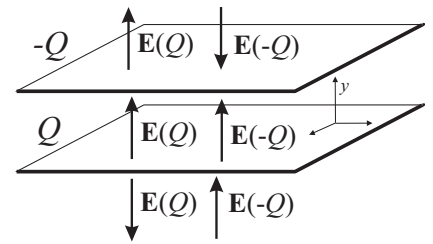
Para calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador, se procede realizando la integral de camino del campo eléctrico dado por (1.54) entre una y otra placa. Dado que el campo eléctrico es *uniforme*, puede escribirse que

$$\Delta V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = |\vec{E}|d \quad (1.55)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} d . \quad (1.56)$$

Puesto que la carga de cada uno de las placas *finitas* viene dada por $Q = \sigma S$, la capacidad del condensador de placas paralelas será muy aproximadamente

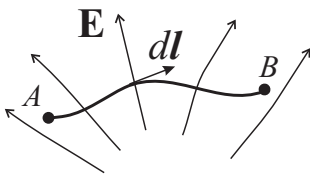
$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} . \quad (1.57)$$



Capacidad de un condensador de placas paralelas

Actividad 1.8:

- Dos conductores, un cubo y una esfera, tienen la misma carga y voltaje. ¿Pueden tener la misma capacidad? Justifique su respuesta. Si su respuesta es afirmativa, explique cómo es ello posible.
- Explique la diferencia entre la “capacidad de un conductor” y la “capacidad de un condensador.”
- ¿Qué características relevantes tiene la capacidad de un condensador de placas plano-paralelas?
- ¿Cómo incrementaría la capacidad de un condensador plano dado?

1.6. Energía Electrostática**1.6.1. Trabajo para trasladar una carga puntual**

En una región del espacio donde existe un campo \vec{E} , planteemos la siguiente cuestión: ¿cuál es el trabajo necesario para mover una carga prueba puntual Q desde un punto A a un punto B ? La respuesta a esta pregunta nos la proporciona el cálculo de la integral de camino de la fuerza *externa* ejercida sobre la carga entre ambos puntos, esto es,

$$W = \int_A^B \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l}. \quad (1.58)$$

Dado que la fuerza que ejerce el sistema de cargas sobre la carga prueba es de tipo electrostático y puede expresarse según (1.5) en función del campo eléctrico, la fuerza externa *mínima* que debemos ejercer nosotros para poder desplazar la carga deberá ser justamente la que contrarreste a la fuerza electrostática; esto es, $\vec{F}_{\text{ext}} = -Q\vec{E}$ (si hiciéramos una fuerza mayor aumentaríamos la energía cinética de la carga, lo cual no es necesario para trasladar la carga de $A \rightarrow B$). Por tanto, la expresión del trabajo viene dada por

$$W = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q [V(B) - V(A)] \quad (1.59)$$

que, obviamente, es independiente del camino debido a las propiedades ya discutidas de la integral de camino del campo eléctrico.

Teniendo en cuenta la definición de energía potencial dada en (1.39), la expresión (1.59) para el trabajo puede identificarse con el incremento de la energía potencial, ΔU , del sistema, es decir

$$W = \Delta U. \quad (1.60)$$

Es interesante observar que la expresión (1.59) ofrece la posibilidad de interpretar la diferencia de potencial entre dos puntos como el trabajo por

unidad de carga que debemos ejercer para desplazar una partícula cargada entre dichos puntos. En el caso de que la partícula venga desde el infinito (donde usualmente se supone que está el origen cero de potencial), el trabajo que debemos realizar para situar la partícula en el punto P puede expresarse como

$$W = Q [V(P) - V(\infty)] = QV(P). \quad (1.61)$$

Ahora podemos observar claramente que

el *potencial* eléctrico puede identificarse con la *energía* potencial (trabajo para crear el sistema) *por unidad de carga*.

1.6.2. Energía en un condensador de placas paralelas

Para obtener una expresión general de la energía electrostática de un sistema arbitrario de cargas se analizará el caso particular del proceso de carga de un condensador de placas paralelas para después generalizar (sin demostración) las expresiones que se obtengan a cualquier sistema.

En el proceso de carga de un condensador plano (inicialmente los dos conductores son neutros), el efecto de la batería conectada a las placas del condensador será el de extraer carga negativa de una de las placas y transferirla a la otra, de modo que ambas placas se van cargando dando lugar a la *aparición de un campo eléctrico entre las placas* y, consecuentemente, a una diferencia de potencial, $V(q) = q/C$, que va creciendo en el proceso.

Para aumentar en un dq la carga sobre el condensador, la batería debe realizar un trabajo diferencial que a partir de (1.59) (adaptando la expresión válida para cargas puntuales a cargas diferenciales) podrá expresarse como

$$dW = dq\Delta V. \quad (1.62)$$

Si ahora consideramos que $\Delta V \equiv V(q) = q/C$, entonces el trabajo diferencial podrá expresarse como

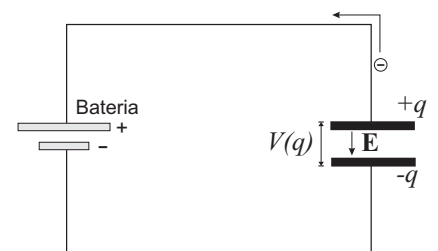
$$dW = \frac{q dq}{C}. \quad (1.63)$$

Según (1.60) este trabajo equivale justamente al aumento de la energía potencial electrostática del condensador, esto es: $dW \equiv dU$. Para cargar el condensador con una carga final Q , el trabajo total realizado (o equivalentemente el aumento total de la energía potencial del sistema) se obtendrá al integrar la expresión (1.63), de modo que

$$W \equiv \Delta U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.64)$$

Dado que el aumento de la energía potencial del sistema es precisamente la *energía almacenada* en el condensador, podemos identificar esta ganancia de energía potencial con la **energía electrostática** del sistema, U_E , por lo que podemos escribir que

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV. \quad (1.65)$$



En el caso particular del condensador plano, se encontró que

$$V = |\vec{E}|d \quad \text{y} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

por lo que al introducir estas expresiones en (1.65) obtendremos

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} |\vec{E}|^2 d^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Si se define la **densidad de energía en un campo electrostático**, u_E , como la energía eléctrica por unidad de volumen; es decir,

$$dU_E = u_E d\mathcal{V}, \quad (1.67)$$

de la expresión (1.66) se deduce que la densidad de energía eléctrica en el condensador plano viene dada por

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2. \quad (1.68)$$

Es interesante observar que la energía electrostática del condensador plano puede expresarse tanto en términos de la carga, expresión (1.65), como del campo eléctrico, expresión (1.66). Estas dos expresiones dan cuenta de la posible ambigüedad que encontramos al definir dónde se almacena la energía potencial del sistema. Según la expresión (1.65), esta energía estaría almacenada en las cargas y según la expresión (1.66) estaría asociada al campo eléctrico. Aunque considerar que la energía está en el campo pudiera parecer “artificial”, esta concepción es la más conveniente para situaciones más generales². Antes de que existiera campo eléctrico entre las placas, la energía electrostática en esa región del espacio era cero y después, cuando se ha establecido un campo eléctrico, la energía alcanza cierto valor. Por tanto, parece congruente asociar la energía potencial electrostática con la presencia del campo eléctrico.

Aunque el resultado (1.68) se ha obtenido para un caso *particular*, cálculos más elaborados demuestran que este mismo resultado coincide con la expresión *general* válida para la densidad de energía electrostática de cualquier sistema cargado. En consecuencia, la energía electrostática de un sistema puede escribirse como

Energía electrostática

$$U_E = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} d\mathcal{V}. \quad (1.69)$$

² Por ejemplo, al estudiar la energía asociada a una onda electromagnética (ver Tema 6)

EJEMPLO 1.9 (*) Energía electrostática de una esfera conductora.

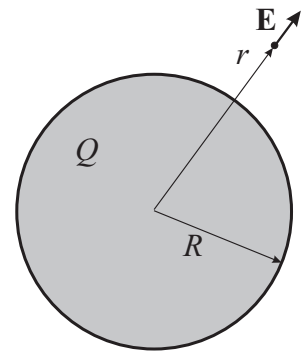
El módulo del campo en el exterior de la esfera conductora con carga Q viene dado por

$$|\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq R.$$

Antes de calcular la energía de este sistema aplicando la expresión (1.69) debemos calcular $d\mathcal{V}$. Para ello tengamos que cuenta que dado el volumen total de una esfera de radio r viene dado por $\mathcal{V} = 4/3\pi r^3$, por lo que el volumen diferencial $d\mathcal{V} = (d\mathcal{V}/dr)dr$ puede escribirse como $d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$. La energía de la esfera conductora de radio R será por tanto

$$U_E = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

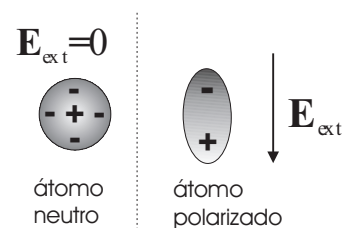


Actividad 1.9:

- Explique las razones por las que el incremento de energía potencial en el proceso de carga de un condensador viene dada por $\Delta\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}QV$ en vez de simplemente $\Delta\mathcal{E}_p = QV$.
- ¿Por qué es más conveniente asociar la energía electrostática con el campo eléctrico en vez de con la carga y el potencial?

1.7. Dieléctricos

Hasta ahora sólo hemos venido estudiando los diferentes fenómenos electrostáticos en el vacío o bien en conductores perfectos. En este sentido, al estudiar, por ejemplo, el campo creado por una carga puntual en el Apartado 1.2.3 suponíamos que no existía medio material alguno en el espacio que rodeada a la carga puntual. Para introducir el efecto de un posible medio material no conductor en esta ley, debemos considerar que estos medios denominados *dieléctricos* (ver Apartado 1.4) están formados por átomos/moléculas neutros eléctricamente donde el centro de las cargas positivas (protones) coincide con el de las cargas negativas (electrones). No obstante, bajo la influencia de un campo eléctrico externo, el centro de las cargas negativas puede desplazarse con respecto al de las positivas, es decir los átomos/moléculas constitutivos del medio material pueden *polarizarse*. Este fenómeno de **polarización** dará lugar a un nuevo campo eléctrico de polarización que se opondrá al campo original, manifestándose este efecto globalmente en que el campo original queda parcialmente reducido, como si fuese originado por una carga puntual de menor cuantía.



El mismo efecto global anterior se produciría igualmente en un condensador plano, donde se observa experimentalmente que la introducción de un material dieléctrico homogéneo e isótropo entre sus placas aumenta la capacidad de dicho condensador en cierta constante que depende exclusivamente del material. Para entender este efecto observemos el condensador *descargado* de la Fig. 1.1(a), entre cuyas placas se ha colocado cierto mate-

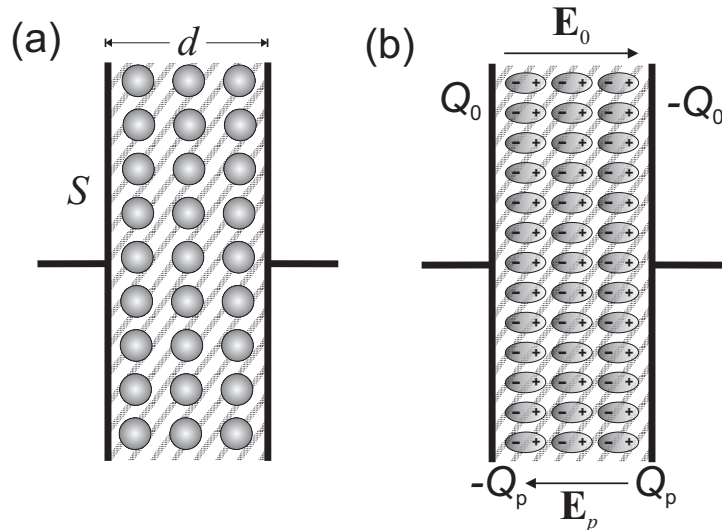


FIGURA 1.1: (a) Condensador descargado entre cuyas placas existe un material dieléctrico. (Las esferas representan los átomos neutros constituyentes del dieléctrico.) (b) Condensador cargado con una carga Q_0 que es contrarrestada por una carga Q_p proveniente de la polarización de los átomos constituyentes del dieléctrico.

rial dieléctrico (madera, papel, agua, plástico,...). Si ahora este condensador es cargado con una carga Q_0 en una placa (y $-Q_0$ en la otra), entonces aparecerá un cierto campo \vec{E}_0 entre las placas del condensador. Este campo eléctrico provocará la polarización de los átomos del material dieléctrico dando lugar a una situación microscópica tal como la descrita en la Fig. 1.1(b). Observemos que en el interior del material dieléctrico las cargas positivas y negativas se compensarán mutuamente, quedando sin embargo una carga descompensada de valor Q_p justamente en los extremos del material adyacentes a las placas del condensador. Esta carga originará un campo eléctrico \vec{E}_p que al superponerse al campo original \vec{E}_0 da lugar a un nuevo campo \vec{E} , cuyo módulo puede expresarse como

$$|\vec{E}| = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \quad (1.70)$$

donde ϵ_r es una constante adimensional positiva mayor que la unidad ($\epsilon_r \geq 1$) que dependerá del material y que se conoce como **permitividad relativa del material**.

Si la capacidad del condensador de placas paralelas en vacío (es decir, sin material dieléctrico entre sus placas) venía dada por

$$C_0 = \frac{Q_0}{V_0} = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

(siendo $V_0 = E_0 d$ la diferencia de potencial entre las placas), podemos observar que al introducir el material dieléctrico se reduce el valor del campo entre las placas del condensador y, en consecuencia, también se reducirá la diferencia de potencial entre las mismas, que vendrá ahora dada por

$$V = |\vec{E}|d = \frac{V_0}{\epsilon_r} . \quad (1.71)$$

Dado que la introducción del dieléctrico no modifica la cantidad de carga inicial depositada en las cargas (la carga en el material dieléctrico aparece en los bordes de éste, no en las placas metálicas), tenemos que la capacidad del condensador con dieléctrico será

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\epsilon_r} = \epsilon_r C_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} , \quad (1.72)$$

explicándose así el aumento de capacidad del condensador observado experimentalmente.

Observemos además que, globalmente, el efecto de introducir el material dieléctrico homogéneo e isótropo ha quedado reflejado en la sustitución de

$$\epsilon_0 \longleftrightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \quad (1.73)$$

en la expresión de la capacidad. De este modo podemos escribir que la capacidad de un condensador de placas paralelas viene dada por

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \quad (1.74)$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.75)$$

Permitividad dieléctrica

es la **permitividad dieléctrica** del material.

Se cumplirá que $\epsilon \geq \epsilon_0$, siendo la permitividad relativa de algunos materiales usuales la siguiente:

Material	Permitividad relativa (ϵ_r)
Vacío	1
Aire	1.00059
Agua (20°C)	80
Papel	3.7
Porcelana	7
Vidrio	5.6
Neopreno	6.9
Poliestireno	2.55

Podemos observar que la permitividad relativa del aire es muy próxima a la del vacío. Esto hace que, a efectos prácticos, consideremos que el comportamiento eléctrico del aire es equivalente al del vacío.

La anterior discusión sobre el efecto de la inclusión de dieléctricos homogéneos e isótropos en condensadores planos podría extenderse al estudio de otras magnitudes y situaciones, obteniéndose que las expresiones

Energía electrostática en un medio material

obtenidas anteriormente en este tema para el vacío quedan simplemente modificadas por la sustitución de la permitividad dieléctrica del vacío por la correspondiente permitividad dieléctrica del material. Así obtendríamos, por ejemplo, que la densidad de energía eléctrica de una región del espacio donde hay un material dieléctrico de permitividad ϵ vendrá dada por

$$U_E = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon |\vec{E}|^2}{2} dV. \quad (1.76)$$

Actividad 1.10:

- Escriba la ley de Coulomb para cargas puntuales sumergidas en agua (dieléctrico homogéneo).
- Describa los efectos principales que surgen al tener dos cargas sumergidas en agua.
- Dé las razones físicas que expliquen los anteriores efectos.
- Para un voltaje dado entre las placas de un condensador plano, deduzca si la introducción de un dieléctrico entre dichas placas aumenta o disminuye la carga almacenada en las placas.
- Deduzca la expresión de la capacidad total C de un conductor formada por la asociación de dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 cuando estos se conectan en serie y en paralelo.

1.8. Problemas propuestos

1.1: Calcule la fuerza de repulsión electrostática entre dos partículas α (cada partícula α está compuesta por dos protones) y compárela con la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas (para el protón: $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $q = 1,60 \times 10^{-19}$ C).

Sol. $F_{\text{elect}} \approx 3 \times 10^{35} F_{\text{grav}}$.

1.2: ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en un punto situado a 30 cm de una carga puntual de $10 \mu\text{C}$.

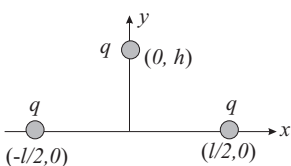
Sol. $E = 10^6$ N/C.

1.3: Dos cargas puntuales iguales de valor q están situadas en los puntos $(-a, 0, 0)$ y $(a, 0, 0)$. Calcular el potencial y el campo eléctrico debido a dichas cargas en los puntos del eje Y .

Sol: $V(0, y, 0) = [q/(2\pi\epsilon_0)](y^2 + a^2)^{-1/2}$, $\vec{E}(0, y, 0) = [q/(2\pi\epsilon_0)]y(y^2 + a^2)^{-3/2} \hat{y}$.

1.4: Tres cargas puntuales de igual valor, q , se encuentran dispuestas en los vértices de un triángulo, como se indica en la figura. Calcúlese: **a)** el campo eléctrico y el potencial generado por las tres cargas en puntos del segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, h)$; **b)** la fuerza ejercida por las dos cargas que se encuentran sobre el eje X sobre la carga situada en $(0, h)$.

Sol: **a)** $V(0, y) = Kq[2((l/2)^2 + y^2)^{-1/2} + (h - y)^{-1}]$, $\vec{E}(0, y) = Kq[2y((l/2)^2 + y^2)^{-3/2} - (h - y)^{-2}] \hat{y}$.
b) $\vec{F} = Kq^2 2h[(l/2)^2 + h^2]^{-3/2} \hat{y}$.



1.5: Las cuatro cargas del dibujo están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L . **a)** Hallar el valor, sentido y dirección de la fuerza ejercida sobre la carga situada sobre el vértice inferior izquierdo por las cargas restantes. **b)** Demostrar que el campo eléctrico total en el punto medio de cualquiera de los lados del cuadrado es paralelo al lado considerado, está dirigido hacia la carga negativa vértice de dicho lado y su valor es $E = [2q/(\pi\epsilon_0 L^2)](1 - \sqrt{5}/25)$ N/C.

Sol.: **a)** $\vec{F} = [q^2/(4\pi\epsilon_0 L^2)](1 - 1/\sqrt{8})(\hat{x} + \hat{y})$ N.

1.6: El potencial electrostático en cierta región del espacio está dado por $V = 2x^2 - y^2 + z^2$, donde x, y, z se expresan en metros y V en voltios. Determinar: **a)** la componente del campo eléctrico en el punto $(1, 2, 3)$ a lo largo de la dirección dada por la recta que pasa por dicho punto y por el punto $(3, 5, 0)$ [Nota: Tenga en cuenta que $\vec{E} = -(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)$]; **b)** el trabajo que realizaría el campo sobre una carga puntual $q = 2$ C que se desplazase desde el punto $(1, 2, 3)$ hasta el $(3, 3, 3)$.

Sol.: **a)** $\sqrt{22}$ N/C; **b)** -22 J.

1.7: Sobre los planos $x = 0$ y $x = 4$ existen densidades de carga de valor $\sigma_1 = 10^{-8}$ C/m² y $\sigma_2 = -10^{-8}$ C/m² respectivamente. Determinar: **a)** la fuerza que actúa sobre una carga puntual $q = 1$ pC situada en el punto $(1, 0, 0)$; **b)** el trabajo realizado por el campo para transportar dicha carga hasta el punto $(3, 2, 0)$; **c)** la d.d.p. entre los puntos $(1, 0, 0)$ y $(8, 0, 0)$.

Sol.: **a)** $36\pi \cdot 10^{-11}$ N; **b)** $72\pi \cdot 10^{-11}$ J; **c)** 1080π V.

1.8: Una gota de aceite cargada de masa $2,5 \times 10^{-4}$ g está situada en el interior de un condensador de placas paralelas de área 175 cm². Cuando la placa superior tiene una carga de $4,5 \times 10^{-7}$ C, la gota de aceite permanece estacionaria. ¿Qué carga tiene esta gota?

Sol. $Q = 8,43 \times 10^{-13}$ C.

1.9: (*) Determinar el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del espacio en dos casos: **a)** Esfera conductora de radio R y carga Q ; **b)** Esfera no conductora de radio R con densidad volumétrica de carga uniforme de valor ρ (nota: elegir potencial cero en el infinito en ambos casos).

Sol.: **a)** $r > R$: $\vec{E}(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{r}$, $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$; $r < R$: $\vec{E} = 0$, $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$; **b)** $r > R$: $\vec{E}(r) = R^3 \rho/(3\epsilon_0 r^2) \hat{r}$, $V(r) = R^3 \rho/(3\epsilon_0 r)$; $r < R$: $\vec{E}(r) = r\rho/(3\epsilon_0) \hat{r}$, $V(r) = \rho(R^2 - r^2/3)/(2\epsilon_0)$.

1.10: (*) Una esfera no conductora de radio R tiene una densidad volumétrica de carga $\rho = Ar$, donde A es una constante y r la distancia al centro de la esfera. Determinar: **a)** la carga total de la esfera (considere que el diferencial de volumen viene dado por $dV = 4\pi r^2 dr$); **b)** el campo eléctrico y el potencial en cualquier punto del espacio (nota: elegir potencial cero en el infinito).

Sol.: **a)** $Q = \pi AR^4$; **b)** $r \leq R$: $\vec{E}(r) = Ar^2/(4\epsilon_0) \hat{r}$, $V(r) = -Ar^3/(12\epsilon_0) + AR^3/(3\epsilon_0)$; $r > R$: $\vec{E}(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{r}$, $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$.

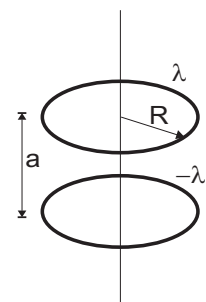
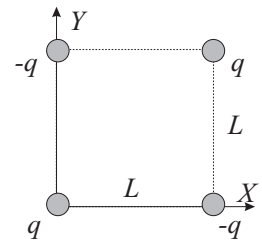
1.11: (*) Demuestre que el campo eléctrico fuera de un conductor cilíndrico rectilíneo de radio R , longitud infinita y densidad de carga superficial σ es equivalente al campo debido a una línea infinita cargada con la misma cantidad de carga por unidad de longitud (es decir, si $\lambda = 2\pi R\sigma$).

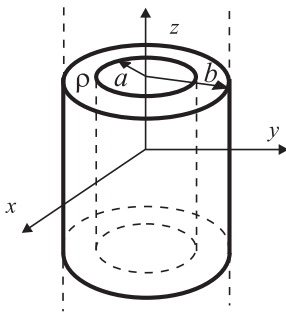
1.12: (**) Determinar el potencial y el campo eléctrico en el eje de un anillo circular de radio R con una densidad de carga lineal uniforme λ que está situado en el plano XY y tiene su centro en el origen de coordenadas.

Sol.: $V(0, z, 0) = [\lambda/(2\epsilon_0)]R(z^2 + R^2)^{-1/2}$, $\vec{E}(0, z, 0) = [\lambda/(2\epsilon_0)]Rz(z^2 + R^2)^{-3/2} \hat{z}$.

1.13: (**) Dos anillos circulares de radio R coaxiales y con sus centros separados una distancia a están cargados con densidades de carga lineal λ y $-\lambda$ respectivamente. Hallar el trabajo que hay que realizar para situar una carga prueba, q , en los puntos siguientes: **a)** centro del anillo cargado positivamente; **b)** punto del eje equidistante de ambos anillos; **c)** centro del anillo cargado negativamente (nota: en los tres apartados, suponer que la carga q se trae desde el infinito al punto considerado).

Sol.: **a)** $W = [q\lambda/(2\epsilon_0)]\{1 - R(R^2 + a^2)\}$; **b)** $W = 0$; **c)** $W = [q\lambda/(2\epsilon_0)]\{R(R^2 + a^2) - 1\}$





1.14: ()** Un cilíndrico de longitud infinita y radio b con una cavidad cilíndrica en su interior de radio a posee una densidad volumétrica de carga ρ , según se indica en la figura. Calcúlese: **a)** la carga total del cilindro por unidad de longitud; **b)** el campo eléctrico en todos los puntos del espacio; **c)** la fuerza sobre una carga puntual, q , situada en el punto de coordenadas $(b, b, 0)$, así como la componente de dicha fuerza en la dirección dada por el unitario $\hat{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; **d)** la diferencia de potencial entre los puntos $(b, b, 0)$ y $(2b, 2b, 2b)$.

Sol: **a)** $\pi(b^2 - a^2)\rho$; **b)** si $r \leq a$ $\vec{E} = 0$, si $a < r \leq b$ $\vec{E} = \frac{(r^2 - a^2)\rho}{2r\epsilon_0} \hat{r}$, si $r > b$ $\vec{E} = \frac{(b^2 - a^2)\rho}{2r\epsilon_0}$

c) $\vec{F} = \frac{q(b^2 - a^2)\rho}{4\epsilon_0 b} (1, 1, 0)$, $\vec{F}_n = \frac{q(b^2 - a^2)\rho}{2\sqrt{3}\epsilon_0 b} \hat{n}$;

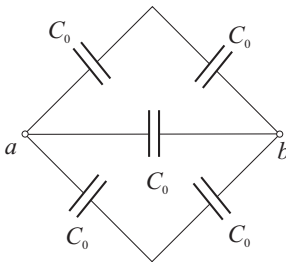
d) $V(b, b, 0) - V(2b, 2b, 2b) = (b^2 - a^2)\rho \frac{\ln 2}{2\epsilon_0}$.

1.15: **a)** ¿Cuál es la capacidad de un sistema de dos placas plano-paralelas de área 1 mm^2 separadas 1 mm ? **b)** ¿Cuánto trabajo realizaríamos para cargar el anterior condensador con una carga de 10^{-3} C ? **c)** ¿Cuál sería la fuerza entre las placas?

Sol: **a)** $C = 8,05 \text{ nF}$; **b)** $W = 62,1 \text{ J}$; **c)** $F = 5,65 \times 10^6 \text{ N}$.

1.16: **a)** ¿Qué cantidad de carga será necesario añadir a una esfera conductora aislada de radio $R_1 = 10 \text{ cm}$ para que ésta alcance un potencial de 500 V ? **b)** Si la anterior carga es compartida con otra esfera conductora *aislada* de radio $R_2 = 5 \text{ cm}$ de radio (ambas son conectadas mediante un fino hilo conductor), ¿cuál será la carga y el potencial final en cada esfera conductora?

Sol: **a)** $Q = 5,6 \times 10^{-9} \text{ C}$; **b)** $Q_1 = 3,74 \text{ nC}$, $Q_2 = 1,86 \text{ nC}$, $V_1 = V_2 \approx 336,6 \text{ V}$.



1.17: Cinco condensadores idénticos de capacidad C_0 están conectados en un circuito puente tal como indica la figura. **a)** ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos a y b ? **b)** Calcular la capacidad equivalente si la capacidad entre a y b cambia ahora a $10C_0$.

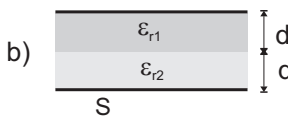
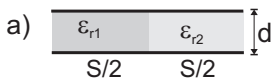
Sol: **a)** $C_{\text{equiv}} = 2C_0$; **b)** $C_{\text{equiv}} = 11C_0$;

1.18: Un condensador de $1 \mu\text{F}$ se ha cargado a 10 V . Determinese: **a)** la carga acumulada y el trabajo que fue necesario realizar; **b)** la densidad de energía eléctrica en el interior del condensador sabiendo que puede asimilarse a un condensador ideal de placas plano paralelas separadas una distancia de 10 cm ; **c)** el trabajo necesario para aumentar la carga del condensador al doble de la que posee. Compárese con el trabajo calculado en el apartado a) (**Dato:** $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$).

Sol: **a)** $Q = 10 \mu\text{C}$, $W = 5 \times 10^{-5} \text{ J}$; **b)** $\rho_E = 4,427 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3$; **c)** $W = 15 \times 10^{-5} \text{ J}$.

1.19: (*) Se consideran los condensadores planos esquematizados en la figura. Determinar la capacidad de cada uno de ellos.

Sol: **a)** $C = C_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})/2$; **b)** $C = C_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}/(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})$, siendo en ambos casos $C_0 = \epsilon_0 S/d$.



TEMA 2

Circuitos de Corriente Continua

2.1. Introducción

En el tema anterior se ha introducido la Electroestática como el estudio de la interacción entre cargas en *reposo*. No obstante, cabe señalar que, en general, la Electroestática puede aplicarse a situaciones en las que *la distribución de cargas permanece invariable en el tiempo*. El estudio de las cargas en *movimiento* se iniciará en el presente tema. Estas cargas en movimiento, o lo que es lo mismo, un flujo de partículas cargadas, dan lugar a una corriente eléctrica, de la misma manera que moléculas de agua en movimiento dan lugar a una corriente de agua.

En función del tipo de movimiento que lleven las cargas se clasificará la corriente eléctrica en corriente continua y corriente variable en el tiempo. La **corriente continua (CC)** es aquella en la que el flujo de cargas permanece invariable en el tiempo (por ejemplo, cuando los electrones en un cable se mueven a velocidad constante).¹ Cuando el flujo de cargas que varía en el tiempo lo hace de forma armónica (es decir con una variación temporal de tipo seno o coseno), entonces se denomina **corriente alterna (CA)**.

El objetivo final del presente tema será el análisis de los circuitos de corriente continua, tanto por su propia importancia en la tecnología actual como por ser un primer paso para el estudio y comprensión de los circuitos electrónicos más complejos. Los circuitos de corriente continua se resuelven a partir de las reglas de Kirchhoff, que serán deducidas en este tema como una consecuencia de las leyes de la Electroestática y de la ley de conservación de la carga. Tras la deducción de estas reglas, se hablará de las fuentes de alimentación de estos circuitos y, en particular, se discutirá el concep-

¹ Es interesante notar que si el flujo de cargas permanece invariable en el tiempo (corriente continua), esto implica que la carga por unidad de tiempo que atraviesa cualquier superficie no aumenta ni disminuye y, por tanto, la distribución de cargas permanece invariable en el tiempo. Esto implica que, a pesar de que las cargas se *muevan*, todavía se pueda seguir aplicando la Electroestática. No obstante, las cargas del *interior* del conductor generalmente no generan campo eléctrico dado que existe una compensación precisa entre cargas positivas y negativas.

to de fuerza electromotriz. Posteriormente se mostrarán algunos ejemplos y procedimientos para la resolución de circuitos de corriente continua. Finalmente, y como complemento al presente tema, discutiremos los transitorios de carga y descarga en condensadores. Aunque estos transitorios implican variaciones en el tiempo de la corriente, aquí se estudiará la situación intermedia entre dos estados que no dependen del tiempo.

2.2. Vector densidad de corriente

Una “medida” de la corriente eléctrica es proporcionada por la **intensidad** de la corriente, I . Esta magnitud se define como

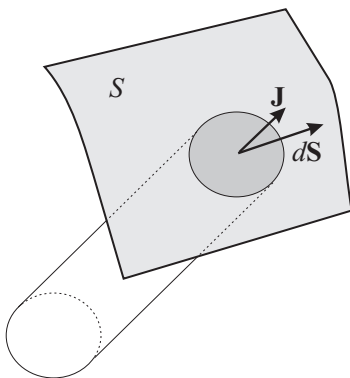
Intensidad de la corriente

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

esto es, la carga total por unidad de tiempo, Q , que atraviesa cierta superficie S . La unidad de intensidad de la corriente eléctrica en el S.I. es el **amperio (A)**, definido como

Unidad de intensidad:
1 amperio (A)

$$1 \text{ amperio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ segundo}} ; \quad 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} .$$



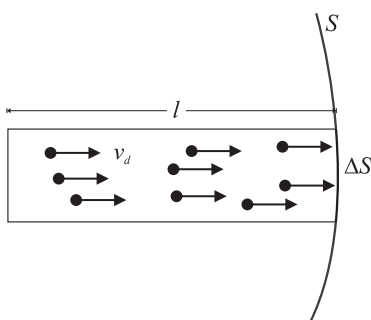
La definición de la intensidad de corriente como el ritmo temporal con que la carga atraviesa “cierta” superficie S establece una dependencia de esta magnitud con el flujo de carga a través de dicha superficie que debe especificarse. Este hecho sugiere la conveniencia de expresar la intensidad como el flujo de un vector (ver Apéndice A.2), que se denominará **vector densidad de corriente** \vec{J} , a través de una superficie S :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (2.2)$$

Evidentemente las unidades de \vec{J} son de intensidad partido por superficie, esto es: A/m^2 ; representando el módulo de esta magnitud la cantidad de carga que pasa por unidad de superficie y por unidad de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al flujo.

Para obtener una expresión explícita del vector densidad de corriente en función de las características del flujo de partículas cargadas, consideraremos la situación mostrada en la figura adjunta. En esta figura se muestra la contribución a la corriente, ΔI , de la parte de carga, ΔQ , que atraviesa el área ΔS (la carga por unidad de tiempo que atraviesa la superficie completa será I). Claramente, la carga que atraviesa ΔS en la unidad de tiempo Δt es aquella comprendida en un volumen de área transversal ΔS y de longitud l igual al recorrido de una de las cargas en el tiempo Δt ; siendo, por tanto, $l = |\vec{v}_a| \Delta t$, donde $|\vec{v}_a|$ es el módulo de la velocidad de arrastre de las partículas cargadas. Supuesto que existen n partículas cargadas móviles por unidad de volumen y que la carga de cada una de las partículas es q (luego la carga por unidad de volumen es nq), se tiene que

$$\Delta Q = nq \Delta V = nq \Delta S |\vec{v}_a| \Delta t .$$



La carga que atraviesa el elemento de área ΔS por unidad de tiempo Δt , será por tanto

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nq|\vec{v}_d|\Delta S.$$

Si se tiene en cuenta que en el caso analizado previamente, el área considerada estaba orientada perpendicularmente al movimiento, la expresión anterior ofrecía directamente el valor del flujo que atravesaba dicha área. Si el área considerada, ΔS , presenta otra orientación, entonces el flujo debe expresarse en términos del producto escalar de la velocidad de las partículas por el vector área (al igual que ya se hizo para el flujo del campo eléctrico) y por tanto, en general,

$$\Delta I = nq\vec{v}_d \cdot \Delta\vec{S}. \quad (2.3)$$

Tomando ahora el límite de la expresión anterior para áreas infinitesimales, $\Delta S \rightarrow 0$, (2.3) puede reescribirse como:

$$dI = nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S}, \quad (2.4)$$

de donde se deduce que la intensidad que atraviesa el área total S vendrá dado por

$$I = \int_S dI = \int_S nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S}. \quad (2.5)$$

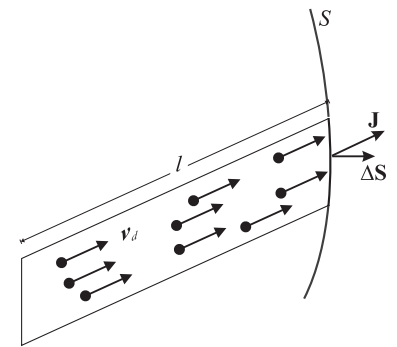
Comparando ahora (2.5) con (2.2), obtenemos la siguiente expresión para el vector densidad de corriente en el caso de que exista un único tipo de portadores:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d. \quad (2.6)$$

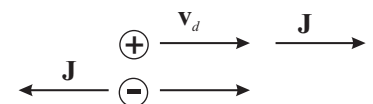
En aquellas situaciones en las que haya más de un tipo de portadores, la expresión (2.6) puede generalizarse y escribirse como

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{d,i}. \quad (2.7)$$

Es interesante observar (según muestra la figura adjunta) que si tenemos cargas positivas y negativas fluyendo en el mismo sentido, la corriente respectiva estará dirigida en sentidos opuestos.



Vector densidad de corriente



Actividad 2.1:

- ¿Podemos tener corriente en un segmento finito de un hilo conductor? Justifique su respuesta.
- Explique las razones que hacen que la definición de la intensidad de la corriente dada en (2.1) sea incompleta. ¿Por qué es más conveniente definir la intensidad como el flujo del vector densidad de corriente?
- Trate de obtener las condiciones que debe satisfacer una CC a partir de la definición de \vec{J} dada en la Ec. (2.6).
- Partiendo de la Ec. (2.6), deduzca la expresión de \vec{J} para una CC que fluya a través de la sección de un hilo.

EJEMPLO 2.1 Cálculo de la velocidad de arrastre de los electrones en un cable de Cu (densidad $\rho = 8,93 \text{ g/cm}^3$ y masa atómica $A = 63,55 \text{ g}$) de radio $0,8 \text{ mm}$ que transporta una corriente de intensidad 20 mA .

Es interesante primero notar que para el caso de corriente continua en un cable (que generalmente presenta una sección transversal invariante), la expresión de la intensidad se reduce a

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S |\vec{j}| dS = |\vec{j}| \int_S dS = |\vec{j}| S, \quad (2.8)$$

donde se ha supuesto que $\vec{j} \parallel d\vec{S}$ y que $|\vec{j}|$ permanece constante en toda la sección transversal (n no varía en la sección y la velocidad de las cargas es la misma en toda la sección).

Puesto que $|\vec{j}| = nq|\vec{v}_a|$, de la expresión (2.8) se deduce que la velocidad de arrastre de las cargas móviles puede escribirse como

$$|\vec{v}_a| = \frac{I}{nqS}.$$

Dado que la intensidad, la carga elemental q y la sección transversal pueden calcularse a partir de los datos del problema, $|\vec{v}_a|$ quedará determinada si conocemos el valor de n . Para calcular el número de electrones libres por m^3 en el cobre, supondremos que cada átomo de cobre aporta un electrón libre al metal, por lo que el número de éstos coincidirá con el número de átomos de Cu por m^3 , n_a . Para obtener n_a puede calcularse el número de moles por m^3 , χ , y multiplicar este número por el número de átomos en un mol, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$, esto es: $n_a = \chi N_A$. A su vez, el número de moles por m^3 puede obtenerse como

$$\chi = \frac{\text{masa de } 1\text{m}^3}{\text{masa de un mol}} = \frac{\rho}{A},$$

por lo que n puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$n = N_A \frac{\rho}{A}.$$

Para el caso del Cu, $A = 63,55 \text{ g}$ y $\rho = 8,93 \text{ g/cm}^3$, por lo que

$$n = 6,02 \times 10^{23} \frac{8,93 \times 10^6}{63,55} = 8,46 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

La velocidad de arrastre será por tanto:

$$|\vec{v}_a| = \frac{20 \times 10^{-3}}{8,46 \times 10^{28} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot \pi(0,8 \times 10^{-3})^2} = 7,43 \times 10^{-7} \text{ m/s}.$$

Obsérvese el valor tan pequeño de velocidad que se obtiene para el desplazamiento de los electrones en el interior del cable, aunque esta velocidad de desplazamiento tan pequeña no implica que haya que esperar un largo tiempo para que se inicie la corriente eléctrica. Algo similar ocurre en una columna de soldados respondiendo a la voz de "marcha", aunque la velocidad de desplazamiento de los soldados pueda ser pequeña, la columna se pone en marcha de forma casi instantánea.

Ecuación de continuidad de la carga

El principio de conservación local de la carga (ver Apartado 1.1) exigía que si cierta carga desaparecía de un lugar, esta misma carga debía haber viajado y aparecer posteriormente en otro lugar. Dado que la carga viajando constituye una corriente eléctrica, este principio puede expresarse en términos de dicha corriente eléctrica como

La intensidad de corriente que atraviesa la superficie cerrada de un recinto es igual a menos la variación temporal de la carga móvil en su interior.

Esta ley simplemente dice que si en cierto recinto entran, por ejemplo, 5 cargas por segundo y salen 2 cargas por segundo, entonces la carga en el interior del recinto aumenta a un ritmo de 3 cargas por segundo. En forma matemática, el principio anterior se conoce como **ecuación de continuidad para la carga** y puede expresarse como

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad (2.9)$$

donde el signo menos delante del segundo miembro sólo indica que un flujo positivo (es decir, carga *saliendo* del recinto) está relacionado con una *disminución* de la carga en su interior. Dado que la carga en el interior del recinto puede expresarse en términos de la densidad de carga volumétrica en su interior: $Q = \int_V \rho dV$, la expresión (2.9) puede reescribirse como

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.10)$$

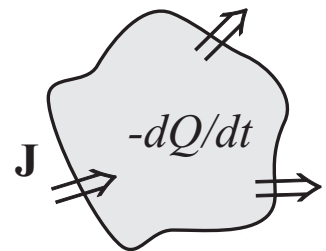
Para el caso de corriente continua, donde no existen *variaciones temporales* de carga móvil en el interior de los conductores (dado que la carga por unidad de tiempo que atraviesa cualquier superficie es siempre la misma), se cumple que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

por lo que la ecuación de continuidad establece que

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.11)$$

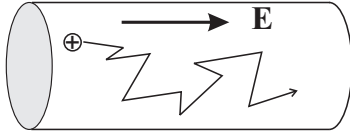
esto es, el flujo de corriente a través de un recinto cerrado es nulo; o lo que es lo mismo, la misma cantidad de carga que entra en el recinto sale de él.



Ecuación de continuidad en régimen estacionario

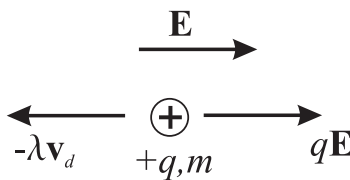
2.3. Conductividad, Ley de Ohm

2.3.1. Conductividad eléctrica



El modelo más elemental de lo que sucede en un **conductor real**² supone que las cargas móviles del conductor responden a la aplicación de un campo eléctrico externo acelerándose, pero que esta ganancia continua de energía cinética es compensada por una pérdida equivalente de energía debida a las continuas colisiones que sufren las cargas móviles (generalmente electrones) con los restos atómicos *fijos* del material conductor. Este proceso simultáneo de aceleración debido al campo eléctrico y desaceleración debido a las continuas colisiones es equivalente a un movimiento promedio en el que la velocidad de los portadores de carga permanece constante.³

El complicado proceso interno puede simularse globalmente considerando que el resultado de las colisiones puede modelarse mediante el efecto de una fuerza *disipativa* del tipo $\vec{F}_d = -\lambda\vec{v}_a$ que se opone al movimiento. Según este sencillo modelo, la ley de movimiento de una de las partículas cargadas en el interior de un conductor real vendría dada por



$$m \frac{d\vec{v}_a}{dt} = q\vec{E} - \lambda\vec{v}_a. \quad (2.12)$$

En la situación estacionaria en la que la velocidad de arrastre de las cargas permanece constante (esto es: $d\vec{v}_a/dt = 0$), ésta podrá expresarse, según (2.12), como

$$\vec{v}_a = \frac{q}{\lambda} \vec{E}$$

o equivalentemente como

$$\vec{v}_a = \mu \vec{E} \quad (2.13)$$

donde se pone de evidencia la relación lineal que existe entre la velocidad de arrastre y el campo eléctrico aplicado mediante el parámetro μ conocido como **movilidad** de las cargas (sus unidades en el S.I. son $m^2/(Vs)$).

Teniendo ahora en cuenta que $\vec{J} = nq\vec{v}_a$, el vector densidad de corriente puede escribirse como

$$\vec{J} = nq\mu \vec{E}, \quad (2.14)$$

o bien

$$\vec{J} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E}. \quad (2.15)$$

La anterior expresión manifiesta la existencia de una relación lineal entre el vector densidad de corriente y el campo eléctrico aplicado que puede

² Es muy importante distinguir el presente caso de un conductor *real* con el caso de un conductor *perfecto* que ya estudiamos en el Apartado 1.4. Debe recordarse que en el caso de un conductor perfecto no existía campo eléctrico en el interior del conductor. En el presente caso de un conductor *real* **sí** existirá campo en el interior de dicho conductor.

³ Una situación análoga se da en la caída de las gotas de agua de la lluvia. Cada gota de agua es acelerada por el campo gravitatorio y, a su vez, desacelerada en los choques que sufre con las moléculas de aire que se encuentra en su caída. El resultado global es que las gotas de agua caen a velocidad aproximadamente constante.

expresarse como⁴

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.16)$$

siendo σ un parámetro asociado al material que se conoce como **conductividad eléctrica** y que vendrá dado por

$$\sigma = \frac{nq^2}{\lambda}, \quad (2.17)$$

o bien por

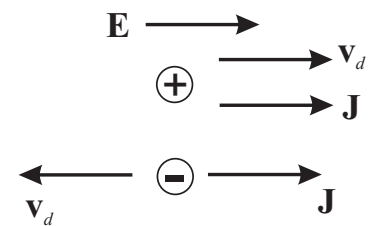
$$\sigma = qn\mu. \quad (2.18)$$

La conductividad eléctrica mide el grado de conducción eléctrica de los materiales, siendo mayor para aquellos materiales en los que la corriente eléctrica fluye con más facilidad (nótese que σ es inversamente proporcional al parámetro λ).

Es interesante notar que independientemente del signo de la carga, dado que ésta aparece al cuadrado en (2.17), el sentido de la corriente es siempre el mismo que el del campo eléctrico aplicado.

Ley de Ohm para \vec{J} y \vec{E}

Conductividad eléctrica



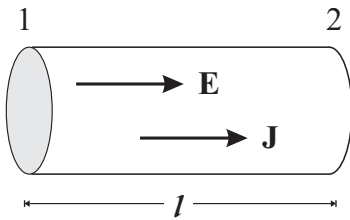
Actividad 2.2:

- Describa y explique las principales diferencias entre conductores perfectos y reales.
- Encuentre situaciones prácticas comunes donde un movimiento a velocidad constante es causado por la acción balanceadas de dos fuerzas que se oponen.
- De algunos razones de por qué es razonable esperar que $\sigma \propto n$ y $\sigma \propto \lambda^{-1}$.
- Un conductor perfecto es el caso límite de un conductor real cuando la conductividad eléctrica tiende a infinito ($\sigma \rightarrow \infty$). Explique por qué pueden existir corrientes en un conductor perfecto aunque $\vec{E}_{\text{cond}} = 0$.
- ¿Es el sentido de \vec{J} siempre el mismo que el de \vec{E} ? ¿Es el sentido de \vec{v}_d siempre el mismo que el de \vec{E} ? Justifique sus respuestas.

2.3.2. Ley de Ohm circuital

Si un conductor filiforme dotado de cierta conductividad σ se sitúa en una región donde existe un campo eléctrico \vec{E} , este campo eléctrico *penetra* en el conductor (a diferencia de un conductor perfecto donde $\vec{E}_{\text{int}} = 0$) y “afectará” a las cargas móviles dando lugar a una corriente eléctrica. Según (1.33), la integral de camino del campo eléctrico entre dos puntos del

⁴ En general esta ley también será válida para campos eléctricos *no electrostáticos*.



conductor será justamente la diferencia de potencial entre esos dos puntos, esto es,

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(1) - V(2) \equiv V_{12}.$$

Esta diferencia de potencial entre dos puntos es usualmente denominada **tensión** eléctrica, o simplemente tensión. Dado que el campo eléctrico puede relacionarse con la densidad de corriente mediante la ley de Ohm (2.16), se tiene que

$$V_{12} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l}. \quad (2.19)$$

Supuesto que en el conductor filiforme de sección transversal S , el vector densidad de corriente pueda escribirse como

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{u} \quad (2.20)$$

(siendo \hat{u} el vector unitario en la dirección del conductor), el cálculo de la integral de camino (2.19) será entonces

$$V_{12} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\sigma S} \int_1^2 \hat{u} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\sigma S} \int_1^2 dl = \frac{l}{\sigma S} I, \quad (2.21)$$

donde l es distancia entre los puntos 1 y 2.

Obsérvese que se ha obtenido una relación *lineal* entre la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor y la intensidad de la corriente eléctrica que circula por él. Esta relación se puede escribir de forma genérica como

Ley de Ohm circuital

$$V = RI \quad (2.22)$$

que se conoce como *ley de Ohm circuital* (enunciada por G.S. Ohm en 1827), donde el parámetro R , denominado **resistencia** del material, es para el conductor filiforme

Resistencia de un conductor filiforme

$$R = \frac{l}{\sigma S}. \quad (2.23)$$

La resistencia es una característica de cada conductor que depende de su constitución material (a través de σ) y de su geometría. La unidad de resistencia en el SI es el **ohmio** (Ω), siendo

Unidad de Resistencia:
1 ohmio (Ω)

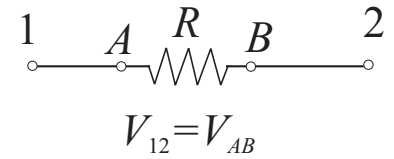
$$1 \text{ ohmio} = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amperio}}, \quad 1 \Omega = 1 \text{ V/A}.$$

A diferencia de lo que ocurre en un conductor *perfecto*, que es equipotencial, la presencia de una resistencia (esto es, la existencia de una pérdida de energía de los portadores de carga móviles debido a las colisiones con los restos atómicos fijos) se manifiesta en una caída de potencial, o tensión, a lo largo del conductor *real* si éste es recorrido por una corriente.

Unidad conductividad eléctrica:
 $1 (\Omega\text{m})^{-1}$

A partir de (2.23) podemos deducir que las unidades de conductividad σ son inversamente proporcional a la resistencia y longitud, por lo que las unidades de conductividad suelen darse en $(\Omega\text{m})^{-1}$. La conductividad eléctrica es una de las magnitudes que más varían de un material a otro: desde $10^{-15}(\Omega\text{m})^{-1}$ para materiales muy poco conductores (dieléctricos) hasta

$10^8(\Omega\text{m})^{-1}$ en metales muy buenos conductores como el cobre o la plata. Puesto que la conductividad de los metales suele ser muy alta y, por tanto, su resistencia muy baja, en múltiples situaciones prácticas (por ejemplo, en la mayoría de los circuitos) se considera que *no hay caída de potencial en los conductores metálicos* sino que toda la caída de potencial se da en unos elementos específicos de menor conductividad llamados **resistencias**.



Actividad 2.3:

- ¿Podemos tener una diferencia de potencial a lo largo de un conductor perfecto? Justifique su respuesta.
- ¿En qué situaciones prácticas no podemos despreciar la diferencia de potencial a lo largo de hilos conductores?
- ¿Cuáles son las suposiciones más relevantes que hemos hecho para derivar la ley de Ohm? Trate de encontrar un ejemplo práctico donde esta ley no sea aplicable.

2.3.3. Efecto Joule

En los apartados anteriores se ha discutido que la presencia de corriente eléctrica en un conductor real lleva aparejado un proceso disipativo de energía fruto de las continuas colisiones de los portadores móviles con los restos atómicos fijos. Este proceso disipativo implica una pérdida de energía cinética de los portadores de carga en forma de calor que se transmite al material conductor y a su entorno. La presencia de una caída de potencial en un conductor real (cuando éste es recorrido por una corriente eléctrica) provoca que para desplazar un diferencial de carga, dq , desde el punto de potencial V_1 al punto de potencial V_2 , el campo eléctrico externo deba realizar un trabajo. Si la diferencia de potencial entre estos dos puntos se expresa de forma general como $V = V_1 - V_2$, este trabajo viene dado, según (1.61), por

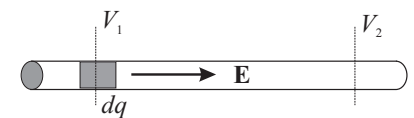
$$dW = dq(V_1 - V_2) = dqV .$$

Teniendo ahora en cuenta que el elemento de carga, dq , es parte de una corriente I que circula por el conductor, podremos escribir que: $dq = Idt$; por lo que el diferencial de trabajo realizado por el campo podrá expresarse como

$$dW = IVdt . \quad (2.24)$$

En consecuencia, el ritmo temporal con el que se realiza este trabajo, que coincidirá con la potencia, $P = dW/dt$, disipada en forma de calor en la resistencia, vendrá dado por

$$P = IV = I^2R = V^2/R . \quad (2.25)$$



Ley de Joule

Esta ley para la potencia disipada en una resistencia fue deducida experimentalmente por J.P. Joule sobre 1841.

Actividad 2.4:

- Explique las razones que hace necesario que, en general, deba haber un agente que realice un trabajo externo para mover una carga entre dos puntos de un conductor real.
- ¿Es la potencia dada en (2.25) lineal con la corriente y la diferencia de potencial? Justifique su respuesta.
- Describa cuándo es conveniente usar cada una de las tres expresiones dadas para la potencia.

EJEMPLO 2.2 Dos conductores de la misma longitud y el mismo radio se conectan a través de la misma diferencia de potencial. Si uno de los conductores tiene el doble de resistencia que el otro, ¿cuál de los dos conductores disipará más potencia?

Si la resistencia del conductor 1 es $R_1 = R$ y la del conductor 2 es $R_2 = 2R$, entonces, de acuerdo con la expresión (2.25), las potencias disipadas en cada conductor son:

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} = \frac{V^2}{R}$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R_2} = \frac{V^2}{2R},$$

por lo que:

$$P_1 = 2P_2.$$

Esto quiere decir que, supuesta igual la diferencia de potencial en los conductores, aquel conductor con menor resistencia es el que disipa mayor cantidad de potencia.

¿Qué ocurriría si los conductores anteriores fuesen recorridos por la misma intensidad?

2.4. Fuerza electromotriz

Antes de analizar cómo puede mantenerse en la práctica un una corriente eléctrica continua, detengámonos un momento en el análisis de una “corriente continua de masa”. En el dibujo adjunto se muestran bolitas que se mueven en el interior de un tubo cerrado sobre sí mismo. La cuestión es: ¿puede existir un flujo constante de masa en la situación anterior?. Obviamente, bajo el efecto único del campo gravitatorio, una bolita que sale de la parte superior no podrá llegar a un punto más alto que aquél desde el cual ha partido y, por tanto, no puede producir un movimiento circular continuo (es decir, la bolita no puede alcanzar un punto de potencial gravitatorio mayor que el de partida). No obstante, si además consideramos la presencia inevitable de *rozamiento*, habrá una pérdida adicional de energía cinética

transformada en calor que provocará que la bolita no alcance el punto teórico de máxima altura sino uno de menor altura. En resumen, la bolita en el dispositivo anterior no podrá realizar un movimiento circular mantenido sino que realizará un movimiento oscilatorio que desaparecerá tras unas cuantas oscilaciones. Por tanto, podemos afirmar que el campo gravitatorio, que es *conservativo*, no es capaz de mantener por sí mismo una corriente continua de masa. Para conseguir una corriente continua de masa debe añadirse al sistema anterior un elemento que proporcione el “empuje” adicional necesario a las bolitas para que puedan continuar su movimiento. Claramente, este elemento adicional debe producir un campo de naturaleza distinta al gravitatorio (esto es, no conservativo).

La misma cuestión puede ahora plantearse respecto a si un campo electrostático puede mantener una corriente continua de cargas eléctricas. En este caso, y debido a la naturaleza *conservativa* del campo electrostático, la respuesta sigue siendo NO, por razones análogas a las del caso anterior. En otras palabras, el trabajo por unidad de carga que realiza el campo electrostático, \vec{E}_{els} , en un recorrido circular de la carga es nulo,

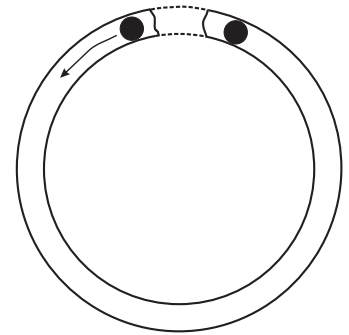
$$\frac{W}{q} = \oint \vec{E}_{\text{els}} \cdot d\vec{l} = 0,$$

debido al carácter conservativo de \vec{E}_{els} (ver la expresión (1.31)). Dado que en cualquier situación real siempre existe una pérdida de energía debido al efecto Joule, para mantener un flujo continuo de cargas debemos introducir un elemento externo que proporcione a las cargas móviles el “impulso externo” necesario para compensar esta pérdida constante de energía. El agente de este impulso externo a las cargas no puede ser claramente un campo electrostático pues éste proporcionaría siempre una energía nula por ciclo.

Puesto que el impulso sobre los portadores móviles puede estar localizado en una parte concreta del circuito o bien distribuido a lo largo de éste, lo que importa es la integral a lo largo de todo el circuito de la fuerza por unidad de carga, \vec{f} , que origina este impulso. La circulación de esta fuerza por unidad de carga se conoce como **fuerza electromotriz**, ξ , (denotada usualmente como “fem”):

$$\xi = \oint_{\text{circuito}} \vec{f} \cdot d\vec{l}, \quad (2.26)$$

esto es, la fuerza tangencial por unidad de carga integrada sobre la longitud del circuito completo (esta cantidad es igual a la energía por unidad de carga suministrada en cada ciclo por el agente externo). Debe notarse que la denominación de “fuerza” electromotriz es un poco desafortunada, dado que ξ no tiene unidades de fuerza sino de fuerza por unidad de carga (o sea, de campo eléctrico) y por longitud, que son precisamente unidades de potencial eléctrico (recuérdese que, según (1.33), la diferencia de potencial se define como la integral de camino del campo electrostático). Por consiguiente, las unidades de fuerza electromotriz son voltios. No obstante, es importante aclarar que la fuerza electromotriz NO es una diferencia de po-



Fuerza electromotriz (fem)

Unidad de fem : 1 voltio (V)

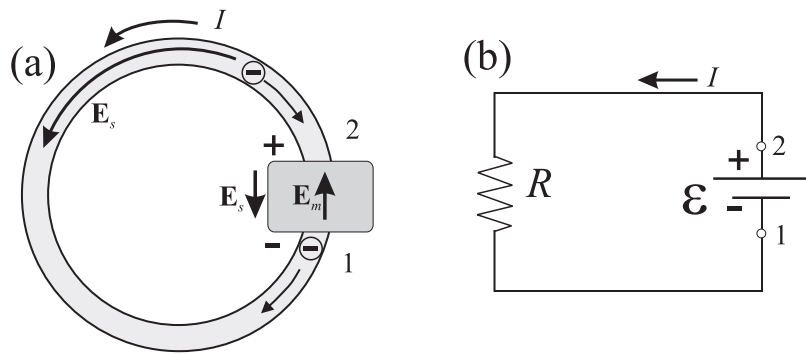


FIGURA 2.1: (a) Esquema físico de la acción de un generador de fuerza electromotriz. (b) Representación circuital del esquema anterior.

tencial,

$$\xi \neq \Delta V,$$

puesto que el agente de fem no puede ser un campo electrostático, \vec{E}_s (campo de circulación nula), sino un campo de naturaleza no electrostática que llamaremos **campo electromotor**, \vec{E}_m . El agente físico concreto responsable de este campo electromotor puede ser muy diverso, por ejemplo: fuerzas de origen químico en una batería, fuerza mecánica en un generador de Van der Graaff, la luz en una célula fotoeléctrica, la presión mecánica en un cristal piezoeléctrico, etc...

Podemos, por tanto, establecer que la existencia de una corriente eléctrica continua en un circuito requiere la acción de un agente externo, usualmente denominado **generador de fem** (o también, fuente de tensión), que proporcione el campo electromotor necesario para “empujar” las cargas positivas/negativas hacia potenciales crecientes/decrecientes en contra del efecto del campo electrostático. Este hecho queda de manifiesto en la parte (a) de la Fig. 2.1, donde al realizar la circulación del campo eléctrico total suma del campo electrostático más el electromotor, $\vec{E}_T = \vec{E}_s + \vec{E}_m$,

$$\begin{aligned} \xi &= \oint \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ &= \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (2.27)$$

se obtiene que la fuerza electromotriz es justamente la integral de camino del campo electromotor entre los puntos 1 y 2 (recuérdese que la circulación del campo electrostático es nula). En términos circuitales, la representación de la situación anterior se muestra en la parte (b) de la figura.

Actividad 2.5:

- Si tiene una pelota elástica en su mano, ¿qué tendría que hacer si quiere que, tras el rebote de la pelota en el suelo, ésta alcance una altura superior que la inicial? Ahora, explique esta acción en términos físicos e identifique las fuerzas involucradas en el fenómeno así como su naturaleza conservativa o no.
- ¿Puede un campo electrostático producir una corriente continua? Justifique su respuesta.
- Un campo electrostático no puede mover cargas de un punto a otro. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- Encuentre y explique cuál de las siguientes frases es verdadera o falsa.
 - La fem es la fuerza producida en el interior de las baterías.
 - Las unidades de la fuerza electromotriz son newtons.
 - Un campo no electrostático da lugar a una diferencia de potencial.
 - Un campo electrostático puede ser la causa de una diferencia de potencial.
 - No hay ninguna relación entre la fem y la diferencia de potencial en un circuito.
 - Una fuente de tensión no es siempre necesaria para tener una CC en un circuito.

2.4.1. Potencia suministrada por el generador

El trabajo que realiza el generador (en concreto, el campo electromotor, \vec{E}_m) para mover un diferencial de carga dq vendrá dado por

$$dW = dq \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = dq\xi . \quad (2.28)$$

El trabajo total, W_ξ , que puede realizar este generador estará limitado por la cantidad total de carga, Q_T , que puede poner en movimiento. Por tanto, tras integrar (2.28) (note que la fem es independiente de la carga sobre la que actúa), obtenemos que

$$W_\xi = Q_T \xi . \quad (2.29)$$

En condiciones ideales, este trabajo debería ser igual a la energía almacenada en la batería, U_ξ . En consecuencia concluimos que la energía almacenada en la batería puede expresarse como

$$U_\xi = Q_T \xi . \quad (2.30)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el hecho de que el diferencial de carga considerado forma parte de una corriente, tendremos que $dq = Idt$ y por tanto

$$dW = I\xi dt . \quad (2.31)$$

De la expresión anterior podemos deducir que la potencia, P , suministrada por el generador es

$$P = I\xi . \quad (2.32)$$

Potencia suministrada por el generador de fem

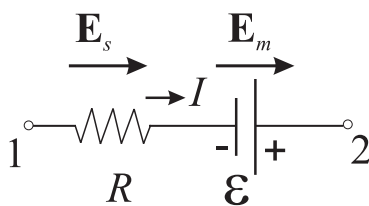
Actividad 2.6:

- Deduzca que la expresión (2.28) puede interpretarse como el trabajo diferencial proporcionado por una fuente de tensión para mover un diferencial de carga a lo largo de un camino cerrado de un circuito dado.
- ¿Por qué es la fem independiente de la cantidad de carga sobre la que actúa?
- Halle la cantidad de energía almacenada en la batería de su teléfono móvil (mire en las especificaciones escritas en la batería). Calcule ahora cuánto tiempo puede durar esta batería.
- ¿Qué principio fundamental se ha usado para deducir (2.30)?

2.5. Reglas de Kirchhoff

2.5.1. Regla de Kirchhoff de las tensiones

Si calculamos la integral de camino del campo total, \vec{E}_t , entre los puntos 1 y 2 de la rama (asociación de elementos en serie recorridos por la misma intensidad) mostrada en la figura adjunta, tendremos que



$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l} . \quad (2.33)$$

Ahora bien, según la expresión (2.16), el primer miembro de la expresión anterior se puede reescribir como

$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} . \quad (2.34)$$

Suponiendo válida la expresión (2.20) y operando obtenemos que

$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{I}{\sigma S} dl = IR . \quad (2.35)$$

El sentido de la intensidad se supone inicialmente fluyendo en el sentido de recorrido del punto 1 al punto 2.

El primer término del segundo miembro en (2.33) es justamente la integral de camino del campo electrostático entre los puntos 1 y 2; esto es, la diferencia de potencial entre ambos puntos (o tensión):

$$\int_1^2 \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_{12} .$$

Dado que el segundo término es, por definición, la fuerza electromotriz del generador, la expresión (2.33) puede reescribirse como

$$IR = V_{12} + \xi , \tag{2.36}$$

o bien:

$$V_{12} = IR - \xi . \tag{2.37}$$

Es interesante notar que si entre los puntos 1 y 2 sólo existiese el generador de fuerza electromotriz ($R = 0$), de acuerdo con la ecuación anterior, la caída de tensión V_{21} sería numéricamente igual al valor de la fuerza electromotriz del generador ($V_{21} = \xi$). Esta misma igualdad se daría también si no circulase intensidad por la rama aunque $R \neq 0$.

Si en vez de una sola resistencia y generador tenemos una rama con varios de ellos, entonces, la aplicación del anterior razonamiento nos dice que

$$V_{12} = I(R_1 + R_2 + R_3) - (-\xi_1 + \xi_2) ,$$

que de forma general se puede escribir como

$$V_{12} = I \sum_j R_j - \sum \xi_i , \tag{2.38}$$

donde el signo de la correspondiente ξ_i se toma según el siguiente criterio:

$$\text{sign}(\xi) = \begin{cases} + & \text{si sentido } \vec{E}_m = \text{sentido recorrido } 1 \rightarrow 2 \\ - & \text{si sentido } \vec{E}_m \neq \text{sentido recorrido } 1 \rightarrow 2 . \end{cases}$$

En un caso todavía más general como el que se muestra en la Fig.2.2, donde tenemos varias ramas recorridas por diferentes corrientes, el cálculo

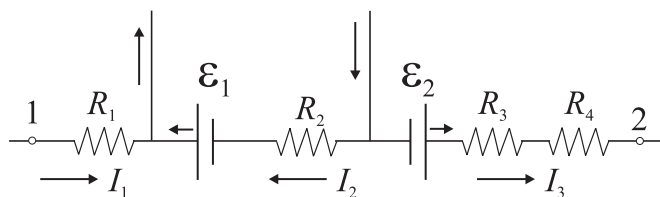
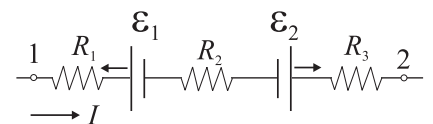


FIGURA 2.2: Diversas ramas recorridas por distintas intensidades.

de la integral de camino entre los puntos 1 y 2 nos dice que

$$V_{12} = [I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4)] - (-\xi_1 + \xi_2) ,$$

donde el signo de la intensidad, I_j , se toma de acuerdo al siguiente criterio:

$$\text{sign}(I_j) = \begin{cases} + & \text{si sentido } I_j = \text{sentido recorrido } 1 \rightarrow 2 \\ - & \text{si sentido } I_j \neq \text{sentido recorrido } 1 \rightarrow 2 . \end{cases}$$

En general, la expresión anterior se puede expresar como

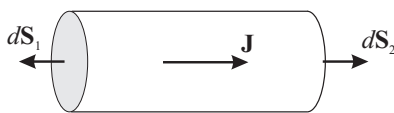
Regla de Kirchhoff para la tensión

$$V_{12} = \sum_j I_j R_j - \sum_i \xi_i , \quad (2.39)$$

(donde R_j es la resistencia *total* de la rama j recorrida por la intensidad I_j) y se conoce como **regla de Kirchhoff para la tensión**.

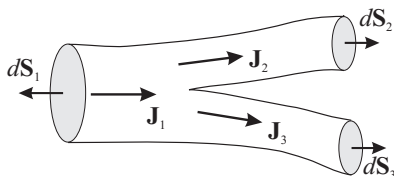
2.5.2. Regla de Kirchhoff de las intensidades

Si la expresión (2.11) se aplica a un trozo de un cable tal como se muestra en la figura adjunto, ésta dice que



$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{J} \cdot \vec{S}_1 + \vec{J} \cdot \vec{S}_2 = -I + I = 0 . \end{aligned}$$

Para el caso de tres ramas de un circuito que confluyen en un *nodo*, al aplicar (2.11) obtenemos:



$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{J}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{J}_2 \cdot \vec{S}_2 + \vec{J}_3 \cdot \vec{S}_3 = -I_1 + I_2 + I_3 = 0 , \end{aligned}$$

donde los valores de las distintas intensidades serán negativos (si la carga entra en el recinto) o positivos (si la carga sale del recinto).

Si la expresión anterior se generaliza para un nodo con N ramas, se obtiene la **regla de Kirchhoff para las intensidades**:

Regla de Kirchhoff para las intensidades

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 , \quad (2.40)$$

que establece que

la suma de todas las intensidades en un nodo es nula.

Actividad 2.7:

- ¿Ha notado que existen diferentes combinaciones de mallas que nos “cubren” todo el circuito? ¿Cómo afecta la elección particular que hagamos al resultado final?
- ¿Puede explicar la diferencia entre una *regla* y una *ley*?
- ¿Podemos estudiar circuitos con condensadores y/o bobinas con las reglas de Kirchhoff enunciadas anteriormente? Justifique su respuesta.
- Describa y explique qué leyes previamente estudiadas han sido usadas para derivar las reglas de Kirchhoff (2.37) y (2.40).
- ¿Por qué es tan importante recordar el criterio de signos empleado en Eq. (2.37)?

2.6. Resolución de circuitos de corriente continua

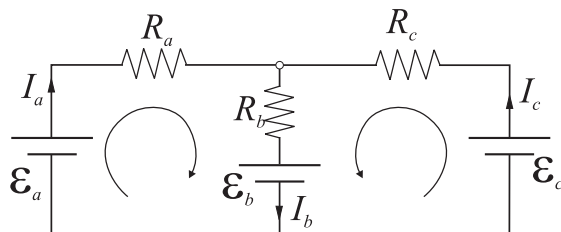
Denominaremos circuito de corriente continua (cc) a la interconexión de un número arbitrario de resistencias y generadores de cc. La interconexión puede tener cualquier topología, siendo la más simple la mostrada en la figura adjunta. La aplicación de las dos reglas de Kirchhoff anteriores conducirá, en general, a un sistema de ecuaciones, cuya resolución nos dará los valores de las magnitudes buscadas. Para el caso simple de la figura adjunta, tendremos que solo existe una intensidad, I , que recorre el circuito. La aplicación de la regla de Kirchhoff (2.37) para la tensión al anterior circuito (recorrido en el sentido horario desde el punto 1 hasta él mismo) dice que

$$V_{11} = 0 = IR - \xi ,$$

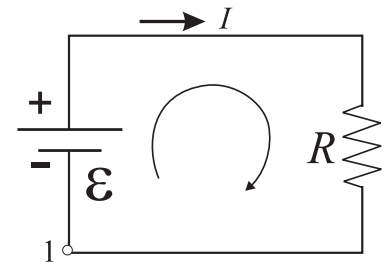
por lo que la intensidad será

$$I = \xi/R .$$

Para un circuito más complejo como el mostrado en la Fig. 2.3, tomamos

**FIGURA 2.3**

como incógnitas las intensidades que recorren cada rama: I_a , I_b e I_c . Las reglas de Kirchhoff dan lugar al siguiente sistema lineal de tres ecuaciones:



$$I_a R_a + I_b R_b = \xi_a - \xi_b \quad (2.41a)$$

$$I_c R_c + I_b R_b = \xi_c - \xi_b \quad (2.41b)$$

$$I_b = I_a + I_c, \quad (2.41c)$$

que tras sustituir I_b queda como

$$I_a(R_a + R_b) + I_c R_b = \xi_a - \xi_b \quad (2.42a)$$

$$I_a R_a + I_c(R_b + R_c) = \xi_c - \xi_b. \quad (2.42b)$$

La resolución del anterior sistema por cualquiera de los métodos conocidos permitirá obtener las intensidades en cada una de las ramas.

2.6.1. (*) Método de las corrientes de malla

Existen algunos métodos que permiten resolver los **circuitos lineales** (circuitos cuyos componentes muestran una relación lineal entre la intensidad y la tensión) planteando de forma sistemática un sistema de ecuaciones para ciertas variables auxiliares. Uno de estos métodos es el conocido como *método de las corrientes de malla*. Este método simplemente “reorganiza” las expresiones resultantes de la aplicación de las reglas de Kirchhoff, de modo que las variables incógnitas son las denominadas **intensidades de malla**. Antes de presentar el método, es conveniente determinar con precisión el significado de ciertas denominaciones:

- **Rama:** Conexión en serie de componentes.
- **Nodo:** Punto en el que concurren tres o más ramas.
- **Red:** Conjunto de nodos y ramas.
- **Malla:** Recorrido de una red, tal que partiendo de un punto se vuelve a él sin pasar dos veces por un mismo nodo.

En la aplicación del método, se debe empezar identificando un número mínimo de mallas que recubra completamente el circuito. En el caso del circuito de la Figura 2.3, podemos comprobar que el circuito es recubierto por al menos dos mallas, siendo su elección más trivial, la malla de la izquierda (malla 1) y la de la derecha (malla 2). Para cada una de estas mallas definiremos su intensidad de malla respectiva (con su sentido) como aquella intensidad que recorre la malla: I_1 e I_2 ; de modo que I_1 es la intensidad que recorre la rama a y parcialmente la rama b . Por su parte, la intensidad de la rama b vendrá dada por

$$I_b = I_1 + I_2.$$

En general, el sistema planteado para las intensidades de malla, I_j , es el siguiente:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} I_j \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.43)$$

donde

- N es el número de mallas;
- ξ_i es la fem *total* de la malla, tomando el signo de cada f.e.m. parcial positivo si el campo electromotor va en el mismo sentido que la intensidad de malla, y negativo en otro caso;
- R_{ij} es la resistencia total *común* de la malla i y j , cuyo signo será

$$\text{sign}(R_{ij}) = \begin{cases} + & \text{si sentido } I_i = \text{sentido } I_j \\ - & \text{si sentido } I_i \neq \text{sentido } I_j . \end{cases}$$

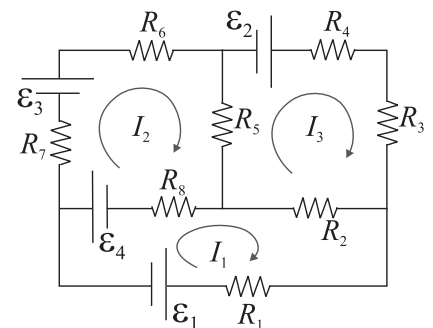
Si aplicamos la técnica anterior al circuito de la Figura 2.3, obtendremos el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \xi_a - \xi_b \\ \xi_c - \xi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + R_b & R_b \\ R_b & R_b + R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

EJEMPLO 2.3 Obtenga el sistema de ecuaciones para las intensidades de malla del siguiente circuito de tres mallas

En el circuito de la figura adjunta definimos una intensidad para cada una de las mallas señaladas, tomando el sentido de esta intensidad tal y como se muestra en la figura. Siguiendo los criterios de signos ya señalados para las resistencias y fuerzas electromotrices, encontramos que el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial que caracteriza al circuito es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} -\xi_1 - \xi_4 \\ \xi_3 + \xi_4 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_8 & -R_8 & -R_2 \\ -R_8 & R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$



Actividad 2.8:

- ¿Cuáles son las ventajas de usar el método de las corrientes de malla?
- Resuelva los ejercicios 2.7 al 2.18.

2.6.2. (*) Teorema de superposición

En aquellos circuitos en los que existe más de una fuente es a menudo útil el teorema de superposición, que dice

La respuesta en cualquier elemento de un circuito lineal que contenga dos o más fuentes es la suma de las respuestas obtenidas para cada una de las fuentes actuando separadamente y con todas las demás fuentes anuladas.

Para demostrar este teorema podemos partir del sistema de ecuaciones que nos da el método de análisis de mallas,

$$[\xi] = [R][I] , \quad (2.45)$$

o, equivalentemente,

$$[I] = [R]^{-1}[\xi] . \quad (2.46)$$

Si ahora consideramos una descomposición de las fuentes, de manera que

$$[\xi] = [\xi]_1 + [\xi]_2 , \quad (2.47)$$

tendremos entonces que existe una descomposición análoga para la intensidad,

$$\begin{aligned} [I] &= [R]^{-1}[\xi] = [R]^{-1}[\xi]_1 + [R]^{-1}[\xi]_2 \\ &= [I]_1 + [I]_2 . \end{aligned} \quad (2.48)$$

La ecuación anterior muestra que toda combinación lineal de fem corresponde a una combinación lineal de intensidades.

EJEMPLO 2.4 Aplicar el teorema de superposición para calcular la intensidad I_b en el circuito de la parte (a) de la figura.

El cálculo de la corriente I_b mediante la aplicación del teorema de superposición requiere la descomposición de la excitación provocada por las dos fuentes en dos excitaciones distintas debidas a cada una de las fuentes actuando por separado. De esta manera

$$I_b = I_{b,1} + I_{b,2} ,$$

y, por tanto, debemos resolver dos problemas más simples según muestra la parte (b) de la figura. Para calcular $I_{b,1}$, tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\xi_a = I_a R_a + I_{b,1} R_b$$

$$I_{b,1} R_b = I_c R_c$$

$$I_a = I_{b,1} + I_c .$$

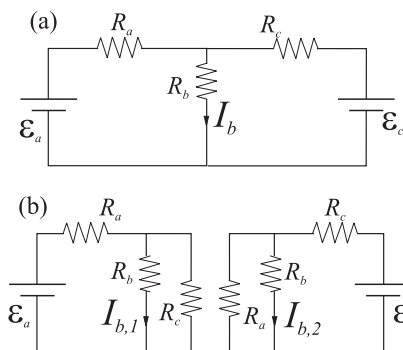
Asimismo para calcular $I_{b,2}$, se resolverá

$$\xi_c = I_c R_c + I_{b,2} R_b$$

$$I_{b,2} R_b = I_a R_a$$

$$I_c = I_{b,2} + I_a .$$

Aunque el ejemplo anterior no muestra ninguna ventaja de cálculo en la resolución del circuito, existen múltiples situaciones en las que la aplicación de este teorema puede ser muy beneficioso para simplificar los cálculos. Una situación en la que este teorema muestra su utilidad se encuentra cuando tengamos en un mismo circuito fuentes de corriente continua y de corriente alterna. Algún ejemplo de esta situación se mostrará en el tema de corriente alterna.



2.6.3. (*) Teorema de Thevenin

Este teorema puede enunciarse de la siguiente manera:

En un circuito de CC que contenga resistencias y fuentes de fem del cual salen dos terminales, éstos pueden ser considerados a efectos de cálculo como los terminales de un circuito que contiene una única fuente de tensión, ξ_{TH} , de valor igual a la diferencia de potencial que aparece entre los terminales, y una única resistencia, R_{TH} , equivalente a la que aparece entre los terminales cuando se anulan todas las fuentes de fem del circuito.

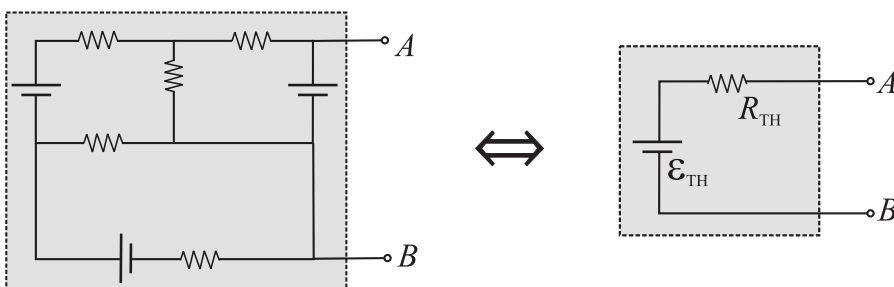


FIGURA 2.4: Red compuesta por múltiples fuentes de fem y resistencias junto con su circuito equivalente Thevenin.

El contenido del teorema puede interpretarse diciendo que todo circuito lineal activo con terminales de salida A y B puede sustituirse por una fuente de tensión en serie con una resistencia (ver Fig. 2.4). Los valores concretos de esta fuente de tensión y de la resistencia se determinan según el procedimiento descrito por el propio teorema.

EJEMPLO 2.5 Calcular el equivalente Thevenin del circuito de la figura

Para aplicar el teorema de Thevenin, debemos calcular el valor de la resistencia y de la fuente de tensión de Thevenin.

En primer lugar calcularemos R_{TH} , para lo cual debe obtenerse la resistencia equivalente cuando se anula (cortocircuita) la fuente. En primer lugar obtenemos la resistencia paralelo, $R_{||}$, debido a las resistencias de 60Ω y 40Ω :

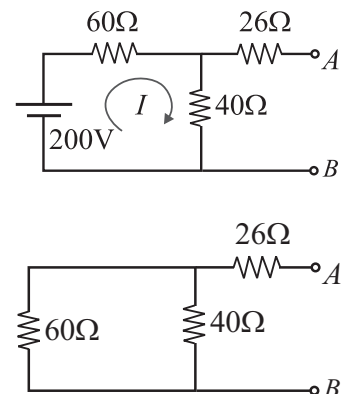
$$\frac{1}{R_{||}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{60},$$

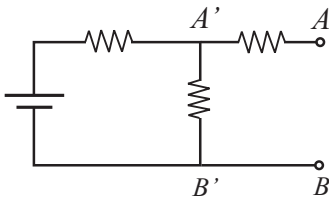
de donde $R_{||} = 24\Omega$. La resistencia Thevenin será simplemente

$$R_{TH} = R_{||} + 26 = 50\Omega.$$

Para obtener la fuente de tensión Thevenin, obtendremos la diferencia de potencial entre los terminales A y B dado que $\xi_{TH} = V_{AB}$. La intensidad, I , que recorre el circuito será

$$I = \frac{200 \text{ V}}{60\Omega + 40\Omega} = 2 \text{ A}.$$





Teniendo en cuenta que por las ramas A o B no circula intensidad, tenemos que:
 $V_{AB} = V_{A'B'}$ y por tanto

$$\xi_{TH} = 40I = 80 \text{ V} .$$

2.6.4. Balance de potencia

En los apartados 2.3.3 y 2.4.1 se ha discutido la potencia disipada en una resistencia y la proporcionada por una fuente de tensión. En un circuito compuesto de varias fuentes de tensión y resistencias resulta evidente, a partir del principio de conservación de la energía, que la potencia total (energía por unidad de tiempo) disipada en todas las resistencias debe coincidir con la potencia suministrada por el conjunto de todas las fuentes. En otras palabras, si tenemos N fuentes de tensión, cada una de ellas suministrando una potencia dada por

$$P(\xi_n) = I_n \xi_n$$

(siendo I_n la intensidad de la corriente que circula por la fuente ξ_n) y M resistencias, disipando cada una de ellas una potencia

$$P(R_m) = I_m V_m$$

(siendo V_m e I_m respectivamente la caída de tensión y la intensidad en la resistencia R_m), entonces debe cumplirse que

$$\sum_{n=1}^N P(\xi_n) = \sum_{m=1}^M P(R_m) , \quad (2.49)$$

o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^N I_n \xi_n = \sum_{m=1}^M I_m V_m = \sum_{m=1}^M I_m^2 R_m = \sum_{m=1}^M V_m^2 / R_m . \quad (2.50)$$

Potencia suministrada por todas las fuentes de tensión debe ser igual a potencia consumida en todas las resistencias

Actividad 2.9:

- ¿Tiene el “balance de potencia” algo que ver con el principio de conservación de la energía? Justifique su respuesta.
- Si tenemos dos bombillas cuyas resistencias equivalentes son R_1 y R_2 , ¿cómo deberíamos conectarlas entre sí y posteriormente a un generador de CC para obtener máxima luminiscencia?
- La corriente que fluye por un resistor de alta resistencia, ¿aumenta o disminuye en función del valor de dicha resistencia? Responda a la pregunta anterior si ahora tenemos dos resistores en serie en vez de uno solo. Justifique su respuesta.
- Si la respuesta a la anterior cuestión es que la corriente no cambia, entonces ¿qué es lo que “cambia” en los resistores?

2.7. Circuito RC. Carga y descarga de un condensador

Un circuito RC será aquel formado por resistencias, condensadores y generadores de fuerza electromotriz. La principal diferencia con los circuitos con generadores y resistencias que hemos visto hasta ahora reside en el hecho de que el condensador sufre procesos *temporales* de carga y descarga, lo que hace que la corriente que fluya por el circuito sufra una variación temporal, denominada **transitorios**, hasta que se alcanza finalmente un régimen estacionario.

Descarga de un condensador

Veamos lo anteriormente expuesto en el proceso de descarga de un condensador. Supongamos que el condensador de capacidad C ha sido cargado previamente, adquiriendo una carga final Q_0 . Si como muestra la Fig. 2.5 el interruptor se cierra en el instante $t = 0$, entonces empezará a fluir carga desde una placa a otra del condensador a través del circuito con la resisten-

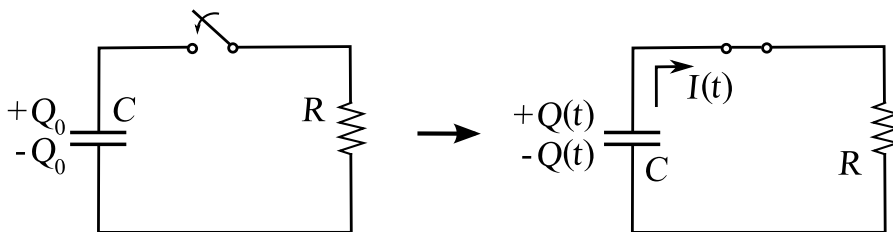


FIGURA 2.5: Esquema de la descarga de un condensador a través de un circuito con una resistencia.

cia R . Ciertamente este proceso continuará hasta que se anule la carga en las placas del condensador (y consecuentemente la diferencia de potencial entre dichas placas). La ecuación que rige el anterior proceso viene dada por la regla de Kirchoff de las tensiones, que nos dice que

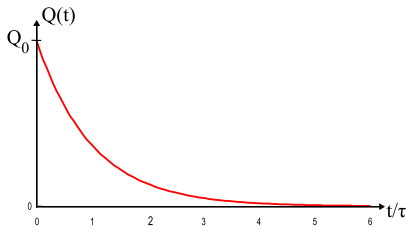
$$V_C = V_R . \quad (2.51)$$

Teniendo en cuenta que $V_C = Q/C$ y que $V_R = RI = -RdQ/dt$,⁵ la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 . \quad (2.52)$$

Notemos que la anterior ecuación es una *ecuación diferencial*, lo que significa que los distintos términos de la ecuación relacionan cierta función con sus derivadas. En otras palabras debemos encontrar la función $Q(t)$ cuya derivada sea igual a ella misma multiplicada por $1/RC$. Es fácil reconocer que la

⁵ Téngase en cuenta que, en este caso, debemos escribir $I = -dQ/dt$ para que esté de acuerdo con el hecho de que si disminuye la carga en la placa (+) del condensador, entonces la intensidad de la corriente "sale" del condensador (es decir, que tendrá el mismo sentido que el que hemos supuesto inicialmente en nuestro esquema del circuito).



única función cuya derivada es proporcional a ella misma es la función *exponencial*. En este sentido podemos comprobar que la solución a la ecuación (2.52) es

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \quad (2.53)$$

donde Q_0 es precisamente el valor de la carga en el condensador en el instante $t = 0$ [$Q(0) = Q_0$].

La expresión anterior nos dice que la carga en el condensador va decreciendo de forma exponencial, siendo el factor $\tau = RC$, denominado *constante de tiempo*, el que rige el ritmo de decrecimiento. Podemos comprobar que para tiempos $t \gtrsim 4\tau$ la carga del condensador es prácticamente despreciable y podemos considerar, a efectos prácticos, que el condensador ya se ha descargado.

Para calcular la intensidad de la corriente que fluye en el proceso de descarga simplemente debemos derivar la expresión (2.53) para obtener

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}, \quad (2.54)$$

donde I_0 es el valor de la intensidad de la corriente en el instante $t = 0$, $I(0) = I_0 = Q_0/RC$.

Actividad 2.10:

- Explique brevemente por qué la carga del condensador empieza a fluir después de que el interruptor de la Fig. 2.5 se cierre.
- ¿Por qué el voltaje de un condensador que se descarga va a cero?
- Describa las diferencias entre una ecuación algebraica y una diferencial. En Física usamos mayoritariamente ecuaciones diferenciales (por ejemplo, la segunda ley de Newton), ¿puede explicar por qué?
- Verifique que para $t > 4\tau$ la carga de un condensador en su proceso de descarga se ha hecho prácticamente nula.
- En un proceso de descarga RC , ¿cómo podría obtener la energía total disipada en la resistencia? ¿Tiene que ser igual al valor de la energía inicial almacenada en el condensador? Demuestre si esto es así.

Carga de un condensador

El proceso contrario a la descarga del condensador será precisamente la carga de dicho condensador. En este proceso debemos contar con un generador de fuerza electromotriz, ξ , que nos proporcione la energía suficiente para llevar a cabo este proceso. Consideremos el circuito mostrado en la Fig. 2.6. Si en el instante $t = 0$ cerramos el interruptor del circuito y

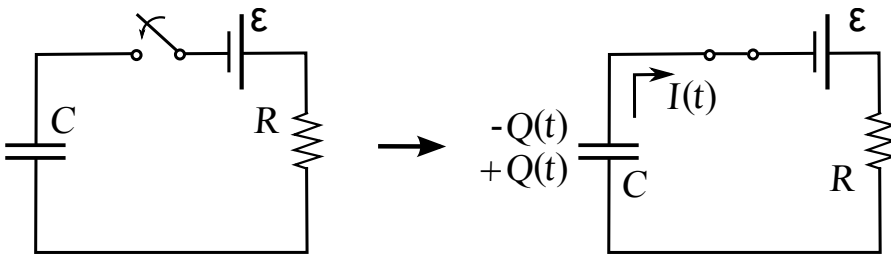


FIGURA 2.6: Esquema de la carga de un condensador a través de un circuito con una resistencia R y un generador de fuerza electromotriz ξ .

suponemos el condensador inicialmente descargado $Q(t = 0) = 0$, entonces a partir de dicho momento el generador provoca un movimiento de cargas entre las placas del condensador que sólo cesará cuando la diferencial de potencial entre las placas del mismo se iguale al valor de la fuerza electromotriz. Aplicando la regla de Kirchooff de las tensiones al circuito tenemos que

$$\xi = V_C + V_R, \quad (2.55)$$

ecuación que podemos reescribir como

$$\xi = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\xi}{R}. \quad (2.56)$$

Esta ecuación diferencial es muy similar a (2.52) excepto en el miembro no nulo de la derecha. La solución es similar a la de (2.52) aunque ahora debemos añadir un término más, y así obtendremos que

$$Q(t) = C\xi + Q'e^{-t/RC}. \quad (2.57)$$

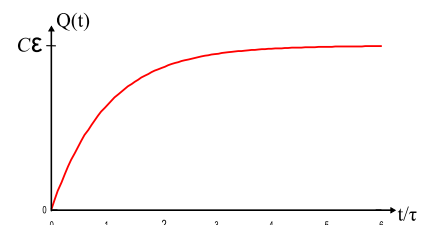
El coeficiente Q' podemos obtenerlo a partir de la *condición inicial* para la carga, que nos decía que $Q(t = 0) = 0$. Aplicando esta condición a (2.57) obtenemos que

$$C\xi + Q = 0 \Rightarrow Q' = -C\xi,$$

lo que nos permite escribir finalmente que

$$Q(t) = C\xi \left(1 - e^{-t/RC}\right). \quad (2.58)$$

Notemos que el proceso de carga viene caracterizado por una función monótonamente creciente, de manera que el tránsito de carga dura aproximadamente un tiempo $t \approx 4\tau$. Dependiendo de los valores de R y C este intervalo de carga (y también el de descarga) puede durar desde tiempos casi infinitesimales hasta tiempos del orden de segundos.



Actividad 2.11:

- ¿Por qué necesitamos una fuente de tensión para cargar un condensador? ¿Es esta fuente necesaria en el proceso de descarga de dicho condensador? Explique las diferencias.
- Intente razonar por qué necesitamos añadir un término extra en la solución de la ecuación (2.56) para tener en cuenta que el miembro de la derecha no es nulo.
- Halle $Q(t)$ en el proceso de carga de un condensador conectado en serie con una resistencia R que inicialmente estaba cargado con la mitad de la carga final, $Q(0) = Q_f/2$.
- Encuentre $Q(t)$ en el proceso de carga de dos condensadores conectados en serie con una resistencia R . Encuentre igualmente los valores de $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$.
- Repita el cálculo anterior si C_1 y C_2 se conectan en paralelo.

2.8. Problemas propuestos

2.1: En un tubo fluorescente de 3 cm de diámetro pasan por un punto y por cada segundo 2×10^{18} electrones y $0,5 \times 10^{18}$ iones positivos (con una carga $+q_e$). ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el tubo?

Sol. 0,4 A.

2.2: Para saber la longitud del cable que ha sido arrollado en una bobina se mide la resistencia de este cable, encontrándose un valor de $5,18 \Omega$. Si la resistencia de una longitud de 200 cm de este mismo cable es de $0,35 \Omega$, ¿cuál era la longitud inicial del cable en la bobina?

Sol. $l = 2960$ cm.

2.3: a) ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en el interior de un conductor de cobre de resistividad $\rho = 1,72 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ si éste está recorrido por una corriente eléctrica de densidad de corriente $|\vec{j}| = 2,54 \times 10^6 \text{ A/m}^2$. b) ¿Cuál sería la diferencia de potencial entre dos puntos separados 100 m?

Sol. a) $|\vec{E}| = 43,7 \text{ mV/m}$; b) $\Delta V = 4,37 \text{ V}$.

2.4: Cierta dispositivo mueve una carga de 1.5 C una distancia de 20 cm en una región del espacio sometida a un campo eléctrico uniforme de módulo $|\vec{E}| = 2 \times 10^3 \text{ N/C}$. ¿Qué fuerza electromotriz desarrolla el dispositivo?

Sol. $\xi = 400 \text{ V}$.

2.5: ¿Cuánto calor produce en 5 minutos una resistencia eléctrica de hierro recorrida por una intensidad de 5 A y sometida a una diferencia de potencial de 120 V?

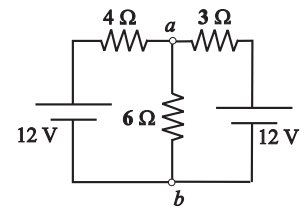
Sol. Calor $\approx 1,8 \times 10^5 \text{ J}$.

2.6: Dos conductores de la misma longitud pero distinta área de sección transversal se conectan en serie y en paralelo. ¿Qué conductor de la combinación disipará más calor si ambas son sometidas a la misma diferencia de potencial?

Sol. Serie: el conductor con menor área; Paralelo: el conductor con mayor área.

2.7: En el circuito de la figura, determine: **a)** la corriente en cada resistencia; **b)** la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*; y **c)** la potencia suministrada por cada batería.

Sol.: **a)** $I_4 = 2/3 \text{ A}$, $I_3 = 8/9 \text{ A}$, $I_6 = 14/9 \text{ A}$; **b)** $V_b - V_a = -28/3 \text{ V}$; **c)** 8 W suministradas por la batería de la izquierda, $32/3 \text{ W}$ suministrados por la otra.

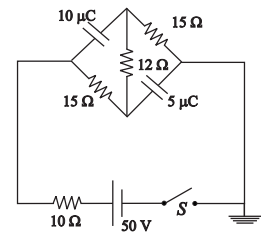


2.8: Se dispone de dos baterías, una con $\xi_1 = 9 \text{ V}$, $r_1 = 0,8 \Omega$ y otra con $\xi_2 = 3 \text{ V}$, $r_2 = 0,4 \Omega$. **a)** Cuando las baterías se conectan entre ellas en serie y paralelo, calcule la intensidad que pasaría por una resistencia que puede tomar dos valores, $R = 0,2 \Omega$ y $R = 1,5 \Omega$. **b)** ¿Cómo deben conectarse las baterías en los casos anteriores para dar la máxima intensidad a través de *R*?

Sol.: **a)** serie: $I_{0,2} = 8,57 \text{ A}$, $I_{1,5} = 4,44 \text{ A}$; paralelo: $I_{0,2} = 28,85 \text{ A}$, $I_{1,5} = 3,39 \text{ A}$. **b)** En paralelo para *R* pequeño, en serie para *R* grande.

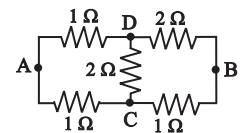
2.9: Los condensadores del circuito de la figura están inicialmente descargados. **a)** ¿Cuál es el valor inicial de la corriente suministrada por la batería cuando se cierra el interruptor *S*? **b)** ¿Cuál es la intensidad de la corriente de la batería después de un tiempo largo? **c)** ¿Cuáles son las cargas finales en los condensadores?

Sol.: **a)** 3,42 A; **b)** 0,962 A; **c)** $Q_{10} = 260 \mu\text{C}$, $Q_5 = 130 \mu\text{C}$.



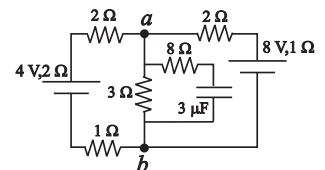
2.10: En el circuito de la figura se conecta entre los puntos A y B una batería de 10 V y de resistencia interna 1Ω . Determinése: **a)** la corriente por la batería; **b)** la resistencia equivalente entre A y B; **c)** la diferencia de potencial entre las placas de un condensador que se conectase entre los nodos C y D.

Sol.: **a)** $32/7 \text{ A}$; **b)** $1,18 \Omega$; **c)** $4/7 \text{ V}$.



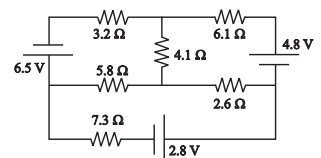
2.11: En el circuito de la figura, obtenga: **a)** la intensidad en cada rama, **b)** la d.d.p. entre *a* y *b* por todos los caminos posibles, **c)** la carga del condensador **d)** la potencia suministrada por las fuentes y la consumida por las resistencias.

Sol.: **a)** 0 A, $4/3 \text{ A}$, $4/3 \text{ A}$; **b)** 4 V; **c)** $12 \mu\text{C}$; **d)** suministradas: $P(\xi = 4\text{V}) = 0 \text{ W}$, $P(\xi = 8\text{V}) = 10,67 \text{ W}$; consumidas: $P = 10,76 \text{ W}$.



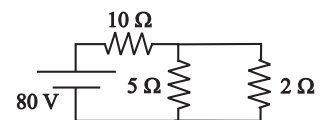
2.12: Determine las corrientes en el circuito de la figura.

Sol.: 1.1 A, 0.87 A, 0.73 A, 0.36 A, 0.15 A y 0.22 A.



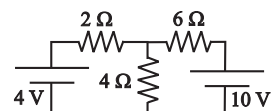
2.13: En el circuito de la figura: **a)** determine las corrientes; **b)** obtenga el balance de potencia.

Sol.: **a)** 7 A, 2 A y 5 A; **b)** suministrada: 560 W; consumidas: $P(R = 10) = 490 \text{ W}$, $P(R = 5) = 20 \text{ W}$, $P(R = 2) = 50 \text{ W}$.



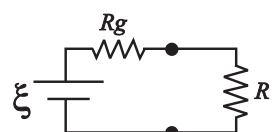
2.14: Obtenga la corriente por $R = 6 \Omega$ por dos métodos: **a)** utilizando las leyes de Kirchoff; **b)** mediante el equivalente de Thévenin.

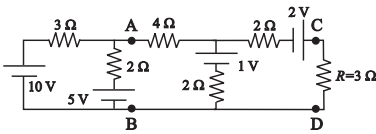
Sol.: **a)** $i_{R=6} = 1 \text{ A}$; **b)** $V_{Th} = 22/3 \text{ V}$ y $R_{Th} = 4/3 \Omega$, $i_{R=6} = 1 \text{ A}$.



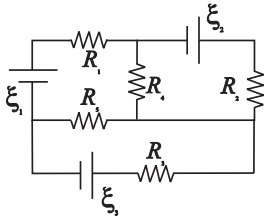
2.15: En el circuito de la figura, determine la potencia consumida en la resistencia de carga *R* y encuentre el valor de dicha resistencia para el cual la potencia antes calculada es máxima. Complete el estudio anterior representando gráficamente la función potencia consumida en *R* en función del valor de *R*.

Sol.: $P(R) = \xi^2 R / (R + R_g)^2$; $P(R)$ es máxima si $R = R_g$.

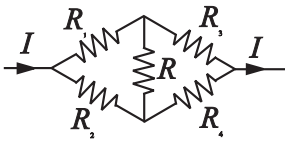




2.16: En el circuito de la figura, calcule la intensidad que circula por la resistencia $R = 3\ \Omega$ utilizando dos técnicas diferentes: **a)** leyes de Kirchoff; **b)** aplicando sucesivamente el equivalente de Thévenin, primero entre los puntos A y B y seguidamente entre los puntos C y D.
Sol: **a)=b)** $i_{R=3} = 21/29\ \text{A}$.



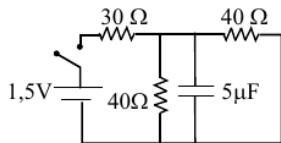
2.17: Plantee las ecuaciones de Kirchoff para el circuito de la figura. Una vez planteadas, considérese ahora que $R_5 = R_3$ y bajo esta hipótesis elija un posible conjunto de valores para las fuentes de tensión de forma que la intensidad que circula por la fuente ξ_1 sea nula.
Sol: Una posible solución sería $\xi_1 = 1\ \text{V}$, $\xi_2 = 0\ \text{V}$ y $\xi_3 = 2\ \text{V}$. Obsérvese que existen infinitas soluciones.



2.18: En el circuito de la figura, encuentre la relación entre las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 para que la intensidad por la resistencia R sea nula.
Sol: $R_1 R_4 = R_2 R_3$.

2.19: Tenemos un condensador de capacidad C conectado en serie a un resistencia R y alimentado por un generador de CC. **a)** Halle el intervalo de tiempo necesario para que la carga en el condensador alcance el 50 % de su valor final. **b)** Una vez que el condensador alcanza su máxima carga Q_0 (digamos en $t = 0$), procedemos a descargar este condensador mediante la sustitución del generador por un cortocircuito. En dicho proceso, halle la cantidad de energía que suministra el generador pasado un tiempo t . ¿En qué se transforma dicha energía?

Sol: **a)** $t = RC \ln 2$; **b)** $\Delta U = \frac{Q_0^2}{2C} \left[1 - e^{-2t/(RC)} \right]$.



2.20: Teniendo en cuenta el comportamiento de un condensador en el inicio ($t = 0$) de su proceso de carga y al final del mismo, **a)** halle la corriente que suministra el generador en el circuito de la figura para $t = 0$ y una vez que el condensador se ha cargado. **b)** Si el proceso anterior se repite ahora con un generador distinto de manera que la carga final en el condensador resulta ser de $9\ \mu\text{C}$, halle la fem del generador y también las corrientes al inicio y al final del proceso de carga.

Sol: **a)** 50 mA, 30 mA, 3 μC ; **b)** 4, 5 V, 150 mA; 90 mA.

TEMA 3

Magnetostática

3.1. Introducción

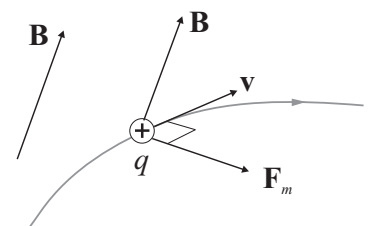
En los temas precedentes se han estudiado las interacciones entre distribuciones de carga invariantes en el tiempo (Tema 1) así los flujos de carga en circuitos de corriente continua (Tema 2). Todas las posibles interacciones y fenómenos pudieron ser descritos en función de campos y potenciales eléctricos y sus efectos sobre las cargas.

Desde muy antiguo es también conocido que existe en la naturaleza una fuerza cuyo origen no está ligado a las cargas eléctricas estáticas pero que sin embargo tiene efectos sobre las cargas eléctricas *en movimiento*. Esta nueva interacción es conocida con el nombre de interacción *magnética* y se manifiesta, por ejemplo, en las fuerzas de atracción y repulsión entre imanes y/o cables que transportan corrientes, en la atracción de trozos de hierro (y otros metales) por imanes o bien en la orientación permanente de una aguja imantada hacia el Norte magnético de la Tierra. El estudio de esta nueva interacción (tal como se hizo en el caso de la Electroestática) se llevará a cabo mediante la introducción de un campo vectorial llamado **campo magnético** \vec{B} . Esto nos permitirá estudiar la interacción magnética obviando las fuentes que la producen. En el presente tema sólo estaremos interesados en estudiar los *campos magnéticos que no varían en el tiempo*, es decir, los campos *magnetostáticos* y, en consecuencia, este tema se denomina **Magnetostática**.

3.2. Fuerza de Lorentz

Supuesta una región del espacio donde existe un campo magnético \vec{B} , *experimentalmente* se encuentra que sobre una carga prueba, q , que se mueve a una velocidad \vec{v} (medida en el mismo sistema de referencia donde se ha medido \vec{B}) actúa una fuerza, \vec{F}_m , con las siguientes características:

- La fuerza es proporcional al producto $q|\vec{v}|$. Esto implica que esta fuerza



no actúa sobre partículas neutras o bien sobre partículas cargadas en reposo.

- La fuerza también es proporcional al módulo del campo magnético $|\vec{B}|$.
- La dirección de la fuerza es normal al plano formado por los vectores \vec{v} y \vec{B} , siendo nulo su módulo cuando \vec{v} es paralelo a \vec{B} y máximo cuando $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Los anteriores resultados experimentales pueden ser descritos en forma matemática por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.1)$$

El producto vectorial (ver Apéndice) de $q\vec{v}$ por \vec{B} determina completamente la fuerza magnética sobre una carga móvil. A partir de la anterior expresión puede deducirse que las unidades de campo magnético en el SI, llamadas **teslas** (T), vendrán dadas por

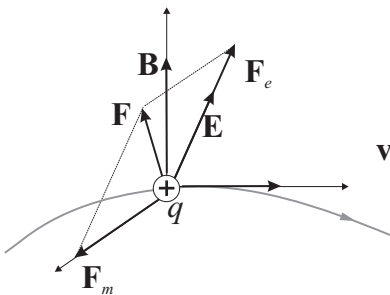
$$1\text{ T} = 1 \frac{\text{N/C}}{\text{m/s}}. \quad (3.2)$$

La unidad de campo magnético es una unidad relativamente *grande*, esto es, es difícil conseguir campos magnéticos del orden de los teslas o mayores. De hecho, el campo magnético terrestre es del orden de 10^{-4} T. Por esta razón suele usarse como unidad de campo magnético el **gauss** (G), de modo que

$$1\text{ T} = 10^4\text{ G}. \quad (3.3)$$

Si en una región del espacio, además del campo magnético \vec{B} , existe un campo eléctrico \vec{E} , el físico H.A. Lorentz (1853-1928) propuso que la fuerza total sobre una carga puntual q , o **fuerza de Lorentz**, podía escribirse como la superposición de la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e = q\vec{E}$, más la fuerza magnética, $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, esto es,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.4)$$



Unidad de campo magnético
1 tesla (T)

Actividad 3.1:

- Describa las posibles ventajas que nos aporta el definir un campo magnético para estudiar la interacción magnética.
- Hipotéticamente, ¿podríamos haber definido la fuerza magnética en (3.1) usando un producto escalar en vez de un producto vectorial? Justifique su respuesta.
- Enumere las principales diferencias entre la fuerza magnética y la eléctrica cuando dichas fuerzas actúan sobre una carga puntual.
- ¿Podría anticipar algunas consecuencias físicas del hecho de que la fuerza magnética haya sido definida en función del producto vectorial de los vectores velocidad y campo magnético?

3.2.1. Movimiento de una carga puntual en presencia de un campo magnético

Antes de tratar la fuerza magnética, es importante recordar que la resultante de las fuerza externas, $\vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$, que actúa sobre una partícula puede descomponerse en dos partes, una tangente al movimiento, \vec{F}_τ , y otra normal, \vec{F}_n :

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = F_\tau \hat{\tau} + F_n \hat{n}.$$

En consecuencia, la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

puede reescribirse (teniendo en cuenta que $\vec{v} = |\vec{v}| \hat{\tau}$) como

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \hat{\tau}) &= m \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{\tau} + m |\vec{v}| \frac{d\hat{\tau}}{dt} \\ &= m \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{\tau} + m \frac{|\vec{v}|^2}{r} \hat{n} \\ &= F_\tau \hat{\tau} + F_n \hat{n}, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$F_\tau = m \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad (3.5)$$

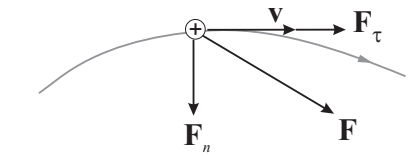
$$F_n = m \frac{|\vec{v}|^2}{r}, \quad (3.6)$$

siendo r el radio de curvatura de la trayectoria.

Una vez que hemos visto las anteriores características generales de la ecuación de movimiento, centrémonos en el caso de una partícula de masa m y carga q en el seno de una región donde existe un campo magnético \vec{B} . En esta caso, la ecuación de movimiento viene dada por

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

donde podemos observar que la fuerza magnética es una fuerza normal, dado que \vec{F}_m es perpendicular a \vec{v} (debido a la presencia del producto vectorial). Consecuentemente, podemos deducir que



Fuerza magnética es una fuerza normal

- Como la componente tangencial de \vec{F}_m es nula ($F_\tau = 0$), según (3.5) tenemos que $d|\vec{v}|/dt = 0$; es decir, la fuerza magnética no cambia el módulo de la velocidad sino simplemente su dirección ($|\vec{v}| = \text{cte}$).
- La fuerza magnética no realiza trabajo sobre la partícula con velocidad \vec{v} . Si tenemos en cuenta que el diferencial de trabajo a lo largo de la trayectoria de la partícula, dado por el producto escalar $\vec{F}_m \cdot d\vec{l}$, puede reescribirse como $\vec{F}_m \cdot \vec{v} dt$ ($d\vec{l} = \vec{v} dt$), entonces comprobamos que es nulo al ser $\vec{F}_m \perp \vec{v}$.

- Puesto que $F_n = |\vec{F}_m|$, (3.6) y (3.7) nos dicen que

$$m \frac{|\vec{v}|^2}{r} = q|\vec{v}||\vec{B}| \operatorname{sen} \theta, \quad (3.8)$$

(siendo θ el ángulo formado por \vec{v} y \vec{B}) por lo que el módulo de la velocidad será

$$|\vec{v}| = \frac{q|\vec{B}|r}{m} \operatorname{sen} \theta. \quad (3.9)$$

Si el vector velocidad se expresa como suma de dos componentes, una paralela a \vec{B} y otra perpendicular:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp},$$

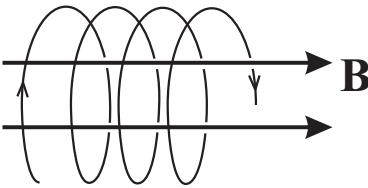
la fuerza magnética puede expresarse como

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}.$$

Dado que \vec{F}_m carece de proyección a lo largo de \vec{B} , podemos escribir las siguientes ecuaciones para las velocidades \vec{v}_{\parallel} y \vec{v}_{\perp} :

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{F}_m = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}. \quad (3.11)$$



Estas ecuaciones nos dicen que la componente de la velocidad paralela a \vec{B} no cambia por efecto del campo magnético ($\vec{v}_{\parallel} = \text{Cte}$), y que la componente perpendicular, \vec{v}_{\perp} , es afectada por una fuerza normal a ésta que únicamente cambia su sentido. Estos hechos dan lugar a que el movimiento de la partícula pueda descomponerse en un movimiento uniforme a lo largo de la dirección marcada por \vec{B} (supuesto que $\vec{v}_{\parallel} \neq 0$) junto con un movimiento circular en un plano perpendicular, es decir, la trayectoria de la partícula es de tipo helicoidal a lo largo de un eje dirigido según \vec{B} .

En el caso particular de que la velocidad inicial de la partícula no tuviese componente paralela al campo magnético, $\vec{v}_{\parallel} = 0$, el movimiento de ésta en la región donde existe \vec{B} será un *movimiento circular* puro. El radio R del círculo recorrido por la partícula puede deducirse a partir de (3.8) ($\theta = \pi/2$):

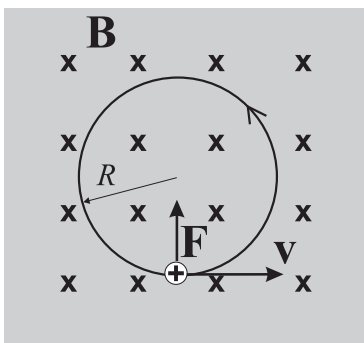
$$m \frac{|\vec{v}|^2}{R} = q|\vec{v}||\vec{B}|,$$

esto es,

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}. \quad (3.12)$$

Recordando la relación entre la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la velocidad lineal \vec{v} , tenemos que $|\vec{\omega}| = |\vec{v}|/R = 2\pi/T$ y, por tanto, el periodo de este movimiento vendrá dado por

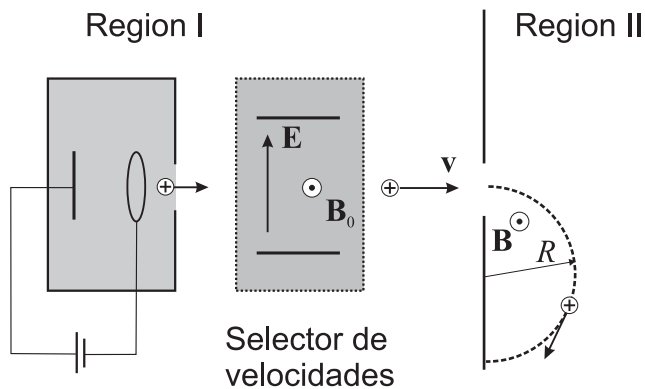
$$T = 2\pi \frac{m}{q|\vec{B}|}. \quad (3.13)$$



Actividad 3.2:

- ¿Cuáles son las consecuencias más relevantes del hecho de que la fuerza magnética sea siempre normal a la trayectoria de la partícula cargada?
- Explique las razones por las que el campo magnético nunca realiza trabajo sobre partículas cargadas en movimiento. ¿Significa esto que el campo magnético no ejerce ninguna acción sobre la partícula? Justifique su respuesta.
- Describa las condiciones que hacen que la trayectoria de una partícula cargada en una región con un campo \vec{B} sea helicoidal.
- ¿Cuándo se hace dicha trayectoria circular? Deduzca el periodo de este movimiento y explique cómo podríamos incrementar su valor.

EJEMPLO 3.1 Determinar la masa de una partícula de carga $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ que al penetrar en una región con un campo $|\vec{B}| = 4000 \text{ G}$ describe un círculo de radio $R = 21 \text{ cm}$, habiendo sido previamente seleccionada su velocidad con una disposición como muestra la figura con $|\vec{E}| = 3,2 \times 10^5 \text{ V/m}$.



En el selector de velocidades, se cumplirá que sólo aquellas partículas para las que se verifique

$$|\vec{F}_e| = |\vec{F}_m| \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{v}||\vec{B}_0|$$

pasarán a la región II. En consecuencia las partículas que llegan a esta región tendrán una velocidad:

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}_0|} = \frac{3,2 \times 10^5}{0,4} \text{ m/s} = 8,05 \times 10^6 \text{ m/s} .$$

Una vez en la región II, las partículas por efecto de la fuerza magnética normal a la trayectoria describirán un círculo de radio:

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}$$

y por tanto su masa será

$$m = \frac{qR|\vec{B}|}{|\vec{v}|} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 0,21 \times 0,4}{8,05 \times 10^6} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} .$$

Dada la carga y masa de la partícula, se puede concluir que ésta es un protón.

3.2.2. Efecto Hall (*)

Se conoce como *efecto Hall* a la aparición de una diferencia de potencial entre los extremos transversales de un conductor por el que circula una corriente cuando éste es sometido a un campo magnético externo.

Este fenómeno es fácilmente detectable para el caso de un conductor en forma de paralelepípedo (por ejemplo, una cinta conductora) y con un campo magnético aplicado normal al conductor. Nótese que para los casos de corriente eléctrica sostenida por cargas positivas y negativas mostrados en la figura 3.1(a) y (b) respectivamente, y dado que $q\vec{v}$ tiene el mismo sentido

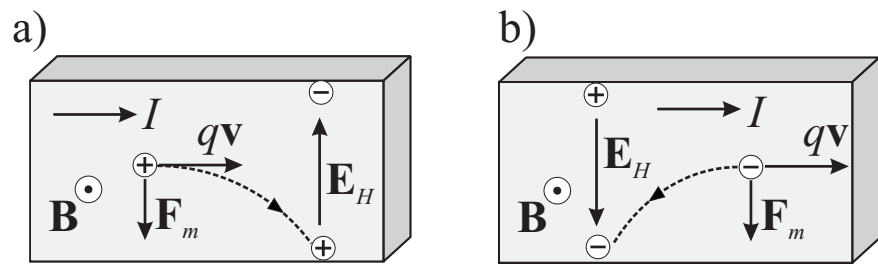


FIGURA 3.1: Corriente eléctrica hacia la derecha sostenida por (a) cargas positivas y (b) cargas negativas

en ambos casos, la fuerza magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ hace que los portadores de carga móviles deriven hacia la cara inferior de la cinta conductora, acumulándose allí. Debido a la neutralidad de la carga en el interior del conductor, el exceso de carga en esta cara de la cinta es compensado por la aparición de una carga igual pero de sentido contrario en la otra cara de la cinta conductora. La existencia de esta separación de cargas da lugar a la aparición de un campo \vec{E}_H de origen electrostático y, por tanto, a la existencia de una fuerza eléctrica \vec{F}_e que se opondrá a \vec{F}_m . Este proceso de deriva de portadores libres de carga tiene lugar hasta que la fuerza magnética es estrictamente compensada por la fuerza eléctrica, esto es, cuando

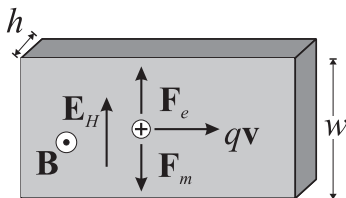
$$\begin{aligned} |\vec{F}_m| &= |\vec{F}_e| \\ q|\vec{v}||\vec{B}| &= q|\vec{E}_H| , \end{aligned}$$

por lo que el campo eléctrico Hall que se instaura alcanza finalmente un valor

$$|\vec{E}_H| = |\vec{v}||\vec{B}| . \quad (3.14)$$

La presencia de este campo eléctrico Hall da lugar a una diferencia de potencial entre los extremos de la cinta de anchura w dado por

$$V_H = |\vec{v}||\vec{B}|w . \quad (3.15)$$



Esta diferencial de potencial se conoce **voltaje Hall**, V_H , y ha sido obtenida suponiendo que el campo \vec{E}_H puede considerarse uniforme en el interior de la cinta conductora.

Dado que el módulo de la velocidad de los portadores puede deducirse de

$$I = |\vec{j}| |\vec{S}| = (nq|\vec{v}|)(wh) ,$$

esto es,

$$|\vec{v}| = \frac{I}{nqwh} ,$$

el voltaje Hall puede expresarse como

$$V_H = R_H \frac{I|\vec{B}|}{h} , \quad (3.16)$$

Voltaje Hall

donde $R_H = 1/nq$ se conoce como *coeficiente de Hall*.

Es interesante destacar que mientras que el sentido de la corriente no aporta ninguna información sobre el signo de los portadores de carga móviles, la medida del voltaje Hall permitiría distinguir el signo de la carga móvil, tal y como se hace patente al comparar las figuras 3.1(a) y (b). A finales del siglo pasado, el efecto Hall permitió comprobar que la corriente en los buenos conductores metálicos, como Au, Ag, Cu, Pt, ... , estaba efectivamente sostenida por portadores de carga negativa, esto es, electrones. No obstante, analizando otros conductores (y algunos semiconductores) como Fe, Co, Zn, ... , se descubrió sorprendentemente que la corriente eléctrica parecía estar sostenida en estos materiales por *cargas positivas*. Este hecho no encontró ninguna explicación en aquel momento y hubo que esperar hasta el desarrollo de la teoría cuántica de los electrones en sólidos (Teoría de Bandas) para hallar una explicación satisfactoria a este fenómeno.

Además del uso del efecto Hall para determinar el signo de los portadores (así como la densidad de éstos, supuesta conocida su carga), éste suele utilizarse en la construcción de *teslámetros*, esto es, medidores de campo magnético. Para medir el campo magnético puede construirse una sonda Hall en la que R_H es conocido y por la que se hace pasar una intensidad determinada. Si se mide el voltaje Hall, el valor del campo magnético puede obtenerse fácilmente a partir de la expresión (3.16).

EJEMPLO 3.2 En una región donde existe un campo magnético de 1,5 T, una tira conductora de cobre de espesor 1 mm y anchura 1,5 cm transporta una corriente de 2 A, produciéndose un voltaje Hall de 0.22 μV. Calcular la densidad de portadores de carga y comparar con el resultado para este dato que ya se obtuvo en el Ejemplo 2.1.

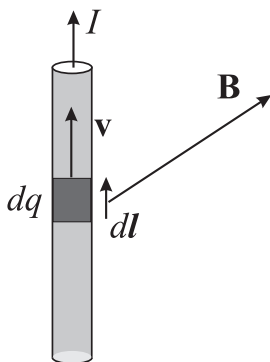
Dado que el voltaje Hall viene dado por la expresión

$$V_H = \frac{I|\vec{B}|}{nqh} ,$$

la densidad de portadores será

$$n = \frac{I|\vec{B}|}{qhV_H} = \frac{2 \times 1,5}{1,6 \times 10^{-19} \times 0,001 \times 0,22 \times 10^{-6}} \\ \approx 8,45 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

Puede comprobarse que este dato es muy similar al número de átomos por m^3 que se obtuvo en el Ejemplo 2.1. Esto permite verificar que efectivamente cada átomo de cobre contribuye con un solo electrón de conducción.



3.3. Fuerzas magnéticas sobre conductores

3.3.1. Fuerza magnética sobre un hilo

La expresión (3.1) describía la fuerza que ejercía un campo magnético \vec{B} sobre una carga prueba q con una velocidad \vec{v} respecto al campo magnético. A partir de esta expresión puede obtenerse fácilmente la fuerza que ejerce el campo magnético sobre un hilo conductor recorrido por una corriente I . Para ello consideremos que sobre cada elemento diferencial de carga móvil del hilo conductor, dq , se ejercerá una fuerza de valor

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.17)$$

Dado que el elemento diferencial de carga móvil forma parte de la corriente I , éste puede expresarse como $dq = Idt$ y, por tanto, escribir

$$dq\vec{v} = I\vec{v}dt = Id\vec{l},$$

donde $d\vec{l} = \vec{v}dt$ es un vector cuyo módulo es un diferencial de longitud a lo largo del hilo y su sentido es el de recorrido de la corriente eléctrica. Sustituyendo ahora $dq\vec{v}$ en (3.17) tenemos que

$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.18)$$

y, consecuentemente, la fuerza total sobre un hilo recorrido por una intensidad I vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = \int d\vec{F}_m = \int_{\text{hilo}} Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.19)$$

En aquellas situaciones en las que tanto I como \vec{B} no varíen a lo largo de todo el hilo, la expresión anterior puede reescribirse como

$$\vec{F}_m = I \left(\int_{\text{hilo}} d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.20)$$

donde \vec{l} es un vector cuyo módulo es la longitud total del hilo y su sentido coincide con el de la corriente eléctrica.

Fuerza magnética sobre un hilo

Actividad 3.3:

- ¿Qué cargas intervienen en la corriente eléctrica que fluye por un hilo conductor?
- Explique cómo se deduce (3.17) a partir de (3.1).
- Describa las condiciones bajo las que la Ec.(3.20) es válida.
- Si una porción de un hilo de corriente es curvada, pinte el vector \vec{l} asociada a esta porción. ¿Qué ocurre si el hilo de esta porción se cierra sobre sí mismo y se convierte en una espira?

3.3.2. Momento de la fuerza sobre una espira de corriente

En el caso de una espira de corriente (conductor filiforme cerrado sobre sí mismo) recorrida por una intensidad I , la fuerza magnética sobre ésta, de acuerdo a la expresión (3.19), viene dada por

$$\vec{F}_m = I \oint_{\text{espira}} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.21)$$

Si se considera ahora el caso particular y usual en el cual el campo \vec{B} es uniforme en la región donde está inmersa la espira, entonces dado que

$$\vec{F}_m = I \left[\oint_{\text{espira}} d\vec{l} \right] \times \vec{B} \quad \text{siendo} \quad \oint_{\text{espira}} d\vec{l} = 0,$$

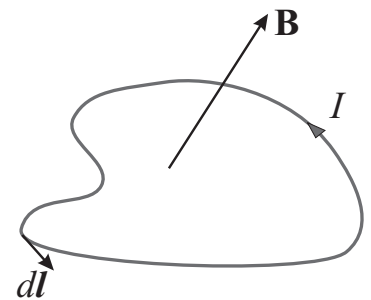
observamos que no se ejerce fuerza magnética neta sobre la espira. No obstante, el hecho de que no haya fuerza total resultante no implica que la espira no se mueva, sino simplemente que la espira no tendrá movimiento de *traslación*. La espira podría “moverse” realizando un movimiento de *rotación* supuesto que el momento de la fuerza en la espira fuese no nulo.

Para calcular el momento dinámico de la fuerza consideraremos la espira rectangular mostrada en la Figura 3.2. La fuerza sobre los lados 1 y 3 es una fuerza de deformación que generalmente está compensada por la resistencia a la deformación del material conductor. Por el contrario, la disposición de las fuerzas sobre los lados 2 y 4 puede reconocerse como un *par de fuerzas* aplicado sobre la espira. El cálculo del momento dinámico, \vec{M} , de este par de fuerzas viene dado por

$$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}, \quad (3.22)$$

donde \vec{b} es el *brazo* de la fuerza. La dirección de \vec{M} es perpendicular a \vec{b} y a \vec{F} (\vec{M} presenta la misma dirección y sentido que \vec{F}_3) y su módulo:

$$|\vec{M}| = |\vec{b}| |\vec{F}| \sin \theta. \quad (3.23)$$



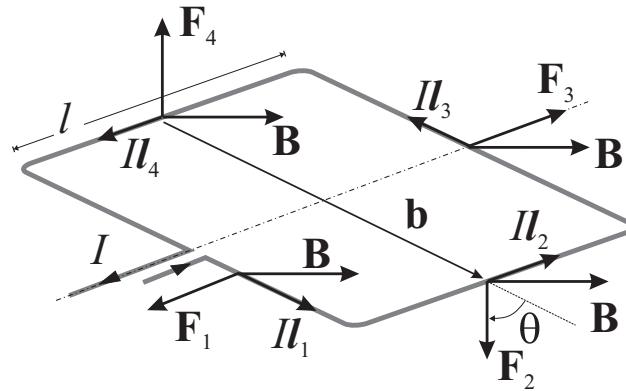


FIGURA 3.2: Fuerzas magnéticas sobre cada uno de los lados de una espira rectangular recorrida por una intensidad I

Teniendo ahora en cuenta que, para este caso, $|\vec{F}| = Il|\vec{B}|$, al sustituir en la expresión anterior tenemos que

$$|\vec{M}| = |\vec{b}|Il|\vec{B}| \sin \theta = IS|\vec{B}| \sin \theta, \quad (3.24)$$

donde $S = |\vec{b}|l$ es el área de la espira.

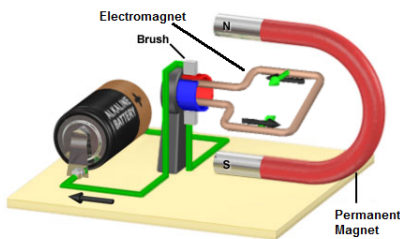
Dado que $|\vec{M}|$ viene dado por (3.24) y su dirección es idéntica a la de \vec{F}_3 , el momento de la fuerza fuerzas puede expresarse como

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad (3.25)$$

donde

$$\vec{m} = NI\vec{S} \quad (3.26)$$

es un vector que se conoce como **momento dipolar magnético** (o simplemente momento magnético), cuyo módulo es $|\vec{m}| = NI|\vec{S}|$ (N número de arrollamientos de la espira) y su dirección y sentido coinciden con las de la normal a la superficie de la espira (el sentido de \vec{m} viene determinado por el sentido de recorrido de la corriente siguiendo la regla de la mano derecha). Es importante notar que aunque la expresión (3.25) se ha deducido para el caso particular de una espira rectangular, esta expresión es válida para cualquier tipo de espira (supuesto que \vec{B} sea uniforme).



El momento de la fuerza sobre la espira recorrida por una corriente eléctrica provoca entonces un giro de la espira sobre su eje tratando de alinear \vec{m} con \vec{B} . La aparición de este momento de la fuerza de origen magnético constituye el fundamento físico del funcionamiento de los **motores eléctricos**. Un esquema elemental de un motor eléctrico es precisamente una espira recorrida por una intensidad que, en presencia de un campo magnético, sufre un par de fuerzas que da lugar a un movimiento de rotación. Dado que la espira tratada anteriormente no giraría de forma continua (el momento del par de fuerzas tendería más bien a hacer *oscilar* la espira), habría que diseñar un dispositivo que hiciera cambiar el sentido del par de fuerzas en el momento adecuado. Si la espira es fijada a algún rotor, se conseguiría transformar energía eléctrica/magnética en energía cinética de rotación, que posteriormente puede transformarse mediante los mecanismos adecuados en energía asociada a cualquier otro tipo de movimiento.

Actividad 3.4:

- Encuentre ejemplos de movimiento rotacional en los que la fuerza neta que actúa sobre el sistema es nula.
- Explique el mecanismo de operación del motor de CC mostrado en la figura anterior.
- En particular, explique la necesidad de cambiar el sentido de la corriente a medida que gira la espira para así hacer que siempre exista un momento de fuerza sobre ella que provoque un giro en el mismo sentido.

EJEMPLO 3.3 Una espira de corriente de forma triangular transporta una corriente en sentido antihorario de valor $I = 1 \text{ A}$. Dicha espira está localizada en el plano $z = 0$ y su lado sobre el eje x mide $a = 60 \text{ cm}$ mientras que su lado sobre el eje y mide $b = 80 \text{ cm}$. Si en esta región hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = 0,2\hat{z} \text{ T}$, a) dibuje y halle el valor de la fuerza magnética sobre cada lado de la espira y verifique que su suma es nula; b) obtenga el valor del momento de la fuerza sobre la espira.

a) Si el campo magnético es uniforme, la fuerza que dicho campo ejerce sobre una porción de hilo recorrido por una intensidad I viene dado por

$$\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$$

donde \vec{l} es el vector que va desde el inicio al final del hilo siguiendo el sentido de la corriente. En el presente caso, teniendo en cuenta la notación usada en la figura adjunta, encontramos que

$$\begin{aligned}\vec{l}_1 &= a\hat{x} \\ \vec{l}_3 &= -b\hat{y} \\ \vec{l}_2 &= -\vec{l}_3 - \vec{l}_1 = b\hat{y} - a\hat{x}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la anterior expresión para la fuerza, obtenemos que

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= I\vec{l}_1 \times \vec{B} = Ia\hat{x} \times B_0\hat{z} = -IaB_0\hat{y} = -0,12\hat{y} \text{ N} \\ \vec{F}_3 &= I\vec{l}_3 \times \vec{B} = -Ib\hat{y} \times B_0\hat{z} = -IbB_0\hat{x} = -0,16\hat{x} \text{ N} \\ \vec{F}_2 &= I\vec{l}_2 \times \vec{B} = I(-a\hat{x} - b\hat{y}) \times B_0\hat{z} = IaB_0\hat{y} + IbB_0\hat{x} = (0,12\hat{y} + 0,16\hat{x}) \text{ N}\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

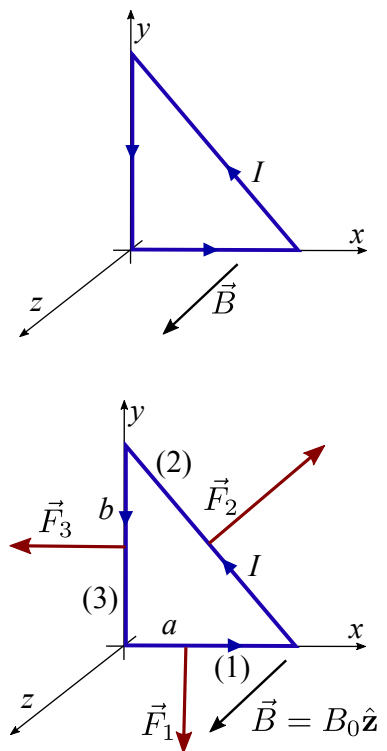
b) Para obtener el momento de la fuerza usamos la expresión (3.25) (válida para campos uniformes). Para ello, debemos notar que el momento magnético de la espira es

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\hat{z} = Iab/2\hat{z}$$

por lo que el momento de la fuerza será

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = Iab/2\hat{z} \times B_0\hat{z} = \vec{0}$$

dado que \vec{m} es paralelo a \vec{B} .

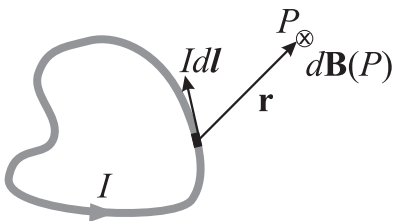


3.4. Ley de Biot-Savart

Hasta ahora se han discutido algunos efectos del campo magnético \vec{B} sin referirnos a las posibles *fuentes* de este campo. Una posible fuente de campo magnético conocida desde muy antiguo son los **imanes** permanentes. Estos imanes son trozos de ciertos materiales (por ejemplo, la magnetita) que tienen entre sus propiedades más aparentes la de atraer fragmentos de hierro. Una carga prueba móvil en presencia de un imán sufre igualmente el efecto de una fuerza magnética que está perfectamente definida por la expresión (3.1). A pesar de que los imanes son conocidos y usados desde hace mucho tiempo, un estudio realista del origen del campo magnético producido por estos imanes sólo puede ser llevado a cabo en el marco de la Física Cuántica y, por tanto, no se abordará esta tarea en el presente tema.

Los experimentos de H. C. Oersted (~ 1820) demostraron que los efectos sobre cargas móviles e hilos de corriente (recogidos en las expresiones (3.1) y (3.19)) producidos por campos magnéticos originados por imanes eran perfectamente reproducidos cuando estos imanes son sustituidos por cargas en movimiento o bien hilos de corriente. Esto implica que, en general, *las cargas eléctricas en movimiento son fuentes del campo magnético*. Dado que en el presente tema sólo estamos interesados en campos *magnetostáticos*, en este apartado estudiaremos únicamente las fuentes que producen este tipo de campos constantes en el tiempo. Experimentalmente se encuentra por tanto que

las fuentes del campo magnetostático son las corrientes eléctricas invariantes en el tiempo.



La forma concreta en que estas corrientes estacionarias crean campos magnéticos viene dada por la **ley de Biot y Savart** (~ 1830) que establece que el campo magnético en el punto de observación, P , producido por un elemento diferencial de corriente, $Id\vec{l}$, que forma parte de una corriente continua viene dado por

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.27)$$

donde \vec{r} es el vector que va desde el elemento diferencial de corriente hasta el punto P donde se evalúa el campo y μ_0 es una constante conocida como **permeabilidad del vacío** de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}. \quad (3.28)$$

Obsérvese que la expresión (3.27) es similar a la obtenida en (1.9) que nos daba el campo electrostático producido por un elemento diferencial de carga. Ambas expresiones muestran la misma dependencia respecto a r , esto es, r^{-2} . No obstante, una importante diferencia entre ambas expresiones es que la dirección del campo es distinta en una y otra. Si, para el caso electrostático, la dirección del campo eléctrico venía determinada por el radiovector

que unía el punto fuente con el punto de observación, para el campo magnetostático la dirección de $d\vec{B}$ viene determinada por el producto vectorial

$$I d\vec{l} \times \hat{r},$$

por lo que la dirección de $d\vec{B}$ en el punto de observación siempre será perpendicular a su radiovector asociado (esto es, $d\vec{B} \perp \hat{r}$). Esta dirección puede obtenerse por la regla de la mano derecha haciendo apuntar el dedo pulgar derecho en la dirección del elemento de corriente, el dedo índice coincidiendo con \vec{r} y el dedo corazón marcando la dirección del campo. Así, por ejemplo, las líneas de campo producidas por un elemento diferencial de corriente serían *circunferencias* concéntricas a un eje dirigido según el elemento de corriente. La discusión anterior indica que *las líneas de \vec{B} no tienen principio ni fin*, pudiendo ser, como en este caso, líneas cerradas.

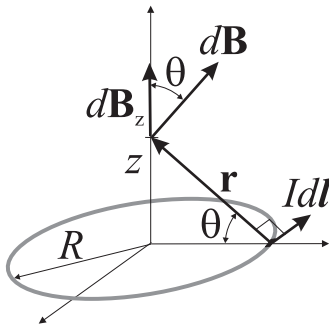
El campo total producido por la corriente continua que circula en una espira podrá, por tanto, escribirse como la integral de (3.27) a lo largo de los diferentes elementos diferenciales de corriente,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{espira}} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.29)$$

Campo magnético debido a una espira de corriente continua

Actividad 3.5:

- Usando las expresiones que nos dan los campos diferenciales electrostático $d\vec{E}$ y magnetostático $d\vec{B}$ en función de sus fuentes elementales, haga un dibujo de cómo serán dichos campos. Explique las similitudes y las diferencias principales entre ellos.
- ¿Por qué es la dirección de $d\vec{B}$ siempre perpendicular al elemento de corriente $I d\vec{l}$ que lo produce?
- ¿Tiene sentido hablar del campo magnetostático producido por un segmento *finito* de un hilo de corriente que forma parte de una espira?
- ¿Tiene sentido hablar del campo magnetostático producido por un segmento *finito* de un hilo de corriente que **NO** forma parte de una espira?
- ¿Puede encontrar algún caso donde sea fácil llevar a cabo la integración que aparece en (3.29)? Justifique su respuesta.



EJEMPLO 3.4 (*) Cálculo del campo magnético en cualquier punto del eje de una espira circular de radio R .

En la figura adjunta puede apreciarse que $d\vec{l} \perp \vec{r}$ y por tanto el módulo de $d\vec{B}$ para el presente caso viene dado por

$$|d\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}.$$

Dada la simetría del problema, únicamente las componentes de \vec{B} a lo largo del eje z se suman mientras que las perpendiculares a este eje se anulan entre sí. Consecuentemente sólo nos interesa dB_z :

$$\begin{aligned} dB_z(P) &= |d\vec{B}(P)| \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{r^3} \end{aligned}$$

(nótese que $\cos \theta = R/r$). Para obtener el campo total hay que integrar la expresión anterior y dado que tanto r como R permanecen constantes al recorrer la espira, se tiene que

$$\begin{aligned} B_z(P) &= \oint_{\text{espira}} dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \oint_{\text{espira}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

3.5. Ley de Ampère

La ley de Ampère (~ 1830) para el campo magnetostático nos dice que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\Gamma}, \quad (3.30)$$

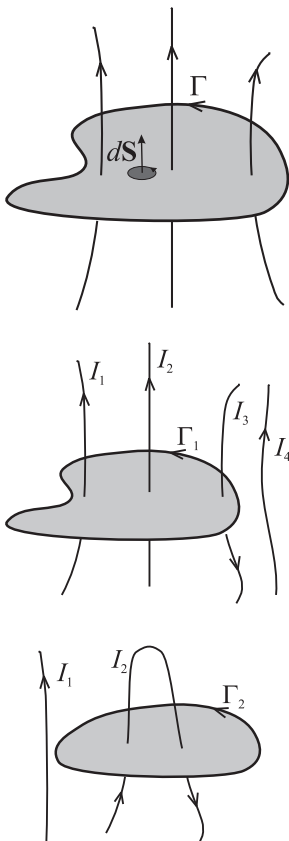
esto es, la circulación del campo magnetostático, \vec{B} , a lo largo de una curva arbitraria Γ es μ_0 veces el flujo de la densidad de corriente, \vec{J} , que atraviesa una superficie $S(\Gamma)$ cuyo contorno es la curva Γ . El sentido de recorrido de la curva Γ determina igualmente el sentido de $d\vec{S}$ (siguiendo la ley de la mano derecha) y por tanto el signo del flujo a través de la superficie. El flujo de la densidad de corriente que atraviesa la superficie $S(\Gamma)$, I_{Γ} , es obviamente el valor de la intensidad de la corriente "interceptada" por la superficie.

En la figura adjunta, la aplicación de la ley de Ampère para la curva Γ_1 establece que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3),$$

dado que I_3 tiene sentido contrario a I_1 e I_2 , mientras que I_4 no atraviesa la superficie apoyada en la curva. Para el caso de la curva Γ_2 , tendremos que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,$$



puesto que la misma intensidad atraviesa en los dos sentidos la superficie apoyada en la curva.¹

Es interesante notar que la ley de Ampère es *siempre válida* cuando se aplica al campo magnetostático pero que sin embargo *no siempre es útil*. Esta ley es particularmente útil para calcular el campo magnético en aquellos casos en los que es posible encontrar una curva Γ tal que la circulación de \vec{B} a lo largo de esa curva pueda expresarse como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| \oint_{\Gamma} dl .$$

Esta situación se encuentra generalmente en situaciones de *alta simetría* donde es posible predecir la forma de las líneas de campo de \vec{B} y por tanto encontrar una curva que sea tangente a las líneas de campo y donde éste sea constante en módulo.

Ley de Ampère siempre válida para campos magnetostáticos y útil para cálculo del campo en situaciones de alta simetría.

3.5.1. Campo magnético producido por un hilo infinito y rectilíneo de radio R recorrido por una intensidad I

En el presente caso, la simetría del problema indica que el módulo del campo magnético sólo puede depender de la distancia al hilo (puntos con la misma distancia ρ al hilo “ven” exactamente las misma disposición de fuentes del campo magnético, por lo que el módulo del campo será el mismo). Con respecto a la dirección del campo, ésta puede deducirse de ley de Biot y Savart (3.27). En la figura puede observarse que la dirección del campo es siempre tangente a una circunferencia centrada en el hilo (puesto que $d\vec{l} \times \vec{r}$ tiene esa dirección). Por tanto, podemos escribir que

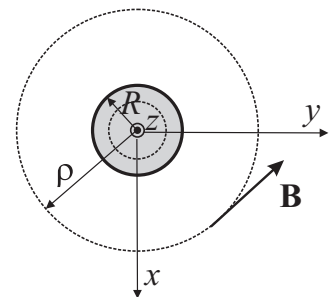
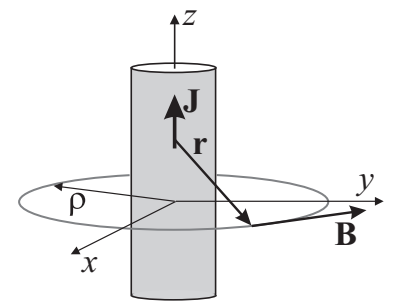
$$\vec{B} = |\vec{B}(\rho)| \hat{\tau} , \quad (3.31)$$

siendo las líneas de campo circunferencias centradas en el hilo, donde además el módulo del campo es constante ($\hat{\tau}$ es el vector unitario tangente a la circunferencia centrada en el hilo). Este hecho sugiere aplicar la ley de Ampère en estas curvas para obtener el valor del campo, obteniendo que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 I_{\Gamma} , \quad (3.32)$$

($\vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| \hat{\tau} \cdot dl \hat{\tau} = |\vec{B}| dl$) donde I_{Γ} es la corriente que atraviesa la superficie interior a Γ . Dado que la intensidad total de corriente, I , que recorre el hilo de radio R es *uniforme*, la densidad de corriente vendrá dada por

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$$



¹ Debe notarse que el hecho de que la circulación de \vec{B} a lo largo de Γ_2 sea cero no implica que \vec{B} sea nulo. De hecho, para el campo electrostático se encontraba que $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ para toda curva Γ . Esto simplemente quería decir que el campo electrostático “derivaba” de un potencial. Dado que para el campo magnetostático, la circulación de éste no es siempre nula, \vec{B} no puede expresarse, en general, como el gradiente de un potencial escalar.

y, por tanto, I_Γ vendrá dada por ($d\vec{S} = |dS|\hat{z}$)

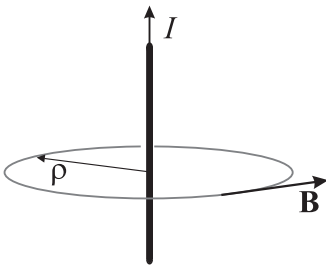
$$I_\Gamma = \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} J\pi\rho^2 & \text{si } \rho \leq R \\ I & \text{si } \rho > R. \end{cases}$$

Al introducir la anterior expresión en (3.32) se tiene que

$$B2\pi\rho = \mu_0 \begin{cases} J\pi\rho^2, & \text{si } \rho \leq R \\ I, & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

de donde se puede obtener finalmente que

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho \hat{\tau}, & \text{si } \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\tau}, & \text{si } \rho > R. \end{cases} \quad (3.33)$$



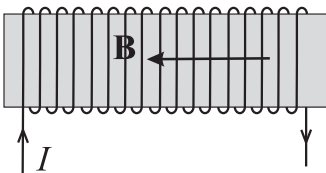
Para el caso particular de un hilo cuyo radio pueda considerarse despreciable, el campo magnético producido por este hilo recto infinito en cualquier punto viene dado por

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\tau}. \quad (3.34)$$

Actividad 3.6:

- Calcule la fuerza magnética que ejerce una corriente I_1 que circula por un hilo recto infinito sobre la corriente I_2 que circula por otro hilo recto infinito paralelo al anterior. Deduzca si esta fuerza es atractiva o repulsiva según el sentido de las corrientes (paralelas o antiparalelas).

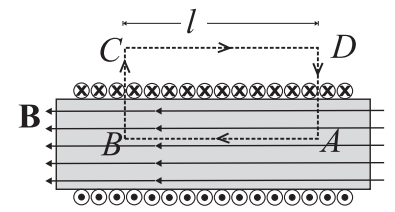
3.5.2. Campo magnético en un solenoide



Un solenoide es básicamente un cable arrollado de manera compacta en forma de hélice o, equivalentemente, una superposición de espiras muy juntas. Un solenoide *esbelto* (más largo que ancho) se usa generalmente para crear campos magnéticos intensos y uniformes dado que el campo magnético en el interior de los solenoides tiene estas características. En este sentido, el solenoide juega el mismo papel respecto al campo magnético que el condensador plano para el campo eléctrico.

Dado que una deducción teórica de la forma de las líneas del campo \vec{B} producido por un solenoide es relativamente complicado, usaremos argumentos *experimentales* para determinar la forma de estas líneas. Los experimentos demuestran que las líneas de campo son aproximadamente líneas

rectas paralelas al eje del solenoide en el interior de éste cerrándose por el exterior de modo que la magnitud del campo magnético exterior se reduce a medida que el solenoide se hace más esbelto. Para el caso de un solenoide infinitamente largo, que puede servir como un modelo aproximado de un solenoide esbelto, *el campo magnético será nulo en el exterior*. Dado que las líneas de campo son paralelas al eje del solenoide y por simetría no pueden variar a lo largo de la dirección paralela al eje (desde cualquier punto de una misma línea el solenoide se ve invariante), la aplicación de la ley de Ampère a la curva $ABCD$ mostrada en la figura nos dice que



$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

ya que $\vec{B} \perp d\vec{l}$ en los tramos de curva \overline{BC} y \overline{DA} y $\vec{B} = 0$ a lo largo de \overline{CD} . Por la forma de las líneas de \vec{B} en el interior del solenoide y teniendo en cuenta que el sentido de \vec{B} está marcado por el sentido de recorrido de la intensidad, obtenemos que

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}|l$$

siendo l la longitud del segmento \overline{AB} . Por otra parte, la intensidad interceptada por el rectángulo interior a la curva $ABCD$ será

$$\int_{S(ABCD)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = NI$$

esto es, intercepta N espiras cada una de ellas transportando una intensidad de corriente I . Teniendo en cuenta los resultados de las dos últimas expresiones y la dirección del campo, podemos concluir según la ley de Ampère que

$$\vec{B}(P) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{u}, & \text{en el interior del solenoide} \\ 0, & \text{en el exterior del solenoide} \end{cases} \quad (3.35)$$

siendo $n = N/l$ el número de espiras por unidad de longitud en el solenoide y \hat{u} el vector unitario en la dirección del eje del solenoide.

Notemos que el campo magnético es uniforme en el interior del solenoide, de forma similar al campo electrostático en el interior de un condensador de placas plano-paralelas.

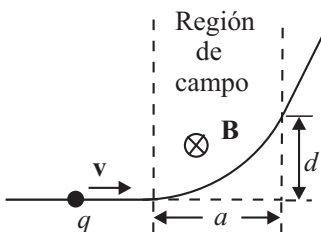
Actividad 3.7:

- Explique cuándo la ley de Ampere es válida y cuándo es útil.
- ¿Cuál es significado preciso del término I_F en la Ec. (3.30)?
- Si la integral de camino de \vec{B} a lo largo de un camino cerrado Γ es nula, ello significa entonces que el campo magnetostático es nulo también. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- Explique por qué la Ec. (3.34) no es válida para el caso de un hilo recto *finito*.
- Describa en qué situación el campo magnético producido por un solenoide no viene dado por la expresión (3.35).

3.6. Problemas propuestos

3.1: ¿Cuál es el radio de la órbita de un protón de energía 1 MeV en el seno de un campo magnético de 10^4 G?

Sol. $R = 14,4$ cm.

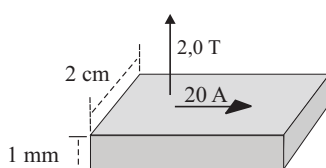


3.2: Una partícula de carga q entra a velocidad \mathbf{v} en una región donde existe un campo magnético uniforme (dirigido hacia el interior de la página). El campo desvía a la partícula una distancia d de su trayectoria original al atravesar la región del campo, como se muestra en la figura. Indicar si la carga es positiva o negativa y calcular el valor de su *momentum* de la partícula, p , en términos de a , d , B y q .

Sol.: es positiva; $p = qB(a^2 + d^2)/(2d)$.

3.3: Un alambre conductor paralelo al eje y y se mueve con una velocidad $\vec{v} = 20 \hat{x}$ m/s en un campo magnético $\vec{B} = 0,5 \hat{z}$ T. **a)** Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre un electrón en el conductor. **b)** Debido a esta fuerza magnética, los electrones se mueven a un extremo del conductor, dejando el otro extremo positivamente cargado hasta que el campo eléctrico debido a esta separación de carga ejerce una fuerza sobre los electrones que equilibra la fuerza magnética. Calcular la magnitud y dirección de este campo eléctrico en estado estacionario. **c)** Si el cable tiene 2 m de longitud, ¿cuál es la diferencia de potencial entre sus dos extremos debido a este campo eléctrico?.

Sol.: **a)** $\vec{F} = 1,6 \times 10^{-18} \text{ N } \hat{y}$; **b)** $\vec{E} = 10 \text{ V/m } \hat{y}$; **c)** $V = 20 \text{ V}$;



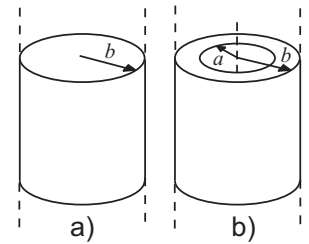
3.4: Una cinta de metal de 2 cm de ancho y 1 mm de espesor lleva soportada una corriente de 20 A. La cinta está situada en un campo magnético de 2 T normal a la misma. En estas condiciones se mide un valor del potencial Hall de $4,7 \mu\text{V}$. Determinar la velocidad media de los electrones de conducción de la cinta así como la densidad de dichos electrones.

Sol.: $v = 1,07 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, $n = 5,85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

3.5: (**) Un conductor cilíndrico de longitud infinita es macizo siendo b el radio de su sección transversal. Por dicho conductor circula una intensidad, I , uniformemente distribuida en su sección transversal. **a)** Determinar el campo \vec{B} en cualquier punto del espacio; **b)** repetir el apartado anterior suponiendo que ahora el cilindro posee una cavidad cilíndrica en su interior de radio a ($a < b$).

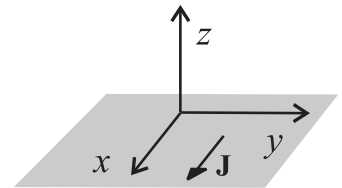
Sol.: **a)** $B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} & \text{si } r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > b \end{cases}$; **b)** $B(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > b \end{cases}$

En ambos apartados, las líneas de campo son circunferencias con centro en el eje del conductor y contenidas en planos perpendiculares al mismo.



3.6: (*) Una placa metálica de espesor despreciable y extensión infinita está situada en el plano $z = 0$. Por dicha placa circula una corriente eléctrica en sentido positivo del eje X . Si dicha intensidad está uniformemente distribuida a razón de $\vec{J} = J\hat{x}$ (A/m) (J representa en este problema la corriente que atraviesa un segmento perpendicular al eje X y de longitud 1 metro), calcular el campo \vec{B} en todo punto del espacio (nota: utilizar el teorema de Ampère).

Sol.: si $z > 0$, $\vec{B} = -\mu_0 J / 2\hat{y}$; si $z < 0$, $\vec{B} = \mu_0 J / 2\hat{y}$.

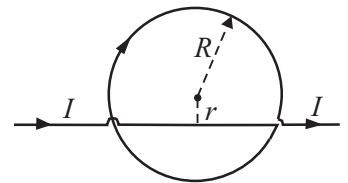


3.7: (*) Repetir el problema anterior si, además de la citada placa, se coloca en el plano $z = -d$ una nueva placa idéntica a la anterior pero que cuya densidad de corriente tiene sentido contrario, esto es, $\mathbf{J} = -J\hat{x}$ (A/m).

Sol.: Entre ambas placas (esto es, $0 > z > -d$), $\vec{B} = \mu_0 J \hat{y}$; para el resto de los puntos (esto es, $z > 0$ o $z < -d$), el campo es nulo.

3.8: (*) Un conductor recto infinitamente largo y circulado por una intensidad I se dobla en la forma indicada en la figura. La porción circular tiene un radio $R = 10$ cm con su centro a distancia r de la parte recta. Determinar r de modo que el campo magnético en el centro de la porción circular sea nulo.

Sol. $r = 3,18$ cm.

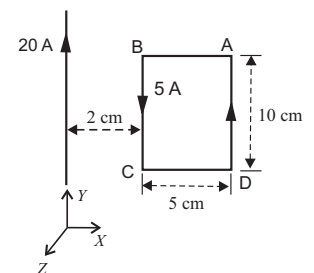


3.9: Dos conductores filiformes rectos y paralelos entre sí de longitud 90 cm están separados una distancia de 1 mm. Si ambos conductores son recorridos por una corriente de 5 A en sentidos opuestos, ¿cuál es la magnitud y el sentido de las fuerzas entre ambas corrientes?

Sol.: 4,5 mN, siendo una fuerza repulsiva.

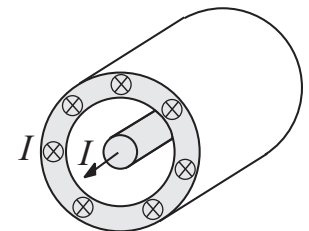
3.10: Por un conductor rectilíneo de longitud infinita circula una corriente de 20 A, según se indica en la figura. Junto al conductor anterior se ha dispuesto una espira rectangular cuyos lados miden 5 cm y 10 cm. Por dicha espira circula una corriente de 5 A en el sentido indicado en la figura. **a)** Determinar la fuerza sobre cada lado de la espira rectangular así como la fuerza neta sobre la espira; **b)** calcular el flujo a través de la espira del campo \vec{B} creado por el conductor rectilíneo.

Sol. a) lado AB: $-2,5 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{y}$, lado BC: $10^{-4} \text{ N } \hat{x}$, lado CD: $2,5 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{y}$, lado DA: $-2,85 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{x}$, $\vec{F}_{\text{neta}} = 7,15 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{x}$; **b)** $\Phi = 5,01 \times 10^{-7}$ weber.

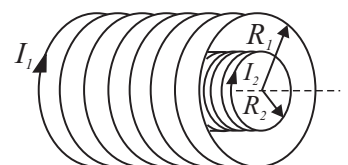


3.11: El cable coaxial de la figura transporta una intensidad I por el conductor interno y la misma intensidad pero en sentido contrario por el externo. Utilizando la ley de Ampère, calcular el campo magnético entre ambos conductores y en el exterior del cable.

Sol.: Entre los conductores $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, donde r es la distancia al eje del cable, y siendo las líneas de campo circunferencias con centro en el eje del cable. En el exterior el campo es nulo.



3.12: Un solenoide esbelto de n_1 vueltas por unidad de longitud está circulado por una intensidad I_1 y tiene una sección transversal circular de radio R_1 . En su interior, y coaxial con él, se ha colocado un segundo solenoide de n_2 vueltas por unidad de longitud y de sección transversal circular de radio R_2 ($R_2 < R_1$). Si este segundo solenoide está circulado por una intensidad I_2 , determinar: **a)** el campo magnético en todos los puntos del espacio; **b)** la magnitud y sentido que debería tener I_2 para que, fijada I_1 , el campo en el interior del segundo solenoide sea nulo.



$$\text{Sol: a) } B(r) = \begin{cases} \mu_0 n_1 I_1 \pm \mu_0 n_2 I_2 & \text{si } r < R_2 \\ \mu_0 n_1 I_1 & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ 0 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

donde r es la distancia al eje de los solenoides y el signo más/menos se toma si ambas intensidades circulan en igual/opuesto sentido; **b)** $I_2 = -n_1 I_1 / n_2$.

3.13: Dos conductores filiformes, rectilíneos y de longitud infinita son perpendiculares al plano XY y cortan a dicho plano en los puntos $(0, a, 0)$ y $(0, -a, 0)$. Por dichos conductores circulan las intensidades I_1 e I_2 respectivamente. Calcular el campo magnético generado por ambas corrientes en cualquier punto del espacio (nota: la solución del problema debe ser válida para cualquier sentido de las intensidades por los conductores).

Sol:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \left(\frac{(a-y)I_1}{x^2 + (a-y)^2} - \frac{(a+y)I_2}{x^2 + (a+y)^2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{xI_1}{x^2 + (a-y)^2} + \frac{xI_2}{x^2 + (a+y)^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right\},$$

donde las intensidades se consideran positivas si van en el sentido positivo del eje z y negativas en el caso contrario.

3.14: Un alambre de longitud l se enrolla en una bobina circular de N espiras. Demostrar que cuando esta bobina transporta una corriente I , su momento magnético tiene por magnitud $Il^2 / (4\pi N)$.

TEMA 4

Inducción electromagnética

4.1. Introducción

En el Tema 3 se vio que las corrientes eléctricas son fuentes de campos magnéticos, en concreto sobre 1820 H.C. Oersted comprobó que un cable recorrido por una intensidad de corriente continua produce un campo magnetostático en su entorno (detectado por ejemplo por el efecto que tiene sobre una aguja imantada). Dado que las corrientes eléctricas producen campos magnéticos, cabe plantearse igualmente si se produce el fenómeno inverso, es decir, si campos magnéticos pueden producir corrientes eléctricas. En este sentido se llevó a cabo una intensa labor experimental que parecía negar esa posibilidad. No obstante, los experimentos elaborados por M. Faraday (1791-1867) alrededor de 1830 permitieron establecer que la generación de corriente eléctrica en un circuito estaba relacionada con la variación en el tiempo del flujo magnético que atravesaba dicho circuito. En consecuencia, campos magnetostáticos nunca producirían corrientes eléctricas en circuitos fijos.

Conviene recordar (según se discutió en el Tema 2) que debido al efecto Joule existe una disipación de energía en las resistencias presentes en todos los circuitos *reales*, lo que implica que para mantener una corriente eléctrica en el circuito es necesario un aporte continuo de energía. La pérdida de energía de los portadores de carga móviles en los choques con los átomos del material resistivo debe ser compensada por una “fuerza externa impulsora” sobre estos mismos portadores. Dado que el impulso sobre los portadores móviles puede estar localizado en una parte del circuito o bien *distribuido* a lo largo de éste, la magnitud relevante es la integral de esta fuerza a lo largo de todo el circuito. De esta manera, se definió la fuerza electromotriz (fem), \mathcal{E} , como la fuerza tangencial por unidad de carga en el cable integrada sobre la longitud del circuito completo, esto es,

$$\xi = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l}. \quad (4.1)$$

En consecuencia, la presencia de una intensidad de corriente eléctrica en un circuito estará relacionada con la existencia de una fuente de fem que

la mantenga. El origen de la fem puede ser diverso, de origen químico en baterías y pilas, de origen mecánico en el generador de Van der Graff, de origen óptico en las células fotovoltaicas, etc. De forma general podemos decir que el efecto de un generador de fem es transformar algún tipo de energía en energía eléctrica. En el caso de los experimentos realizados por Faraday, el mecanismo de generación de fem está directamente involucrado con las variaciones del flujo del campo magnético. Esta fem *inducida* por el campo magnético tendrá unas consecuencias importantísimas, tanto conceptuales como tecnológicas, estando en la base de la generación de energía eléctrica en las centrales eléctricas, en el funcionamiento de los circuitos de corriente alterna y en la generación de las ondas electromagnéticas.

Actividad 4.1:

- ¿Por qué es necesario tener un agente externo que suministre energía al circuito para mantener una corriente eléctrica?
- ¿Podemos tener una resistencia R en un hilo conductor perfecto? Justifique su respuesta.
- Deduzca las unidades en el S.I. de la fuerza electromotriz a partir de su definición en (4.1).
- ¿Puede entender las razones por las que la fem asociada a las variaciones temporales del flujo magnético se le conoce como fem *inducida*?

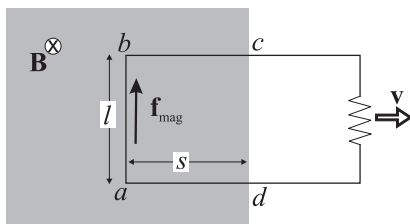
4.2. Ley de Faraday

4.2.1. Fuerza electromotriz de movimiento

Una forma posible de generar una fem en un circuito sería hacer uso de la aparición de una fuerza magnética sobre los portadores de carga móviles en una región donde exista un campo \vec{B} . Por ejemplo, el movimiento de un conductor en el seno de un campo magnético dará lugar a lo que se conoce como *fem de movimiento*. En particular, considérese la situación mostrada en la figura adjunta donde la región sombreada indica la presencia de un campo magnético \vec{B} uniforme (producido, por ejemplo, por un imán) dirigido hacia el papel y un circuito moviéndose con velocidad $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{x}$ hacia la derecha. En esta situación, las cargas *móviles* del segmento \overline{ab} experimentarán la siguiente fuerza de Lorentz por unidad de carga:

$$\vec{f}_{\text{mag}} = \frac{\vec{F}_{\text{mag}}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.2)$$

cuyo efecto global es justamente impulsar las cargas desde a hasta b . Este impulso dará lugar a una corriente en el circuito (en el mismo sentido que



esta fuerza) debida a la aparición de una fem de valor

$$\xi = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (4.3)$$

que puede reducirse en el presente caso a

$$\xi = \int_a^b \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b |\vec{v}| |\vec{B}| dl = |\vec{v}| |\vec{B}| \int_a^b dl = |\vec{v}| |\vec{B}| l, \quad (4.4)$$

donde l es la longitud del segmento \overline{ab} , siendo nulas las contribuciones a la fem de los segmentos paralelos al desplazamiento dado que la fuerza impulsora es aquí perpendicular al hilo ($\vec{f}_{\text{mag}} \perp d\vec{l}$). La intensidad, I , que circula por el circuito de resistencia R será por tanto

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{|\vec{v}| |\vec{B}| l}{R}. \quad (4.5)$$

Aunque la fem de movimiento ha podido deducirse a partir de la fuerza de Lorentz sobre los portadores de carga móviles, es interesante notar que el valor de la fem de movimiento también se habría podido obtener como menos la variación temporal del flujo del campo magnético, Φ_m , que atraviesa el área del circuito; esto es, mediante la expresión

$$\xi = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.6)$$

Para comprobar este hecho, tengamos en cuenta que el flujo magnético se obtiene como

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \quad (4.7)$$

recuérdese que $d\vec{S} = dS \hat{n}$, donde dS representa un diferencial de superficie y \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie. Dado que en el presente caso tenemos que \vec{B} es paralelo a $d\vec{S}$: $\vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| dS$, podremos escribir que

$$\Phi_m = \int_S |\vec{B}| dS = |\vec{B}| \int_S dS = |\vec{B}| S = |\vec{B}| l s, \quad (4.8)$$

siendo $l s$ el área del circuito situada en la región donde el campo magnético no es nulo. La variaciones temporales de flujo magnético vendrán entonces dadas por

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} |\vec{B}| l s = -|\vec{B}| l |\vec{v}|,$$

ya que $|\vec{v}| = -ds/dt$ (esto es, el módulo de la velocidad es positivo cuando s decrece), lo que da lugar a la misma fem que la obtenida en (4.3) cuando se integra directamente la fuerza de Lorentz por unidad de carga.

Actividad 4.2:

- ¿Qué tipo de transformación de energía ha tenido lugar en la situación anteriormente descrita?
- ¿Habría fuerza electromotriz en el caso anterior si el circuito no estuviese cerrado? Justifique su respuesta.
- Trate de obtener por sí mismo los resultados mostrados en (4.4) y (4.8). Se recomienda encarecidamente que se esfuerce en entender los pasos que haya llevado a cabo a tal efecto.
- Si el resistor en el caso anterior analizado fuese una bombilla, ¿se comportaría esta bombilla de forma diferente si la hubiésemos alimentado con una batería?
- ¿Puede encontrar alguna conexión entre los dos procedimientos mostrados para obtener la misma fem?

(*) Balance de potencia

Es interesante notar que si el campo magnético ha dado lugar a una fem que genera una corriente, la velocidad de los portadores de carga móviles en el segmento \overline{ab} será la composición de un movimiento hacia la derecha más otro hacia arriba, esto es, la velocidad total, \vec{w} , de los portadores será

$$\vec{w} = v\hat{x} + u\hat{y}, \quad (4.9)$$

por lo que la fuerza por unidad de carga que afecta a una de las cargas móviles vendrá dada por

$$\vec{f}_{\text{mag}} = -|\vec{u}||\vec{B}|\hat{x} + |\vec{v}||\vec{B}|\hat{y}. \quad (4.10)$$

Evidentemente sólo la parte de la fuerza dirigida según \hat{y} es responsable de la aparición de la fem de movimiento (causando una corriente en la misma dirección que esta fuerza). La componente x de \vec{f}_{mag} da cuenta de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre la corriente. Dado que esta fuerza por unidad de carga es

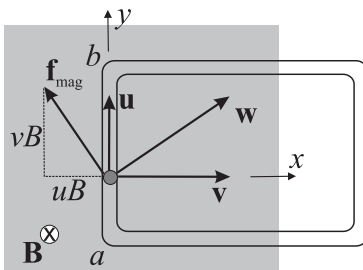
$$\vec{f}_x = -|\vec{u}||\vec{B}|\hat{x}, \quad (4.11)$$

la fuerza total sobre el conductor ab será el producto de (4.11) por la carga total de este conductor, esto es,

$$\vec{F}_x = -nqAl|\vec{u}||\vec{B}|\hat{x}, \quad (4.12)$$

siendo n el número de electrones por unidad de volumen y A el área transversal del conductor. Puesto que la intensidad de la corriente que recorre el circuito es

$$I = nqA|\vec{u}|,$$



\vec{F}_x puede expresarse como

$$\vec{F}_x = -l|\vec{B}|\hat{x}, \quad (4.13)$$

expresión que coincidiría con la aplicación directa al presente caso de la expresión (3.20): $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$.

La existencia de esta fuerza sobre el conductor ab implica que para que éste se mueva a velocidad constante, $\vec{v} = v\hat{x}$, un agente externo debe compensar dicha fuerza ejerciendo una fuerza, \vec{F}_{ext} , de igual módulo y sentido opuesto, esto es,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = l|\vec{B}|\hat{x}. \quad (4.14)$$

La potencia, P , suministrada por el agente externo al circuito vendrá dada por

$$P = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = l|\vec{B}|l|\vec{v}|, \quad (4.15)$$

que puede reescribirse, teniendo en cuenta la expresión (4.5), como

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = I^2 R. \quad (4.16)$$

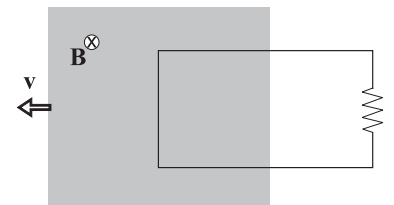
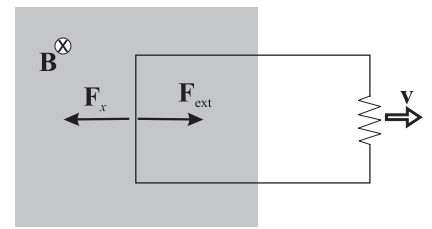
Esta potencia es precisamente el valor de la potencia Joule disipada en la resistencia, por lo que podemos concluir que la potencia suministrada por el agente externo que mueve el circuito es justamente aquella disipada en la resistencia por efecto Joule.

4.2.2. Fuerza electromotriz inducida

La discusión de la situación analizada en la sección 4.2.1 ha mostrado que la aparición de una fuerza electromotriz en el circuito *móvil* podía atribuirse a la existencia de una fuerza de Lorentz. Ahora bien, si consideramos que el circuito permanece quieto y es el agente que crea el campo magnético (por ejemplo, un imán) el que se mueve hacia la izquierda, es razonable suponer que también aparecerá una fem de igual magnitud y sentido que en el caso anterior puesto que lo que debe importar, según el principio de relatividad, es el *movimiento relativo* entre el campo \vec{B} y el circuito y no cuál de ellos se mueve.

Los experimentos muestran que efectivamente la suposición anterior es cierta. No obstante, si analizamos el caso del circuito fijo y el imán moviéndose según nuestra teoría, dado que las cargas móviles en el circuito estarán ahora *en reposo*, no existirá fuerza de Lorentz que impulse a las cargas. Por tanto, si no hay fuerza de Lorentz actuando sobre las cargas, ¿de dónde proviene la fem inducida en el circuito?. Podemos responder que la causa que crea ahora la fem debe ser la aparición de un campo eléctrico, que evidentemente no puede ser un campo electrostático (ver discusión en el Apartado 2.4) sino *un nuevo tipo de campo eléctrico que debe estar relacionado con las variaciones temporales del campo magnético*.

El punto en común de los dos fenómenos equivalentes descritos anteriormente se encuentra en que en ambos casos existen variaciones temporales del flujo magnético que atraviesa el circuito. Este hecho no es una coincidencia sino que M. Faraday encontró experimentalmente (~ 1830) que



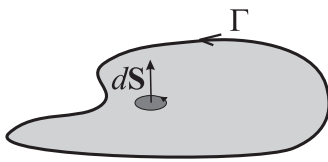
La fuerza electromotriz ξ inducida en un circuito viene dada por la variación temporal del flujo magnético, Φ , que atraviesa dicho circuito.

En forma matemática, esta ley puede expresarse como

Ley de Faraday

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.17)$$

donde el signo menos está relacionado con el sentido de la fem inducida. Teniendo en cuenta que el origen de la fem es la aparición de un campo \vec{E} no electrostático, la ley de Faraday puede también expresarse en forma integral como



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4.18)$$

donde la curva Γ es precisamente el recorrido del circuito. El signo menos de la ley de Faraday queda ahora completamente determinado ya que el sentido de recorrido de la integral de camino a la largo de Γ está relacionado con el sentido de $d\vec{S}$ según la regla de la mano derecha. La expresión (4.18) pone claramente de manifiesto que la fem inducida está, en general, *distribuida* a lo largo de todo el circuito.¹

Una manera muy útil y sencilla de determinar a veces el sentido de la fem y de la intensidad inducida lo proporciona la **ley de Lenz**. Esta ley establece que

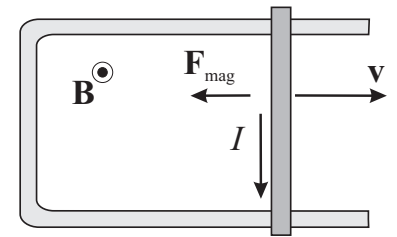
La fem y la corriente inducida poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

La ley de Lenz no hace referencia a la causa (o causas) concreta que provoca la variación y que da lugar a la aparición de la fem inducida sino simplemente sugiere que la reacción del sistema genera una fem y corriente inducidas que siempre actuará en contra de la variación que las provoca. Este hecho parece congruente pues de lo contrario el circuito *favorecería* la causa que provoca la corriente inducida, intensificando su efecto indefinidamente.

A efectos prácticos, la deducción del sentido de la fem y corriente inducidas puede hacerse considerando el carácter de la variación (creciente o decreciente) del flujo magnético con respecto al tiempo (este carácter lo da el signo de su derivada temporal). Si, por ejemplo, el flujo es creciente en cierto instante de tiempo, entonces la fem y corriente inducidas deben tener un sentido tal que originen un campo magnético que contrarreste la variación (esto es, el crecimiento) del flujo; lo contrario debe ocurrir si el flujo es decreciente.

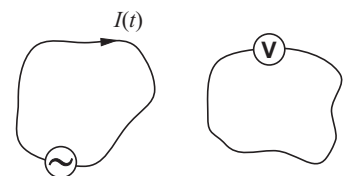
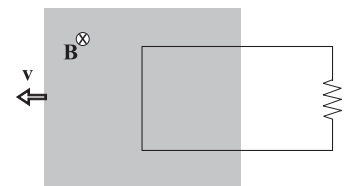
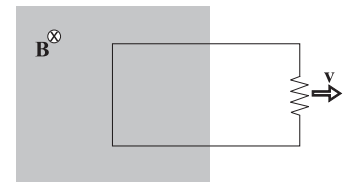
¹ Al contrario de lo que ocurriría, por ejemplo, en una pila, donde la fuerza electromotriz (y por tanto el campo electromotor) estaba confinada exclusivamente a la región interior de la batería.

Veamos el efecto de la ley de Lenz en el circuito móvil mostrado en la figura. En este ejemplo, la barra móvil se desplaza hacia la derecha con una velocidad \vec{v} debido a la acción de un agente externo. Según se ha discutido en el apartado 4.2.1 y de acuerdo a ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida en el circuito es tal que la fuerza magnética que actúa sobre la barra móvil, $\vec{F}_{\text{mag}} = \vec{I} \times \vec{B}$, se oponga al movimiento impuesto externamente. Si la corriente inducida fuese en sentido opuesto al mostrado en la figura, la fuerza magnética sobre la barra móvil favorecería el movimiento hacia la derecha de la barra de modo que ésta se aceleraría continuamente, causando un aumento incesante de energía cinética que obviamente no tiene sentido.



Hemos encontrado, por tanto, que siempre que exista una variación de flujo magnético en un circuito aparecerá una fem inducida en dicho circuito. En consecuencia, algunas de las causas que provocarían la aparición de una fem inducida son:

- Movimiento de un circuito o deformación de su área en una región donde existe un campo magnético constante en el tiempo.
- Movimiento del agente que produce el campo magnético (por ejemplo un imán) de modo que un circuito fijo intercepte un flujo magnético variable en el tiempo. Por ejemplo, el movimiento de aproximación y alejamiento de un imán daría lugar a una fem inducida en el circuito.
- Variación de la corriente que pasa por un circuito primario de modo que el flujo interceptado por un circuito secundario próximo varíe en el tiempo.
- Combinación simultánea de algunas de las causas anteriores.

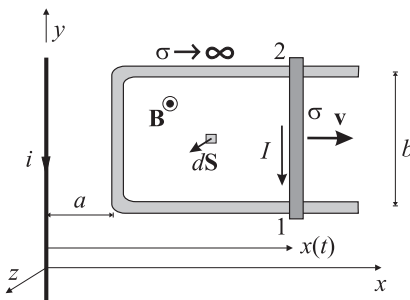


En el caso de una corriente variable en un circuito primario que induce una corriente en un circuito secundario, es importante observar que esta corriente inducida se ha generado *sin que exista contacto eléctrico entre los circuitos*. Desde un punto de vista energético, la energía asociada a la corriente inducida en el circuito secundario debe ser obviamente suministrada por la fuente de fem del primario. Dado que no ha habido contacto físico entre ambos circuitos, la única explicación de la aparición de una energía en el secundario es que ésta haya sido transmitida desde el primario hasta el secundario por el campo electromagnético a través del espacio. Esto indica que el campo es un agente capaz de transmitir energía y por tanto debe ser considerado como un ente con realidad física propia.

Actividad 4.3:

- ¿Puede deducirse la ley de Faraday a partir de la fuerza de Lorentz? Justifique su respuesta.
- Un campo magnetostático no puede generar una corriente inducida. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.
- A la vista de (4.18), ¿por qué el campo eléctrico producido por un campo magnético no puede ser de naturaleza electrostática?
- Dé un ejemplo donde la ley de Lenz explique la dirección de la corriente inducida.
- Encuentre ejemplos adicionales a los dados donde la ley de Faraday explique la aparición de una corriente inducida en un circuito.
- ¿Tiene la ley de Faraday algo que ver con el funcionamiento de los cargadores “wireless” para los teléfonos móviles?
- ¿Cómo es posible que la energía (o bien datos) pueda ser transferida entre dos dispositivos distantes mediante sistemas inalámbricos si no hay nada material que los una?

EJEMPLO 4.1 Obtener el sentido y el valor de la intensidad inducida en el dispositivo mostrado en la figura. Datos. Barra móvil: $\sigma = 10^8 (\Omega\text{m})^{-1}$, $b = 10 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ mm}$, $v = 5 \text{ m/s}$; $i = 200 \text{ mA}$, $a = 20 \text{ cm}$.



En la situación mostrada en la figura, dado que la barra vertical se mueve, el flujo magnético que atraviesa el circuito (debido al campo magnético del hilo recto infinito) varía en el tiempo, por lo que se inducirá una ξ en el circuito. Dado que el circuito muestra una resistencia, R (debida a la conductividad finita de la barra móvil), la intensidad que circula por él vendrá dada por

$$I = \frac{\xi}{R}. \quad (4.19)$$

Según los datos que nos da el problema, la resistencia de la barra móvil será

$$R = \frac{b}{\sigma S} = \frac{0,1}{10^8 \cdot \pi(2 \times 10^{-3})^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi} \Omega.$$

Antes de calcular la ξ inducida notemos que, en el plano $z = 0$ donde se sitúa el circuito móvil, el valor del campo magnético creado por el hilo recto e infinito viene dado por

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \hat{z}. \quad (4.20)$$

Puesto que al moverse la barra móvil hacia la derecha, el flujo magnético del circuito *crece*, aplicando la ley de Lenz, tenemos que la reacción del circuito generando una corriente inducida debe ser la de contrarrestar la acción que la produce. En consecuencia, la corriente inducida, I , en el circuito debe ser tal que genere un campo magnético, \vec{B}_{ind} que contrarreste el campo externo. Esta corriente debe ir dirigida,

por tanto, según el sentido mostrado en la figura de modo que el sentido de \vec{B}_{ind} sea el opuesto al de (4.20). Dado que hemos determinado el sentido de la corriente, nos preocuparemos a continuación únicamente por el módulo de la ξ y de la intensidad inducidas.

La ξ inducida puede calcularse en este caso por dos procedimientos:

■ **Fuerza de Lorentz.**

Dado que las cargas de la barra vertical se mueven en una región donde existe un campo magnético, encontraremos una fuerza magnética por unidad de carga, $\vec{f}_m = \vec{v} \times \vec{B}$, sobre las cargas móviles. Al aplicar la expresión (4.3), esta fuerza magnética provoca la aparición de una ξ en el circuito dada por

$$\xi = \int_1^2 \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 |\vec{v}| |\vec{B}| dy = |\vec{v}| |\vec{B}| b .$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.20) del campo magnético, y admitiendo que la posición de la barra móvil viene dada por

$$x(t) = a + vt , \quad (4.21)$$

tenemos que la ξ puede escribirse como

$$\xi(t) = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(a + vt)} . \quad (4.22)$$

■ **Ley de Faraday.**

Para aplicar la ley de Faraday dada por la expresión (4.17) debemos calcular primero el flujo magnético Φ .

Dado que el diferencial de superficie puede escribirse como $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$, el diferencial de flujo magnético, $d\Phi$, a través la superficie del circuito será

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dy .$$

Para calcular el flujo hay que integrar la expresión anterior en la superficie total del circuito, de modo que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^b dy \left\{ \int_a^x dx \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right\} = \int_0^b dy \left\{ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{a} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{a} \int_0^b dy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x}{a} . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como la ξ es la derivada temporal del flujo magnético, debemos derivar con respecto al tiempo (4.23). Si hacemos esto tenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{x}{a} \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx/dt}{x(t)} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{v}{x(t)} .$$

Para aplicar la ley de Lenz observamos que el signo de $d\Phi/dt$ en la expresión anterior es siempre positivo, por lo que la corriente inducida debe generar un campo magnético que se oponga a este crecimiento. Este campo debe tener dirección $-\hat{z}$ y, consecuentemente, debe estar generado por una corriente dirigida en sentido horario (tal como se dedujo anteriormente).

Teniendo en cuenta la forma de $x(t)$ el módulo de la ξ podrá escribirse como

$$\xi(t) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{v}{a + vt} , \quad (4.24)$$

expresión que coincide con la obtenida previamente en (4.22).

Finalmente el valor de la intensidad inducida será

$$I(t) = \xi(t) \frac{\sigma S}{b} = \frac{\mu_0 I \sigma S}{2\pi} \frac{v}{a + vt}. \quad (4.25)$$

Tras un minuto de movimiento, la intensidad toma el siguiente valor:

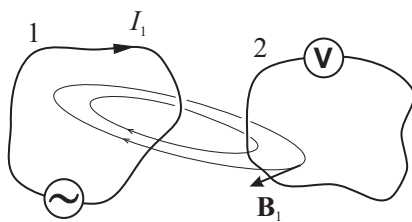
$$I(60) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 0,2 \cdot 10^8 \cdot 4\pi^2 \times 10^{-6}}{2\pi} \frac{5}{0,2 + 5 \cdot 60} \approx 2,6 \mu A.$$

4.3. Inductancia

4.3.1. Inductancia mutua

Si calculamos el flujo magnético, Φ_{21} , que atraviesa la superficie del circuito 2 (véase la figura adjunta), debido al campo magnético, \vec{B}_1 , generado por la corriente, I_1 , que circula a través del circuito 1, encontraríamos que

$$\Phi_{21} \propto I_1,$$



esto es, el flujo magnético es proporcional a la intensidad. Este hecho puede explicarse fácilmente si se considera que, según la ley de Biot y Savart, el campo magnético \vec{B} generado por una corriente I en el punto P viene dado por

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{espira}} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.26)$$

lo que implica que \vec{B}_1 puede escribirse como

$$\vec{B}_1(P) = I_1 \vec{\beta}_1(P), \quad (4.27)$$

donde $\vec{\beta}_1(P)$ es una función que depende de la posición y de la forma geométrica del circuito 1. El flujo magnético Φ_{21} se obtiene como

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S},$$

donde al sustituir la forma de \vec{B}_1 dada por (4.27), se tiene que

$$\Phi_{21} = I_1 \int_{S_2} \vec{\beta}_1 \cdot d\vec{S}. \quad (4.28)$$

La expresión anterior nos confirma que existe una relación de proporcionalidad entre el flujo magnético y la intensidad. Al factor de proporcionalidad entre el flujo magnético en un circuito debido a la intensidad que recorre otro se le denomina **inductancia mutua** y se denota como M . En nuestro caso tendríamos que

$$\Phi_{21} = M I_1. \quad (4.29)$$

Las unidades de inductancia en el SI se denominan **henrios** (H), de modo que

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{T m}^2}{\text{A}} . \quad (4.30)$$

Usando razonamientos que no serán discutidos aquí encontraríamos que la relación entre el flujo Φ_{12} que atraviesa el circuito 1 debido a un campo \vec{B}_2 producido por una intensidad I_2 que recorriese el circuito 2 vendría dada por la misma razón de proporcionalidad, esto es,

$$\Phi_{12} = M I_2 . \quad (4.31)$$

EJEMPLO 4.2 Flujo magnético que atraviesa una espira rectangular debido al campo de un hilo recto e infinito recorrido por una intensidad I .

En el plano $z = 0$ donde se sitúa la espira rectangular, el valor del campo magnético creado por el hilo recto e infinito viene dado por

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z} .$$

En el presente caso, el diferencial de superficie puede expresarse como $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$, por lo que el diferencial de flujo magnético, $d\Phi$, a través de esta superficie es

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dy .$$

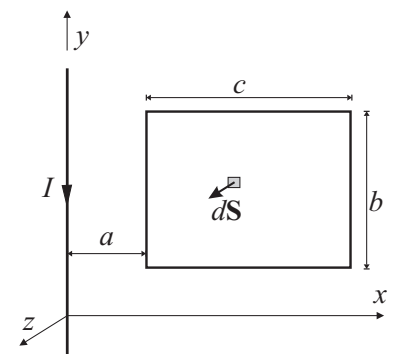
El cálculo del flujo total requiere la integración de la expresión anterior en la superficie de la espira rectangular, de modo que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^b dy \left\{ \int_a^{a+c} dx \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right\} = \int_0^b dy \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} \int_0^b dy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} . \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra que la inductancia mutua en el presente caso es

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} .$$

Unidad de inductancia
1 henrio (H)



Actividad 4.4:

- ¿Puede dar alguna razón que justifique la proporcionalidad que existe entre el flujo magnético a través de una espira dada y la corriente que fluye en otra espira de corriente adyacente? [Considere que el campo magnético producido por una espira de corriente es proporcional a la corriente que fluye por dicha espira.]
- ¿Depende la inductancia mutua de la cantidad de corriente que fluye? Justifique su respuesta.
- A partir de la definición de henrio (H) dada en (4.30), obtenga las unidades de μ_0 en función de H.

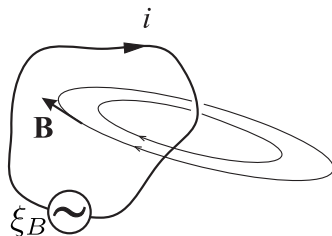
4.3.2. Autoinducción

Si consideramos ahora el caso en el que tenemos un solo circuito por el que circula una intensidad i , un cálculo similar al del apartado anterior nos muestra que el flujo magnético, Φ , que atraviesa este circuito es igualmente proporcional a la intensidad que lo recorre:

$$\Phi \propto i.$$

Cuando el flujo magnético que atraviesa un circuito se debe únicamente a la corriente que circula por el propio circuito, este flujo se conoce como **autoflujo** y el parámetro de proporcionalidad entre el autoflujo y la intensidad se conoce como **autoinducción** y se denota como L (las unidades de esta inductancia son obviamente henrios). En consecuencia podemos escribir

$$\Phi = Li. \quad (4.32)$$



EJEMPLO 4.3 Cálculo de la autoinducción de un solenoide esbelto de $N = 100$ vueltas, longitud $l = 1\text{ cm}$ y $r = 1\text{ mm}$.

Para un solenoide esbelto de N vueltas y longitud l , el campo magnético en el interior del solenoide puede escribirse según (3.35) como

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{u},$$

donde $n = N/l$ es la densidad lineal de espiras y \hat{u} es el vector unitario según el eje del solenoide. Dado que el diferencial de superficie de las espiras viene dado por $d\vec{S} = dS\hat{u}$, el flujo que atraviesa las N espiras del solenoide será

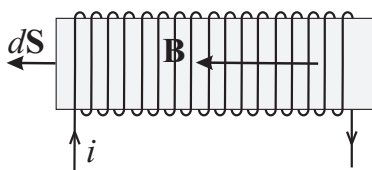
$$\Phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_S |\vec{B}| dS = N |\vec{B}| \int_S dS = \mu_0 \frac{N^2}{l} i S,$$

de donde se deduce que la autoinducción L es

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 \mathcal{V} \quad (4.33)$$

siendo \mathcal{V} el volumen del solenoide. Sustituyendo ahora los datos del problema

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \frac{10^4}{10^{-2}} \pi \times 10^{-6} \approx 3,95 \mu\text{H}.$$



Actividad 4.5:

- ¿Depende la inductancia de una espira de la corriente que fluye por ella? Justifique su respuesta. ¿Podemos hablar de la inductancia de una espira en el caso de que no haya corriente que fluya por ella?
- Cuando un solenoide se introduce en un circuito, explique por qué decimos que la inductancia del circuito es justamente la del solenoide introducido.
- ¿Es válida la expresión (4.45) para solenoides con partes móviles? Justifique su respuesta.

4.3.3. Caso general

En el caso más general mostrado en la figura adjunta en el que tengamos que circule corriente tanto por el circuito 1 como por el circuito 2, el flujo total, Φ_{tot} , que atraviesa la superficie del circuito 2 puede expresarse como

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}} &= \Phi_{21} + \Phi_{22} \\ &= \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{aut}},\end{aligned}\quad (4.34)$$

donde Φ_{ext} es el flujo que atraviesa el circuito 2 debido a los agentes *externos*, en este caso, el campo generado por la intensidad, I , que recorre el circuito 1 y Φ_{aut} es el autoflujo del circuito 2. Dadas las relaciones de proporcionalidad entre los flujos y las intensidades vistas en las expresiones (4.29) y (4.32), el flujo total puede escribirse como

$$\Phi_{\text{tot}} = MI + Li. \quad (4.35)$$

Según la ley de Faraday y teniendo en cuenta (4.34), la fem inducida en el circuito 2 vendrá dada por

$$\xi = -\frac{d}{dt} (\Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{aut}}). \quad (4.36)$$

En el caso frecuente de que la autoinducción y la inducción mutua no varíen en el tiempo (esto es, si la forma de los circuitos no cambia en el tiempo), ξ puede escribirse como

$$\xi = -M\frac{dI}{dt} - L\frac{di}{dt}. \quad (4.37)$$

El cálculo de la fem inducida en el circuito 2 según (4.37) no es trivial dado que esta fem depende de las variaciones temporales de i , pero esta misma intensidad depende a su vez del valor de la fem inducida. Afortunadamente, existen muchas situaciones prácticas en las que las variaciones temporales del autoflujo son mucho menores que las correspondientes al flujo externo, por lo que la fem inducida en el circuito puede obtenerse muy aproximadamente como

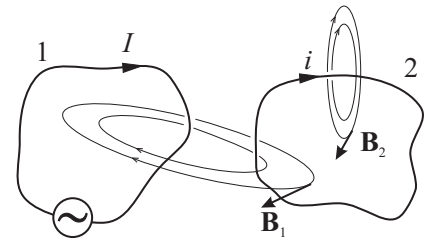
$$\xi = -\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}. \quad (4.38)$$

Valor de la ξ si autoflujo es despreciable

No obstante, existen otras situaciones donde el autoflujo no puede despreciarse. Un caso particularmente importante se encuentra cuando cuando las variaciones del flujo externo son nulas (por ejemplo cuando $I = 0$). En este caso la fem inducida debe calcularse como

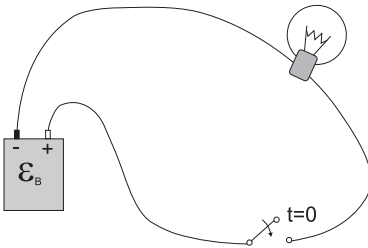
$$\xi = -\frac{d\Phi_{\text{aut}}}{dt}. \quad (4.39)$$

Valor de la ξ si flujo externo nulo



Actividad 4.6:

- ¿Cuáles son las razones que nos hacen separar el flujo total a través de un circuito en flujo externo y autoflujo?
- Expliqué cuándo podemos usar la expresión (4.38) y por qué. Repita la explicación para la expresión (4.39).

**4.4. Transitorios en circuitos RL**

Una situación práctica donde el único flujo que atraviesa el circuito es el *autoflujo* se muestra en la figura adjunta, donde tenemos una batería de fem ξ_B que mediante un conmutador alimenta una bombilla (o cualquier otro dispositivo). Desde un punto de vista circuital, la bombilla puede considerarse como una resistencia de valor R . Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones a la configuración anterior tendremos que la suma de las fem existentes en el circuito debe ser igual a la caída de tensión en la resistencia. Dado que existen dos fuentes de fem, una debida a la batería, ξ_B , y otra fem *inducida*, ξ_{ind} , debida a las variaciones temporales del autoflujo, la ley de Kirchhoff dice que

$$\xi_B + \xi_{ind} = Ri . \quad (4.40)$$

Dado que en el presente caso podemos escribir que

$$\xi_{ind} = -L \frac{di}{dt} , \quad (4.41)$$

la ecuación (4.40) puede reescribirse como

$$\xi_B - L \frac{di}{dt} = Ri . \quad (4.42)$$

Para obtener el valor de la intensidad $i(t)$ que circula por el circuito debemos resolver la *ecuación diferencial* anterior. Según esta ecuación, la fem inducida puede considerarse que actúa como una fuerza “contraelectromotriz”, en el sentido de que actúa contra la fem de la batería intentando contrarrestar (según determinaba la ley de Lenz) los cambios de flujo magnético en el circuito. El efecto de esta fuerza contraelectromotriz se notará en que la corriente que circula por el circuito no cambiará bruscamente desde o hasta un valor de ξ_B/R tal como ocurriría si se despreciase el efecto de la inducción electromagnética.

Aunque la expresión (4.42) proporciona una buena interpretación física de los fenómenos que suceden en el circuito, es usual reescribir esta ecuación como

$$\xi_B = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (4.43)$$

$$= V_R + V_L . \quad (4.44)$$

Escrito en esta forma, la Teoría de Circuitos interpreta que la fem generada por la fuente de tensión (la batería) es igual a la caída de tensión en la resistencia, $V_R = Ri$, más una caída de tensión, V_L , debida a la autoinducción L . El *efecto distribuido* de la fem inducida en el circuito puede modelarse, por tanto, como una caída de potencial en un elemento de circuito, denominado genéricamente **inductor**, caracterizado por la inductancia L (ver figura adjunta):

$$V_L = L \frac{di}{dt} . \quad (4.45)$$

De este modo, los efectos de inducción electromagnética relacionados con el campo magnético variable se supone que están localizados en los inductores. Estos inductores son comúnmente elementos puestos a propósito en los circuitos para aumentar los efectos de inducción electromagnética, por ejemplo, **solenoides** o **bobinas**. Dado el alto valor del campo magnético en el interior de los solenoides y la posibilidad de miniaturizarlos, estos elementos son parte fundamental de los circuitos eléctricos y electrónicos.

En este sentido, consideraremos a la autoinducción o bobina como otro elemento del circuito donde se produce una caída de tensión al igual que en la resistencia; aunque obviamente la dependencia de V con la intensidad que recorre el elemento es distinto en la resistencia y en la bobina. Desde un punto de vista circuital, el circuito que debemos resolver se muestra en la figura adjunta, donde la intensidad $i(t)$ que circula por este circuito será la solución de (4.43) o, equivalentemente,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\xi_B}{L} . \quad (4.46)$$

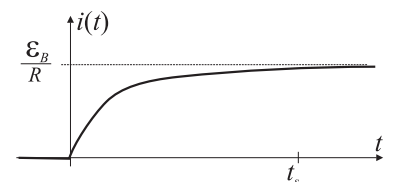
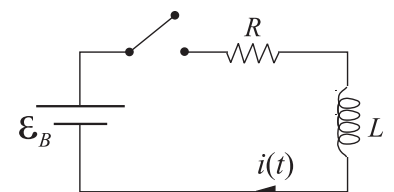
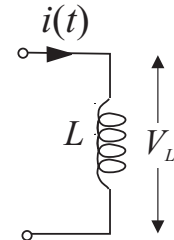
La solución de esta ecuación diferencial viene dada por

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\xi_B}{R} ,$$

donde la constante I_0 se determina en función del valor de $i(t)$ en $t = 0$. En el presente caso dado que $i(0) = 0$ (esto es, la intensidad era nula antes de conmutar), se encuentra que $I_0 = -\xi_B/R$ y por tanto

$$i(t) = \frac{\xi_B}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) . \quad (4.47)$$

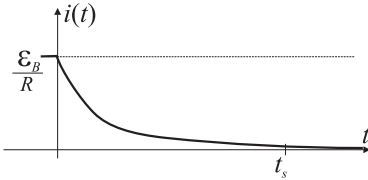
La forma de $i(t)$ claramente muestra que esta intensidad no cambia bruscamente sino que el valor final ξ_B/R se alcanza aproximadamente tras un tiempo $t_s \approx 4L/R$. Si L tiene un valor alto (esto es, si los efectos de inducción electromagnética son importantes) el valor final de la corriente tarda más tiempo en alcanzarse.



Si ahora consideramos la situación opuesta a la anterior, haciendo que el conmutador abra el circuito en $t = 0$, entonces $i(0) = \xi_B/R$ y dado que el segundo miembro de la ecuación (4.46) desaparece, la solución para $i(t)$ en este caso será

$$i(t) = i(0) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.48)$$

$$= \frac{\xi_B}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.49)$$



Podemos observar que, en este caso, la corriente no desciende a cero bruscamente sino que tardaría aproximadamente un tiempo t_s en alcanzar este valor.

Actividad 4.7:

- Explique las principales diferencias que podríamos observar en el montaje con la batería y la bombilla si hubiésemos despreciado el efecto del flujo magnético a través del circuito.
- ¿Por qué se ha preferido considerar la fem inducida en el circuito como una caída de potencial en una bobina?
- Halle $i(t)$ en el proceso transitorio que nos llevó a (4.47) si en la bobina hubiese circulado una corriente inicial que fuera la mitad de su valor final.
- Halle $i(t)$ en el proceso transitorio si tenemos dos bobinas en serie/paralelo de inductancias L_1 y L_2 .

4.5. Energía magnética

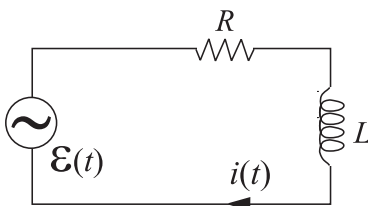
En el apartado anterior se ha visto que la evolución de un circuito serie RL tal como el mostrado en la figura adjunta venía regida por la ecuación

$$\xi = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (4.50)$$

Multiplicando ambos términos de esta ecuación por la intensidad, i , obtenemos

$$\xi i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (4.51)$$

donde el primer miembro de (4.51) nos da, según (2.32), la potencia suministrada por el generador de fem y el segundo miembro debe ser, por tanto, la potencia “entregada” al circuito. Dado que el primer término del segundo miembro, Ri^2 , es la potencia disipada en la *resistencia* por efecto Joule –ver (2.25)–, podemos concluir que el segundo término, $Li di/dt$, estará asociado con la *autoinducción*. Dado que el fenómeno de autoinducción lo que hay es una “transferencia” de energía más que una “disipación en forma de



calor”, este segundo término puede entonces interpretarse como la energía por unidad de tiempo que se almacena en el campo magnético del inductor (recuérdese que en el circuito se ha supuesto que los efectos del campo magnético están localizados en este elemento). Si designamos por U_B a la energía magnética almacenada en el inductor, entonces la razón con la que se almacena esta energía en el tiempo puede escribirse como

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right). \quad (4.52)$$

En consecuencia, la energía magnética almacenada en el inductor vendrá dada por

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2. \quad (4.53)$$

Energía almacenada en el inductor

EJEMPLO 4.4 Calcular el calor disipado en la resistencia R_2 cuando el conmutador pasa de la posición 1 a la 2.

Supuesto que en $t = 0$ se realiza el cambio del conmutador de la posición 1 a la 2, podemos afirmar que el valor de la intensidad en este instante era

$$I_0 = \frac{\xi}{R_1 + R_2},$$

supuesto que el conmutador estuvo en la posición 1 por un tiempo suficiente en el que se alcanzó el estado estacionario —ver expresión (4.47). Para $t > 0$, la intensidad que recorre el circuito R_2L será, según (4.48),

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R_2}{L}t}.$$

Dado que el calor disipado en la resistencia R_2 por unidad de tiempo viene dado por

$$P_{R_2} = \frac{dW}{dt} = i^2 R_2,$$

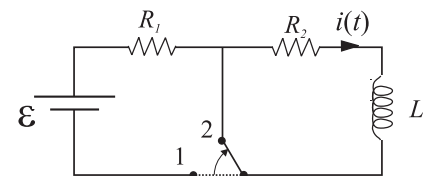
el calor total disipado en esta resistencia, W , puede calcularse como

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P_{R_2} dt = \int_0^\infty i^2 R_2 dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R_2}{L}t} R_2 dt \\ &= I_0^2 R_2 \int_0^\infty e^{-\frac{2R_2}{L}t} dt. \end{aligned}$$

Si en la integral anterior se introduce el siguiente cambio de variable $t = (L/2R_2)\alpha$ se tiene que

$$W = I_0^2 R_2 \left(\frac{L}{2R_2} \int_0^\infty e^{-\alpha} d\alpha \right) = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Hemos obtenido entonces que el calor disipado en la resistencia R_2 es justamente la energía magnética que estaba almacenada en el inductor.



La energía almacenada en el inductor podemos decir que está “contenida” en el campo magnético presente en este elemento y, consecuentemente, U_B puede identificarse como la energía del campo magnético. Para hacer este

hecho más evidente, consideremos que el inductor es un solenoide esbelto (cuya autoinducción fue obtenida en (4.33) en el Ejemplo 4.3), por lo que podemos escribir que

$$U_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \mathcal{V} i^2 = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 i^2 \mathcal{V}. \quad (4.54)$$

Dado que el módulo del campo magnético en el interior de un solenoide se encontró que era $|\vec{B}| = \mu_0 n i$, la expresión anterior puede reescribirse como

$$U_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \mathcal{V} \quad (4.55)$$

siendo $\mathcal{V} = Sl$ el volumen del solenoide. Finalmente podemos deducir que en este inductor la densidad volumétrica de energía magnética, u_B , viene dada por

$$u_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}. \quad (4.56)$$

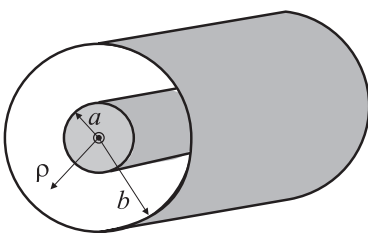
Densidad de energía magnética

Aunque el resultado anterior se ha obtenido para un caso particular, cálculos más rigurosos demostrarían que este resultado es válido en general.

Actividad 4.8:

- ¿Por qué el término $L di/dt$ ha sido identificado con el ritmo de cambio temporal de la energía magnética?
- ¿Dónde se “almacena” la energía magnética?
- ¿Almacena una bobina energía eléctrica? ¿Almacena un condensador energía magnética? Justifique su respuesta.

EJEMPLO 4.5 (*) Cálculo de la autoinducción por unidad de longitud de una cable coaxial de radio interior $a = 1$ mm y radio exterior $b = 3$ mm.



Dado que un cable coaxial la corriente I que circula por el conductor interno retorna por el conductor externo, la aplicación de la ley de Ampère al presente caso nos dice que el campo magnético producido por ambas corrientes fuera de los conductores será

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{r} & \text{si } a \leq \rho \leq b, \\ 0 & \text{si } \rho > b. \end{cases} \quad (4.57)$$

La densidad volumétrica de energía magnética en el interior del cable coaxial vendrá entonces dada, según (4.56), por

$$u_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2}, \quad (4.58)$$

de donde podemos obtener la energía magnética almacenada en un conductor coaxial de longitud l como

$$U_B = \int_{\text{volumen}} u_B d\mathcal{V}. \quad (4.59)$$

Teniendo en cuenta que en el presente caso y debido a la simetría cilíndrica del problema podemos escribir

$$dV = dS dl = 2\pi\rho d\rho dl,$$

la energía magnética se calculará como

$$U_B = \int_0^l dl \left\{ \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} 2\pi\rho d\rho \right\} = \int_0^l dl \left\{ \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \right\} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Considerando ahora que la energía magnética almacenada en el inductor viene dada por (4.53), tenemos que

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) l I^2,$$

por lo que la autoinducción por unidad de longitud del cable coaxial será

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.60)$$

Sustituyendo ahora los valores de a y b obtenemos el siguiente valor numérico:

$$\frac{L}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln 3 \approx 0,22 \mu\text{H/m}. \quad (4.61)$$

4.6. Ley de Ampère-Maxwell (*)

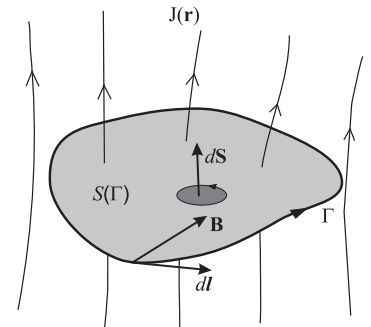
La ley de Ampère tal como se escribió en el Apartado 3.5 sólo era válida, en principio, para campos magnetostáticos y corrientes continuas. Esta ley básica establecía que²

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}, \quad (4.62)$$

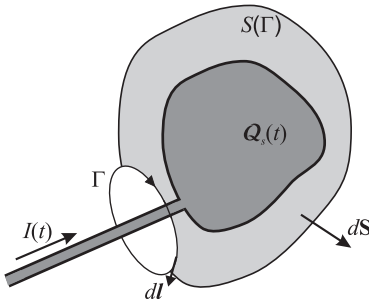
es decir, la circulación del campo magnetostático a través de una curva Γ es igual a μ_0 veces la intensidad de la corriente continua que atravesaba la superficie $S(\Gamma)$. La constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ se denominó *permeabilidad magnética del vacío*.

Para generalizar la ley de Ampère, es tentador extender esta ley inicialmente formulada para campos estáticos a campos variables en el tiempo y escribir

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \stackrel{?}{=} \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}. \quad (4.63)$$



² En la expresión (4.62) y en lo que queda de tema, indicaremos que cierto campo \vec{A} sólo depende de las variables espaciales expresando éste en la forma $\vec{A}(\vec{r})$. Si dicho campo también dependiese del tiempo, entonces lo expresaremos como $\vec{A}(\vec{r}, t)$.



Si queremos comprobar la validez de la expresión (4.63) basta considerar el proceso de carga de un conductor recorrido por una intensidad $I(t)$, donde la curva Γ rodea al conductor y la superficie $S(\Gamma)$ es tal como se muestra en la figura adjunta. Al tomar el límite cuando la curva Γ se hace tender a cero, la superficie $S(\Gamma)$ cierra el conductor obteniéndose que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4.64)$$

puesto que el valor del campo magnético en los puntos de la curva Γ tiende a cero en el límite $\Gamma \rightarrow 0$.³ Ahora bien, supuesta cierta (4.63), la expresión (4.64) también implicaría que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.66)$$

es decir, el flujo de \vec{J} a través de la superficie cerrada es nulo. Esto es claramente incorrecto en nuestro caso puesto que observamos que entra una intensidad $I(t)$ en la superficie $S(\Gamma)$.

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad de la carga, discutida en el Apartado 2.2:

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q_S(t), \quad (4.67)$$

Ecuación de continuidad de carga

que establece que la variación por unidad de tiempo de la carga encerrada en una superficie *cerrada* S , $Q_S(t)$, es igual al flujo total de densidad de corriente que atraviesa dicha superficie, observamos una clara contradicción entre lo que dice la ecuación de continuidad de la carga (4.67) y la expresión (4.66) derivada directamente de la ley de Ampère al aplicarla a campos variables en el tiempo. Dado que no cabe discusión acerca de la validez de la ecuación de continuidad de la carga (ésta no es más que la expresión local del *principio de conservación de la carga*), tenemos que concluir que la extensión de la ley de Ampère, tal y como se expresó en (4.62), NO es válida para situaciones no estacionarias.

Siguiendo el razonamiento de James C. Maxwell (~ 1860) debemos asumir que (4.62) debe modificarse para hacerla compatible con la ecuación de continuidad de la carga. Así, si consideramos que la expresión de la ley de Gauss para campos estáticos (ver Apartado 1.2.5) sí puede extenderse a campos variables en el tiempo,

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S(t)}{\epsilon_0},$$

³ Recuérdese que en el Apartado 3.5.1 se mostró que el campo magnetostático en el interior de un conductor cilíndrico rectilíneo de radio R recorrido por una intensidad I venía dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \hat{\tau}. \quad (4.65)$$

la ecuación de continuidad de la carga puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} &= -\frac{d}{dt} \left(\oint_S \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \right) \\ &= -\oint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S},\end{aligned}\quad (4.68)$$

o bien

$$\oint_S \left[\vec{j}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.69)$$

A la vista de la expresión anterior, es claro que reescribiendo la ley de Ampère de la siguiente forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \left[\vec{j}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} \quad (4.70)$$

Ley de Ampère-Maxwell

y siguiendo el mismo procedimiento de paso al límite de la curva Γ , entonces esta ley es ya congruente con la ecuación de continuidad de la carga.

En el segundo miembro de (4.70) aparecen dos términos que podemos relacionarlos con corrientes de naturaleza distinta.

■ Corriente de conducción

Es la corriente que hasta ahora se ha estudiado y que podemos identificar con el movimiento neto de las cargas eléctricas, y por ello se define como el flujo del vector densidad de corriente \vec{j} . Claramente esta corriente aparece donde haya un movimiento neto de cargas, por ejemplo, en el interior de un conductor recorrido por una corriente eléctrica.

■ Corriente de desplazamiento

Es un término de corriente que no está directamente relacionado con el movimiento de cargas (aunque puede ser consecuencia de ello). Se define como el flujo del vector *densidad de corriente de desplazamiento*, $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Este término debemos asociarlo exclusivamente a las variaciones temporales del campo eléctrico. (Recuérdese que una corriente estacionaria que recorre un conductor no da lugar a campo eléctrico alguno.) El origen de esta corriente podemos explorarlo en el paso de la ecuación (4.67) a (4.69) y relacionar la existencia de este tipo de corriente con la mera presencia de una carga eléctrica variable en el tiempo. En consecuencia, la densidad de corriente de desplazamiento existirá en todos los puntos del espacio donde haya un campo eléctrico variable en el tiempo.

Es interesante hacer notar que en el caso de que no haya corriente de conducción, la ley de Ampère-Maxwell se escribiría como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (4.71)$$

La ecuación anterior establece

la existencia de un campo magnético asociado a la existencia de una campo eléctrico variable en el tiempo.

EJEMPLO 4.6 (*) Cálculo del campo magnético en el interior de un condensador de placas circulares de radio R alimentado por una corriente $I(t)$

El campo eléctrico en el interior de un condensador de placas paralelas de densidad superficial de carga σ viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

donde \hat{u} es el vector unitario que va desde la placa cargada positivamente a la cargada negativamente. Expresando ahora la densidad superficial de carga σ en función de la carga total en la placa $Q(t)$ se tiene que

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} \hat{u},$$

y obviamente esto implica la existencia de una corriente de desplazamiento, $\vec{J}_D(t)$, en el interior del condensador que viene dada por

$$\vec{J}_D(t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{I(t)}{\pi R^2} \hat{u}.$$

Aplicando ahora la ley de Ampère-Maxwell según (4.71), esto es,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}.$$

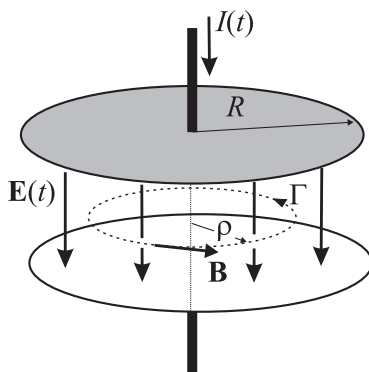
nos encontramos con un problema muy similar al del cálculo del campo magnetostático en el interior de un conductor cilíndrico rectilíneo (Apartado 3.5.1), con la diferencia de que en dicho problema la corriente era de conducción.

Consecuentemente usando la expresión (4.65) se llegaría a que en el interior del condensador

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R^2} \rho \hat{\tau} \quad (r \leq R)$$

4.7. Ecuaciones de Maxwell (*)

Tanto en el presente tema como en los temas anteriores se han visto una serie de leyes (la mayoría extraídas directamente de la experimentación) que determinan el comportamiento de los campos eléctrico y magnético. Entre las múltiples leyes y expresiones que se han visto, puede escogerse un conjunto de cuatro de ellas que forman la *base* del Electromagnetismo y de donde se pueden derivar *todos* los fenómenos electromagnéticos. Estas leyes fueron recogidas por James C. Maxwell (~ 1860) en una labor que ha sido reconocida como una de las síntesis más fructíferas de toda la historia de la



Física. Además de esta labor recopilatoria, Maxwell notó además una inconsistencia en la ley de Ampère que solucionó añadiendo a esta ecuación un término adicional relacionado con un nuevo tipo de corriente que denominó *corriente de desplazamiento*. Las ecuaciones de Maxwell son cuatro ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales (aquí se optará por presentarlas en forma integro-diferencial) que compendian toda la información que hemos adquirido sobre los campos eléctricos y magnéticos y su relación con las fuentes que los producen.

Maxwell realiza una revisión de las leyes del campo eléctrico y el magnético, extendiéndolas a campos eléctricos y magnéticos **variables en el tiempo**. Sus aportaciones pueden resumirse tal como sigue.

■ Ley de Gauss para el campo eléctrico

Maxwell extendió la validez de la ley de Gauss (que en su forma inicial (1.19) sólo era aplicable a campos eléctricos constantes en el tiempo; es decir, a campos electrostáticos) a campos eléctricos que varían en el tiempo, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$. De este modo, la ley de Gauss para el campo eléctrico puede escribirse, en general, como

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S(t)}{\epsilon_0}, \quad (4.72)$$

Ley de Gauss para $\vec{E}(\vec{r}, t)$

donde $Q_S(t)$ es la carga *total* (que ahora puede variar en el tiempo) encerrada en el interior de la superficie S y $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.

■ Ley de Gauss para el campo magnético

Dado que experimentalmente se encuentra que las líneas de campo magnético no divergen ni convergen en ningún punto del espacio (es decir, no existen cargas magnéticas), Maxwell propuso la siguiente ley para campos magnéticos variables en el tiempo, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.73)$$

Ley de Gauss para $\vec{B}(\vec{r}, t)$

El flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.

■ Ley de Faraday-Maxwell

La ley de inducción electromagnética según fue establecida por Faraday estaba directamente ligada a la presencia de conductores, de modo que en la expresión (4.18), la curva Γ coincidía estrictamente con el recorrido del circuito. Maxwell notó que la identidad matemática expresada por (4.18) no tenía por qué ligarse a la existencia de conductores; esto es, no hay nada en (4.18) que exija que la curva Γ deba coincidir con el recorrido del circuito. Con esta concepción en mente, la ley de Faraday-Maxwell:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.74)$$

Ley de Faraday-Maxwell

establece que la circulación del campo eléctrico a través de *una cur-*

va arbitraria, Γ , es igual a menos la variación del flujo magnético que atraviesa una superficie $S(\Gamma)$ cuyo contorno se apoya en Γ . Esta reinterpretación de la ley de Faraday dice mucho más que la ley original pues establece

la existencia de un campo eléctrico en cualquier punto del espacio donde exista un campo magnético variable en el tiempo.

■ Ecuación de Ampère-Maxwell

Tal como se ha discutido en el Apartado 4.6, la ley de Ámpere se generalizaba al caso de campos y corrientes variables en el tiempo de la siguiente forma:

Ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \left[\vec{j}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} \quad (4.70)$$

Una de las más importantes consecuencias que puede extraerse de las anteriores ecuaciones surge al combinar la ecuaciones de Faraday-Maxwell con la ecuación (4.71) de Ámpere-Maxwell para el caso del vacío (es decir, en ausencia de cargas y corrientes eléctricas),

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.74)$$

y

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (4.71)$$

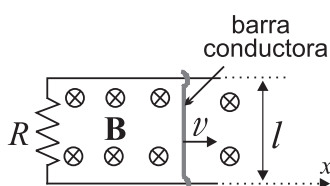
Una lectura de dichas ecuaciones sugiere la existencia de una perturbación electromagnética que puede *autosustentarse* en el vacío. La ecuación (4.74) nos dice que la presencia de un campo magnético variable en el tiempo provoca la aparición de un campo eléctrico, pero a su vez la ecuación (4.71) establece que la presencia de un campo eléctrico variable en el tiempo da lugar a la aparición de un campo magnético. En consecuencia, la existencia de un campo magnético variable en el tiempo generaría otro campo magnético que a su vez generaría otro... (igualmente ocurriría con campos eléctricos variables en el tiempo). Tenemos, por tanto, una situación en la que los campos electromagnéticos se autosustentan ya que serían ellos mismos su propia causa y efecto. En el próximo tema sobre ondas veremos que este fenómeno es precisamente el origen de las ondas electromagnéticas.

4.8. Problemas propuestos

4.1: En el interior de un solenoide de 600 vueltas, el flujo magnético cae de $8,0 \times 10^{-5}$ Wb a $3,0 \times 10^{-5}$ Wb en 15 ms. ¿Cuál es la fem media inducida? (1 Wb = 1 Tm².)

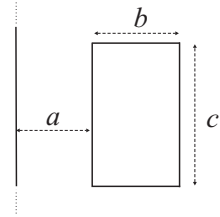
Sol.: $\xi = 2$ V.

4.2: Una barra metálica se desplaza a velocidad constante, v , sobre dos varillas conductoras unidas por una resistencia R en sus extremos izquierdos. Se establece un campo magnético



uniforme y estático, \vec{B} , como se indica en la figura. **a)** Calcule la fem inducida en el circuito así como la corriente inducida indicando su sentido; **b)** ¿Qué fuerza está siendo aplicada a la barra para que se mueva a velocidad constante?; **c)** Realícese un balance entre la potencia aplicada y la energía consumida. **Nota:** Despreciar el autoflujo del circuito.

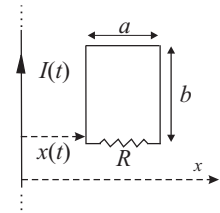
Sol.: **a)** $\xi = -|\vec{B}|l|\vec{v}|$; **b)** $\vec{F}_a = l|\vec{B}|\hat{x}$; **c)** Pot. aplicada = $F_a v =$ Pot. consumida = $I^2 R$.



4.3: Determinar el coeficiente de inducción mutua entre el circuito rectangular de la figura y el conductor recto infinito.

Sol: $M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$.

4.4: Un conductor rectilíneo e infinitamente largo está recorrido por una intensidad $I(t)$. Una espira rectangular de lados a y b y resistencia R es coplanaria con dicho conductor y varía su posición de acuerdo con una ley de movimiento $x(t)$ conocida. Calcule: **a)** el flujo magnético, $\Phi(t)$, que atraviesa la espira; **b)** la fem inducida en la espira, indicando que parte de la misma se debe al movimiento y cuál a la variación temporal del campo magnético; **c)** el valor de la corriente inducida en el instante t si $I(t) = I_0$ y $x(t) = vt$ ($v > 0$). **Nota:** Despreciar el autoflujo del circuito.

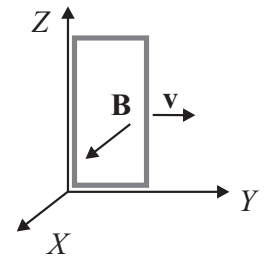


Sol.: **a)** $\Phi(t) = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{a+x(t)}{x(t)}\right)$;

b) $\xi(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[\frac{dI(t)}{dt} \ln\left(\frac{a+x(t)}{x(t)}\right) - \frac{aI(t)v}{x(t)(a+x(t))} \right]$;

c) $I_{ind} = \frac{ab\mu_0 I_0}{2\pi R(at + vt^2)}$ en sentido horario.

4.5: Un circuito rectangular de 2Ω de resistencia se desplaza en el plano YZ en una zona donde existe un campo magnético $\vec{B} = (6 - y)\hat{x}$ T. Las dimensiones del circuito son de 0,5 m de altura por 0,2 m de anchura. Suponiendo que en el instante inicial ($t = 0$) el lado izquierdo del circuito coincidía con el eje Z (según puede verse en el dibujo), calcule la intensidad inducida en el circuito en los casos siguientes: **a)** se desplaza a velocidad uniforme de 2 m/s hacia la derecha; **b)** transcurridos 100 s, si se mueve aceleradamente hacia la derecha con $a = 2 \text{ m/s}^2$ (supóngase que el circuito partió del reposo). **c)** Repita los apartados anteriores suponiendo que el movimiento es ahora paralelo al eje Z. **Nota:** en todos los casos considere despreciable el autoflujo.

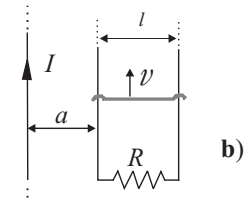
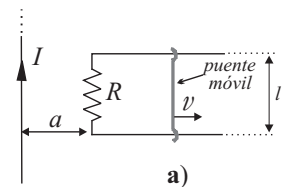


Sol.: **a)** 0.1 A; **b)** 10 A; **c)** 0 A en los dos casos, ya que no hay variación del flujo magnético.

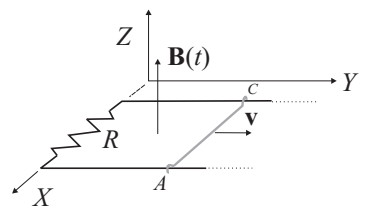
4.6: Un conductor rectilíneo infinito está recorrido por una intensidad I . Otro conductor en forma de U es coplanario con el primero, su base es una resistencia, R , y mediante un puente móvil, que se mueve a velocidad v , forma una espira rectangular de área variable (véase figura). Se consideran los casos en que R es paralela o perpendicular al conductor rectilíneo infinito [casos a) y b) en la figura adjunta]. Determine en cada caso la intensidad de corriente inducida y la fuerza que es necesario aplicar al puente móvil para que se mueva a velocidad v . **Nota:** en ambos casos considere despreciable el autoflujo del circuito en U.

Sol.: **a)** $I_{ind} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R(a + vt)}$, $F = \frac{v}{R} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(a + vt)} \right]^2$;

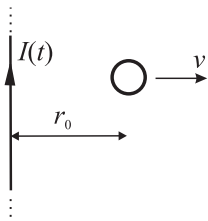
b) $I_{ind} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+l}{a}\right)$, $F = \frac{v}{R} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+l}{a}\right) \right]^2$.



4.7: En la figura se muestra un campo magnético uniforme y variable en el tiempo, $\vec{B}(t) = (2 + 0,5t^2)\hat{z}$ T (t en segundos). En la región donde existe dicho campo se ha dispuesto un circuito formado por un conductor en forma de U, que contiene una resistencia $R = 10 \Omega$, y que junto con la barra conductora móvil AC, de longitud $l = 1 \text{ m}$ y masa m (en kg), forma una espira rectangular de área variable. Si la ley de movimiento de la barra AC es $y(t) = 3t^2 \text{ m}$, calcule: **a)** el flujo magnético a través del circuito; **b)** la fem inducida en el circuito; **c)** la intensidad inducida, indicando su sentido; **d)** la fuerza debida al campo magnético que actúa sobre la barra en dirección y; **e)** la fuerza que hemos de aplicar a la barra móvil para que satisfaga la mencionada ley de movimiento. **Nota:** Considere despreciable el autoflujo en el circuito.

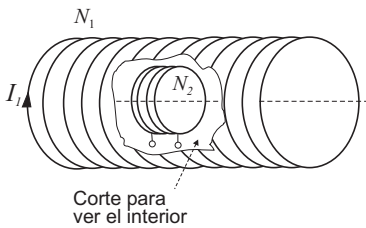


Sol.: **a)** $\Phi(t) = 6t^2 + 1,5t^4$ weber; **b)** $\xi(t) = -(12t + 6t^3)$ V; **c)** $I_{ind}(t) = 1,2t + 0,6t^3$ sentido horario; **d)** $\vec{F}_{mag}(t) = -(2,4t + 1,8t^3 + 0,3t^5)\hat{y}$; **e)** $\vec{F}_{aplic}(t) = (6m + 2,4t + 1,8t^3 + 0,3t^5)\hat{y}$.



4.8: A través de un hilo conductor rectilíneo muy largo circula una corriente que varía con el tiempo según la expresión $I(t) = at$, donde $a = 0,7 \text{ A/s}$. En las proximidades del hilo, y en un plano que contiene a éste, se encuentra una espira de radio $b = 5 \text{ mm}$ y resistencia $R = 0,2 \text{ m}\Omega$. Esta espira se aleja del hilo con una velocidad constante v , estando situada en el instante inicial ($t = 0$) a una distancia r_0 del hilo. Obtenga **a)** la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira; **b)** la expresión de la fuerza electromotriz inducida; **c)** la intensidad inducida en la espira en el instante inicial, indicando su sentido. **Nota:** debido al pequeño tamaño de la espira, podemos considerar —a efectos de cálculo— que el campo magnético creado por el hilo es *uniforme* en el interior de la espira e igual a su valor en el centro de la misma).

Sol: **a)** $\Phi(t) = \frac{\mu_0 b^2 at}{2(r_0 + vt)}$; **b)** $\xi(t) = \frac{\mu_0 b^2 ar_0}{2(r_0 + vt)^2}$; **c)** $I(0) = 4,39 \mu\text{A}$, sentido antihorario.



4.9: En la figura se muestra un solenoide esbelto de longitud l_1 y un total de N_1 espiras. Dentro del mismo y coaxial con el se ha dispuesto una bobina de radio R_2 y un total de N_2 espiras. Calcule: **a)** el coeficiente de inducción mutua entra ambos bobinados; **b)** la fem inducida entre los extremos de la bobina pequeña cuando por el solenoide esbelto circula una intensidad $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$. **c)** Repita los dos apartados anteriores suponiendo ahora que el eje de la bobina pequeña forma un ángulo θ con el del solenoide.

Sol: **a)** $M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_1 N_2}{l_1}$; **b)** $\xi = M \omega I_0 \sin(\omega t)$; **c)** en este caso, los resultados anteriores se multiplican por $\cos(\theta)$.

4.10: Determine la fem autoinducida en un solenoide de inductancia $L = 23 \text{ mH}$ cuando:

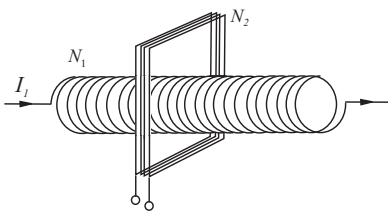
- a)** la corriente es de 25 mA en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 37 mA/s ;
b) la corriente es cero en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 37 mA/s ;
c) la corriente es de 125 mA en el instante inicial y disminuye con una rapidez de 37 mA/s ;
d) la corriente es de 125 mA y no varía.

Sol: en los tres casos **a)**, **b)** y **c)**, $\xi = 851 \times 10^{-6} \text{ V}$, salvo que la polaridad es diferente. Así, dado que la polaridad de fem autoinducida es tal que se opone a las variaciones de la intensidad, en los apartados **a)** y **b)** la polaridad es la misma (ya que en ambos casos la intensidad aumenta), siendo en **c)** contraria a los apartados anteriores (ya que en este caso disminuye); **d)** $\xi = 0$.

4.11: La intensidad que circula una bobina de inductancia L varía de acuerdo con la expresión $i(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$, donde τ es una constante. Halle: **a)** la corriente inicial ($t = 0$) y final ($t = \infty$) en la bobina; **b)** las expresiones temporales de la energía magnética en la bobina y de la potencia recibida por la misma; **c)** el instante de tiempo, t , en el cual la potencia recibida es máxima; **d)** la energía final almacenada en la bobina (esto es, para $t = \infty$).

Sol: **a)** $i(0) = 0$, $i(\infty) = I_0$; **b)** $U_m(t) = \frac{L i^2(t)}{2}$, $P(t) = \frac{L I_0 e^{-t/\tau} i(t)}{\tau}$; **c)** $t = \tau \ln 2$;

d) $U_m = \frac{L I_0^2}{2}$.



4.12: En la figura se ha representado un solenoide esbelto de longitud l y área de sección transversal S , que posee un total de N_1 espiras. Por dicho solenoide circula una intensidad $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Rodeando dicho solenoide se ha colocado una bobina rectangular de N_2 espiras. Calcule: **a)** el campo magnético, $B(t)$, en el interior del solenoide; **b)** el coeficiente de autoinducción, L , del solenoide; **c)** la diferencia de potencial, $V_1(t)$, entre los extremos del solenoide; **d)** el flujo magnético que atraviesa la bobina rectangular, $\Phi_2(t)$, así como la fuerza electromotriz inducida, $\xi_2(t)$, entre los bornes de dicha bobina.

Sol: **a)** $B(t) = \frac{\mu_0 N_1 I_0}{l} \sin(\omega t)$; **b)** $L = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}$; **c)** $V_1(t) = L \omega I_0 \cos(\omega t)$;

d) $\Phi_2(t) = \mu_0 I_0 N_1 N_2 S \sin(\omega t) / l$, $\xi_2(t) = -\mu_0 I_0 N_1 N_2 S \omega \cos(\omega t) / l$.

TEMA 5

Circuitos de Corriente Alterna

5.1. Introducción

Dado que en el Tema 4 se han establecido las leyes físicas que rigen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético cuando éstos son variables en el tiempo, en el presente tema estamos ya preparados para tratar circuitos con corrientes variables en el tiempo y así extender los conceptos de circuitos de corriente continua (Tema 2) al caso de circuitos de *corriente alterna*.

Entre las infinitas posibles dependencias temporales de la corriente $I(t)$ en los circuitos, en este tema estudiaremos únicamente aquella cuya variación es *armónica*, esto es, del tipo

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

(en el Apartado 5.3 se hará una descripción de las funciones armónicas). Las razones fundamentales para estudiar este tipo de corriente variable en el tiempo, denominada de forma genérica **corriente alterna** (CA), son dos:

1. Relevancia tecnológica.

Desde un punto de vista tecnológico, el uso de la corriente alterna es muy conveniente debido a que ésta es muy fácil de generar y su transporte puede realizarse fácilmente a altas tensiones (y pequeñas intensidades) minimizando así las pérdidas por efecto Joule (posteriormente, por inducción electromagnética, la corriente alterna puede fácilmente transformarse a las tensiones usuales de trabajo). Estas características junto con su fácil aplicación para motores eléctricos hizo que, a partir de finales del siglo XIX, la corriente alterna se impusiera para uso doméstico e industrial y que, por tanto, la tecnología eléctrica se haya desarrollado en torno a esta forma de corriente (en Europa la frecuencia de la corriente alterna es de 50 Hz). Una característica adicional de esta corriente es que su forma armónica se conserva cuando la corriente es modificada por el efecto de elementos lineales, a saber: resistencias, condensadores, bobinas, transformadores, etc.

2. Relevancia matemática.

Debido a que cualquier función periódica puede expresarse como la suma de diferentes armónicos (teorema de Fourier), el estudio de la corriente alterna constituye la base para el análisis de señales variables en el tiempo en redes lineales.

5.2. Generador de fem alterna

Anteriormente se ha señalado que una de las propiedades más destacadas y que hacen más útiles el uso de la corriente alterna es su fácil generación. El generador de fem alterna basa su funcionamiento en la ley de inducción electromagnética de Faraday (ver Apartado 4.2.2), transformando energía mecánica en energía electromagnética (en una forma opuesta a lo que hace el motor eléctrico, ver Apartado 3.3.2). Un esquema básico de un generador de fem alterna se muestra en la Fig. 5.1, donde podemos observar que el flujo magnético que atraviesa la espira giratoria viene dado por

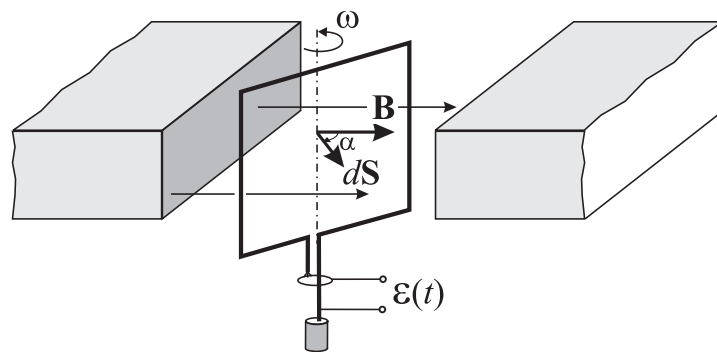


FIGURA 5.1: Esquema básico de un generador de fuerza electromotriz alterna.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}|S \cos \alpha \quad (5.2)$$

donde se ha supuesto que el campo magnético es uniforme en la región donde se mueve la espira y que $S = \int_S |d\vec{S}|$ es el área de la espira.

Si el movimiento que se le imprime a la espira es un *movimiento angular uniforme* caracterizado por una velocidad angular ω constante (como por ejemplo el que produciría un chorro de vapor constante dirigido a unas aspas conectadas con la espira), dado que $\alpha = \omega t + \alpha_0$, el flujo magnético que atraviesa la espira puede expresarse como

$$\Phi(t) = |\vec{B}|S \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (5.3)$$

Haciendo uso de la ley de inducción de Faraday (4.17), la fem $\xi(t)$ inducida en un conjunto de N espiras similares a la de la figura anterior será

$$\xi(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} = N|\vec{B}|S\omega \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (5.4)$$

esto es, se ha generado una fem alterna que puede expresarse en general como

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.5)$$

donde, en el presente caso, $\xi_0 = N|\vec{B}|S\omega$ y $\varphi = \alpha_0 - \pi/2$.

Actividad 5.1:

- Describa otros tipos de funciones variables en el tiempo que no sean de tipo armónico.
- ¿Por qué una CA puede ser expresada de forma general como $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$?
- ¿Por qué se requiere que las espiras del alternador giren a una velocidad angular constante para generar una CA?
- ¿Cuáles son las ventajas de usar una espira con múltiples vueltas en un alternador?

5.3. Aspectos generales de funciones armónicas

Tal como se ha señalado, una función armónica $f(t)$ es aquella que varía en el tiempo de la forma genérica:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.6)$$

donde A es la **amplitud**, ω la **frecuencia angular** y φ el **desfase**. La amplitud determina el rango de variación de la señal dado que

$$-A \leq f(t) \leq A .$$

La frecuencia angular está relacionada con la **frecuencia** f a través de

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (5.7)$$

donde T es el **periodo** de la señal, esto es, aquel intervalo de tiempo en el que la señal armónica se repite: $f(t) = f(t+T)$. La frecuencia $f = 1/T$ puede, por tanto, interpretarse como el número de "repeticiones" de la señal armónica en un segundo. El desfase φ viene determinado el origen del tiempo; esto es, por el valor de la función en el instante $t = 0$:

$$f(0) = A \cos \varphi .$$

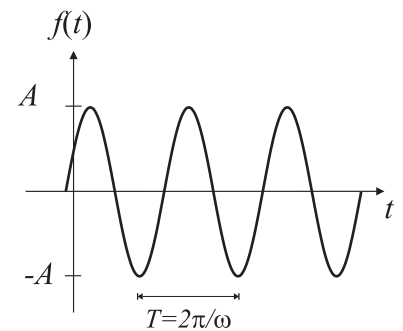
Es interesante recordar algunas relaciones trigonométricas de las funciones seno o coseno, a saber:

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \cos a \text{sen } b$$

$$\text{cos}(a \pm b) = \text{cos } a \cos b \mp \text{sen } a \text{sen } b$$

de donde puede deducirse, por ejemplo, que

$$\text{cos}(\omega t + \varphi - \pi/2) = \text{sen}(\omega t + \varphi) . \quad (5.8)$$



5.3.1. Valores eficaces

El valor eficaz, I_{ef} , de una corriente alterna dada por

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.9)$$

se define como la raíz cuadrada del valor cuadrático medio $\langle I^2(t) \rangle$ de la corriente, es decir,

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} \quad (5.10)$$

donde el valor medio de una función periódica, $F(t)$, de periodo T se define como

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt. \quad (5.11)$$

El valor eficaz de la corriente, al igual que otras magnitudes circuitales que varíen armónicamente, tiene mucha importancia práctica dado que es precisamente el valor que miden los polímetros analógicos. Siguiendo la definición (5.10) y teniendo en cuenta (5.11) se tiene que

$$I_{\text{ef}}^2 = \langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T} I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_0^2}{2}$$

por lo que el valor eficaz se relaciona con la amplitud, I_0 , de la corriente mediante la siguiente expresión:

Valor eficaz de la corriente alterna

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

Análogamente, el valor eficaz de cualquier otra magnitud que varíe armónicamente en el tiempo se define como la amplitud de dicha magnitud dividida por $\sqrt{2}$.¹

¹ El valor eficaz, I_{ef} , de una corriente alterna, $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$, que recorre una resistencia R es justamente el valor de la intensidad de la corriente *continua* que produce el mismo efecto Joule durante un periodo de tiempo T . La energía W_{CA} disipada por efecto Joule en una resistencia R por una corriente alterna durante un periodo de tiempo T puede calcularse como

$$W_{\text{CA}} = \int_0^T P(t) dt \quad (5.13)$$

donde $P(t)$ es la *potencia instantánea* disipada en la resistencia, que viene dada por el producto de la intensidad por la tensión, esto es:

$$P(t) = I(t)V(t). \quad (5.14)$$

Dado que según (5.32) la caída de tensión en la resistencia es $V(t) = RI(t)$, la energía disipada por la corriente *alterna* en esta resistencia puede escribirse como

$$W_{\text{CA}} = I_0^2 R \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = I_0^2 R \frac{T}{2} = I_{\text{ef}}^2 RT \quad (5.15)$$

que es precisamente el valor de la energía disipada por efecto Joule durante un periodo de tiempo T en dicha resistencia R si esta fuese recorrida por una corriente *continua* de valor I_{ef} ; esto es,

$$W_{\text{CC}} = I_{\text{ef}}^2 RT. \quad (5.16)$$

5.3.2. Análisis fasorial

En la resolución de ecuaciones de segundo grado, es frecuente encontrarse con soluciones que implican tomar la raíz cuadrada de un negativo, por ejemplo $\sqrt{-9}$. No obstante, es fácil notar que no existe ningún número *real* (esto es, que pertenezca al conjunto \mathbb{R}) tal que su cuadrado sea -9 . Para solucionar esta cuestión se introducen los números *imaginarios*, que pueden formarse a partir de la definición de la **unidad imaginaria**, j :

$$j = \sqrt{-1} \quad (5.17)$$

de modo que

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \times 9} = \sqrt{-1} \times \sqrt{9} = j3.$$

Los números que tienen tanto parte real como imaginaria se conocen como **números complejos** y pueden definirse como

$$z = a + jb \quad (5.18)$$

donde $a = \text{Re}(z)$ se dice que es la *parte real* de z y $b = \text{Im}(z)$ la *parte imaginaria* de z .

Usualmente los números complejos se representan en un plano de modo que sobre el eje vertical se sitúa el eje imaginario y sobre el eje horizontal el eje real. De este modo, el número z queda caracterizado por un punto (como se muestra en la figura adjunta) que está a una distancia $|z|$ dada por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.19)$$

que se conoce como **módulo** de z , y con un ángulo φ medido en sentido antihorario a partir del eje real dado por

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5.20)$$

que se denomina **argumento** de z .

Es fácil observar en la figura anterior que el número complejo z puede escribirse como

$$z = |z| \cos \varphi + j |z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

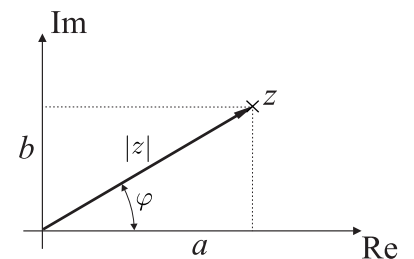
y dado que la *identidad de Euler* nos dice que

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (5.21)$$

se tiene que el número complejo z puede también escribirse como

$$z = |z| e^{j\varphi}. \quad (5.22)$$

Esta manera de escribir los números complejos es muy conveniente puesto que nos proporciona de una forma directa la información sobre su módulo y su argumento.



Teniendo en cuenta la identidad (5.21) es válida igualmente para argumentos que sean funciones; esto es,

$$e^{j\phi(t)} = \cos \phi(t) + j \operatorname{sen} \phi(t) \quad (5.23)$$

es fácil notar que la función armónica

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

puede también escribirse como

$$f(t) = \operatorname{Re} \left(A e^{j(\omega t + \varphi)} \right) = \operatorname{Re} \left(A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right) \quad (5.24)$$

sin más que identificar $\phi(t) = \omega t + \varphi$.

Si ahora definimos el **fasor**, \tilde{f} , de la función $f(t)$ como

$$\tilde{f} = A e^{j\varphi} \quad (5.25)$$

se tiene finalmente la función armónica puede expresarse como

$$f(t) = \operatorname{Re} \left(\tilde{f} e^{j\omega t} \right) . \quad (5.26)$$

La identidad (5.26) permite establecer una relación biunívoca entre las funciones armónicas y sus fasores asociados, de modo que a toda función armónica se le puede asociar un fasor; esto es,

$$f(t) \leftrightarrow \tilde{f} . \quad (5.27)$$

Siguiendo las propiedades más elementales del cálculo de números complejos, pueden demostrarse fácilmente las siguientes propiedades:

$$f_1(t) + f_2(t) \leftrightarrow \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \quad (5.28)$$

$$\alpha f(t) \leftrightarrow \alpha \tilde{f} \quad (5.29)$$

siendo $f_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ y α un número real.

Una propiedad adicional de fundamental importancia práctica es

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{f} . \quad (5.30)$$

Esta última propiedad puede deducirse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega A \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \\ &= \operatorname{Re} \left(-\omega A e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)} \right) = \operatorname{Re} \left(-\omega A e^{j\varphi} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(j\omega A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right) = \operatorname{Re} \left(j\omega \tilde{f} e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

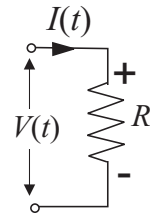
de donde se deduce que el fasor asociado a df/dt es precisamente $j\omega \tilde{f}$.

5.4. Relación $I \leftrightarrow V$ para Resistencia, Condensador y Bobina

■ Resistencia.

Según se discutió en el Apartado 2.3.2, en corriente continua la relación que existía entre la tensión V y la intensidad I en una resistencia caracterizada por R venía dada por la ley de Ohm, esto es: $V = RI$. Experimentalmente puede verificarse que la ley de Ohm sigue siendo válida para corrientes alternas y, por tanto, puede escribirse que²

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}. \quad (5.32)$$



■ Condensador.

En la expresión (1.52) se definió la capacidad C de un condensador como la relación entre la carga Q de las placas y la diferencia de potencial V entre éstas, esto es,

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (5.33)$$

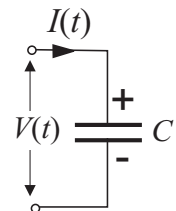
Esta relación se cumple igualmente para corriente alterna, de donde puede deducirse que la carga variable en el tiempo, $Q(t)$, puede escribirse como

$$Q(t) = CV(t). \quad (5.34)$$

Al derivar la expresión anterior respecto al tiempo obtenemos la siguiente relación entre la intensidad $I(t)$ y la tensión entre las placas $V(t)$:

$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt}. \quad (5.35)$$

Esta relación indica que la *derivada temporal* de la diferencia de potencial entre las placas está relacionada linealmente mediante el parámetro C con la intensidad que llega al condensador.

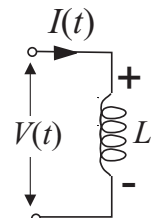


■ Bobina.

Tal y como se expresó en (4.45), el efecto de autoinducción electromagnética de una bobina caracterizada por una inductancia L y recorrida por una intensidad $I(t)$ podía considerarse como una caída de tensión en la bobina, $V(t)$, dada por

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (5.36)$$

La bobina puede considerarse, por tanto, como un elemento de circuito que relaciona linealmente, mediante el parámetro L , la derivada temporal de la intensidad que circula por ella con la caída de tensión en la misma.



² Los signos más y menos en la resistencia y en otros elementos en los circuitos de corriente alterna indican los puntos de potencial más alto y más bajo en dichos elementos cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la correspondiente figura.

Actividad 5.2:

- ¿Cuál es la principal diferencia entre la relación $I(t) \leftrightarrow V(t)$ en un resistor y las que tenemos para un condensador y una bobina?
- ¿Cuáles son las principales diferencias entre las relaciones $I(t) \leftrightarrow V(t)$ en un condensador y en una bobina?
- Trate de entender las principales implicaciones matemáticas del hecho de que la relación $I \leftrightarrow V$ en condensadores/bobinas sea a través de derivadas temporales en el voltaje/corriente.

5.5. Análisis fasorial de circuitos de CA

Dado que el estudio de la corriente alterna implica el tratamiento de funciones con una dependencia temporal de tipo armónica, la introducción de los **fasores** asociados a estas funciones simplificará enormemente el cálculo matemático necesario. Tal y como se explica en el Apartado 5.3.2, a una función armónica $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ se le hace corresponder un fasor \tilde{I} :

$$I(t) \leftrightarrow \tilde{I}$$

que viene dado por

Fasor \tilde{I} asociado a

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tilde{I} = I_0 e^{j\varphi} \quad (5.37)$$

de modo que

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}) \quad (5.38)$$

e igualmente

$$\frac{dI(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{I}. \quad (5.39)$$

5.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina

Haciendo uso de las relaciones fasoriales apropiadas es posible expresar las relaciones fundamentales para resistencias, condensadores y bobinas en la siguiente forma:

- **Resistencia.**

La relación (5.32) puede expresarse en forma fasorial simplemente como

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} \quad (5.40)$$

o bien como

$$\tilde{V} = R \tilde{I}. \quad (5.41)$$

■ **Condensador.**

Para el condensador, haciendo uso de la propiedad (5.39), la relación (5.35) puede expresarse como

$$\tilde{I} = j\omega C\tilde{V} \quad (5.42)$$

o equivalentemente

$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} . \quad (5.43)$$

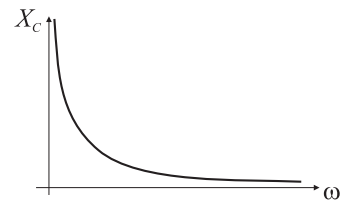
La expresión anterior suele también escribirse como

$$\tilde{V} = -jX_C\tilde{I} \quad (5.44)$$

donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.45)$$

se denomina **reactancia capacitiva** y se expresa en ohmios (Ω). Esta magnitud *depende* de la frecuencia tendiendo a cero para frecuencias muy altas y a infinito para frecuencias muy bajas. Esto se manifiesta en el hecho de que para frecuencias bajas el condensador se comporta como un elemento que apenas deja fluir la corriente mientras que a frecuencias altas casi no impide la circulación de la corriente.



■ **Bobina.**

La relación (5.39) para la bobina puede expresarse en forma fasorial como

$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I} . \quad (5.46)$$

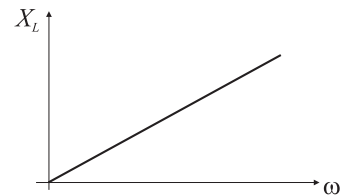
Si se define la **reactancia inductiva**, X_L , como

$$X_L = \omega L \quad (5.47)$$

la expresión fasorial (5.46) puede también escribirse como

$$\tilde{V} = jX_L\tilde{I} . \quad (5.48)$$

La reactancia inductiva viene dada en ohmios y es un parámetro que *depende* linealmente con la frecuencia, de modo que tiende a cero para frecuencias bajas y a infinito para frecuencias altas. Podemos afirmar entonces que la bobina se comporta como un elemento que se opondría al paso de la corriente a medida que la frecuencia de ésta aumenta.



Es interesante observar que las relaciones tensión/intensidad para el condensador y la bobina fueron expresadas en el Apartado 5.4 mediante expresiones *diferenciales* han podido ser ahora reescritas como simples expresiones *algebraicas* mediante el uso de sus fasores asociados. Es más, se ha encontrado que el fasor \tilde{V} siempre puede relacionarse linealmente con el fasor \tilde{I} mediante un parámetro genérico Z ,

$$\tilde{V} = Z\tilde{I} \quad (5.49)$$

que denominaremos **impedancia** y que, en general, es un número complejo (notar que NO es un fasor):

Impedancia de una resistencia, condensador y bobina

$$Z = \begin{cases} R & \text{Resistencia} \\ -jX_C & \text{Condensador} \\ jX_L & \text{Bobina .} \end{cases} \quad (5.50)$$

Actividad 5.3:

- Enumere las principales ventajas que proporciona el uso de fasores al tratar circuitos de CA.
- ¿Cuáles son las unidades de impedancia en el S.I.? ¿Cuáles son las unidades en el S.I. de ωL y ωC ?
- ¿Es el concepto de impedancia útil en circuitos de CC? Explique las posibles ventajas prácticas de su uso en circuitos de CA.
- ¿Por qué una bobina se comporta como un circuito abierto para CA de alta frecuencia? Trate de relacionar este hecho con el valor de la impedancia de la bobina y dé alguna razón física para ello.
- ¿Por qué un condensador se comporta como un cortocircuito para CA de alta frecuencia? Trate de relacionar este hecho con el valor de la impedancia del condensador y dé alguna razón física para ello.

5.5.2. Reglas de Kirchhoff

Las reglas de Kirchhoff junto con las relaciones tensión/intensidad en los distintos elementos que constituyen los circuitos nos permitirán determinar el comportamiento de las magnitudes eléctricas en corriente alterna. Las reglas de Kirchhoff fueron introducidas en el Tema 2 para los circuitos de corriente continua, donde suponíamos que se había establecido una situación estacionaria (es decir, las magnitudes no variaban en el tiempo). En los circuitos de corriente alterna supondremos que las reglas de Kirchhoff siguen siendo válidas para cada instante de tiempo.³ En consecuencia podemos expresar las reglas de Kirchhoff de la siguiente manera.

³ Básicamente estamos admitiendo que en cada instante de tiempo se alcanza una situación estacionaria.

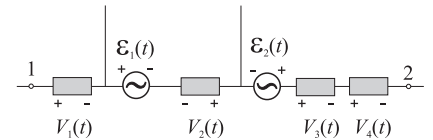
► REGLA DE KIRCHHOFF PARA LA TENSIÓN

$$V_{12}(t) = \sum_j V_j(t) - \sum_i \xi_i(t) \quad (5.51)$$

donde $V_j(t)$ es la caída de potencial en el elemento j -ésimo y $\xi_i(t)$ es la i -ésima fem del recorrido.

En el ejemplo mostrado en la figura adjunta, la regla (5.51) nos dice que

$$V_{12}(t) = [V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)] - [-\xi_1(t) + \xi_2(t)] .$$



► REGLA DE KIRCHHOFF PARA LAS INTENSIDADES

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0 \quad (5.52)$$

esto es, en cada instante de tiempo, la suma de todas las intensidades que llegan y salen de un nudo es cero.

Las anteriores reglas pueden también expresarse en forma fasorial, adoptando entonces la siguiente forma:

■ Regla de Kirchhoff fasorial para la tensión

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j \tilde{V}_j - \sum_i \tilde{\xi}_i \quad (5.53)$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j Z_j \tilde{I}_j - \sum_i \tilde{\xi}_i \quad (5.54)$$

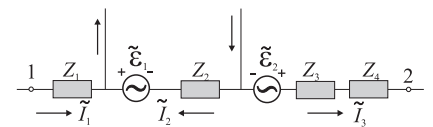
donde Z_j es la impedancia del elemento j -ésimo recorrido por la intensidad fasorial \tilde{I}_j . En el ejemplo de la figura (siguiendo los criterios de signos ya explicados para los circuitos de corriente continua), al aplicar (5.54) obtenemos

$$\tilde{V}_{12} = Z_1 \tilde{I}_1 - Z_2 \tilde{I}_2 + (Z_3 + Z_4) \tilde{I}_3 - [-\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2] .$$

■ Regla de Kirchhoff fasorial para las intensidades

$$\sum_{i=1}^N \tilde{I}_i = 0 \quad (5.55)$$

es decir, la suma de todas las intensidades fasoriales que llegan y salen de un nudo es cero.



Actividad 5.4:

- A la vista de las reglas de Kirchhoff expresadas en el dominio del tiempo y en forma fasorial, describa las principales ventajas que proporciona el uso de fasores para el estudio de circuitos de CA
- Si tenemos fuentes de voltaje de CC y de CA en el mismo circuito, ¿serían las reglas de Kirchhoff válidas en esta situación? Justifique su respuesta.
- ¿Puede ver alguna relación entre las reglas de Kirchhoff (2.39), (2.40) presentadas en la Sec. 2.5 y estas reglas ahora presentadas en forma fasorial en (5.54),(5.55)?

5.5.3. Circuito RLC serie

Debemos observar que las reglas de Kirchhoff tal como han sido establecidas en (5.54) y (5.55) son “idénticas” a las reglas (2.39) y (2.40) establecidas para corriente continua, considerando que ahora tenemos fasores e impedancias en vez de números reales y resistencias. Como un ejemplo sencillo de aplicación de las leyes de Kirchhoff fasoriales consideraremos a continuación un circuito RLC serie en corriente alterna.

Si el generador de fem alterna proporciona una ξ dada por

$$\xi(t) = \xi_o \cos(\omega t + \theta) \quad (5.56)$$

cuyo fasor asociado es

$$\tilde{\xi} = \xi_o e^{j\theta} \quad (5.57)$$

al aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones (5.51) al circuito de la figura tendremos que

$$\xi(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t) \quad (5.58)$$

o bien en forma fasorial:

$$\tilde{\xi} = \tilde{V}_R + \tilde{V}_C + \tilde{V}_L . \quad (5.59)$$

Teniendo ahora en cuenta las expresiones fasoriales (5.41),(5.44) y (5.48), se tiene que

$$\tilde{\xi} = [R + j(X_L - X_C)] \tilde{I} \quad (5.60)$$

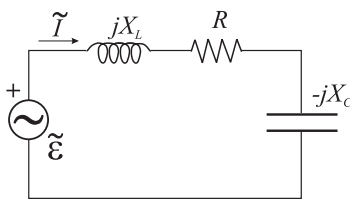
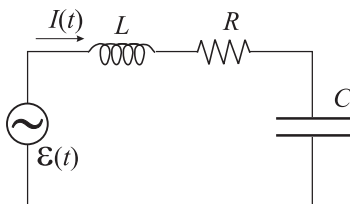
$$= Z \tilde{I} \quad (5.61)$$

donde la impedancia, Z , del circuito RLC serie será

$$Z = R + j(X_L - X_C) \quad (5.62)$$

esto es, la suma de las impedancias de cada uno de los elementos del circuito. Esta impedancia puede también expresarse en forma módulo y argumento como

$$Z = |Z| e^{j\alpha} \quad (5.63)$$



Impedancia de un circuito serie RLC

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (5.64)$$

y

$$\alpha = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (5.65)$$

Despejando en la expresión (5.61), el fasor intensidad puede calcularse como

$$\tilde{I} = I_o e^{j\varphi} = \frac{\tilde{\xi}}{Z}. \quad (5.66)$$

Sustituyendo ahora (5.57) y (5.63) en la expresión anterior, \tilde{I} puede reescribirse como

$$\tilde{I} = \frac{\xi_o}{|Z|} e^{j(\theta - \alpha)}$$

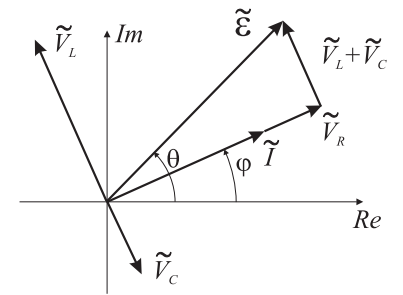
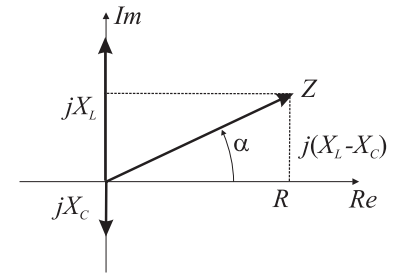
de donde concluimos que la amplitud y fase del fasor intensidad vienen dados por

$$I_o = \frac{\xi_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (5.67)$$

y

$$\varphi = \theta - \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (5.68)$$

Obviamente, la expresión temporal de la intensidad puede obtenerse al sustituir las expresiones anteriores para I_o y φ en $I(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi)$.



Actividad 5.5:

- Obtenga la ecuación diferencial para la corriente en el circuito serie RLC. A la vista de esta ecuación, ¿puede ver las ventajas que proporciona el uso de fasores e impedancia?
- ¿Son las reglas de Kirchhoff válidas para cualquier circuito y variación temporal de la corriente? Justifique su respuesta.
- En el circuito serie RLC, ¿cuáles son las implicaciones de tener $X_L = X_C$?

5.5.4. Resonancia

Si la amplitud de la intensidad para el circuito serie RLC, según se ha obtenido en (5.67), se expresa explícitamente como una función de la frecuencia, obtendríamos que

$$I_o(\omega) = \frac{\xi_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5.69)$$

o, equivalentemente,

$$I_0(\omega) = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}}. \quad (5.70)$$

Definiendo la frecuencia ω_0 como

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (5.71)$$

podemos reescribir (5.70) como

$$I_0(\omega) = \frac{\omega \xi_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (5.72)$$

donde puede observarse en la figura que la amplitud de la intensidad en el circuito serie RLC depende claramente de la frecuencia y presenta un máximo absoluto para un valor de frecuencia $\omega = \omega_0$. Este fenómeno se conoce en general como *resonancia* y aparece en múltiples situaciones prácticas (por ejemplo, en los osciladores forzados). La frecuencia, ω_r , a la que aparece el máximo de amplitud recibe el nombre de **frecuencia de resonancia**, siendo para el circuito serie RLC: $\omega_r = \omega_0$; cumpliéndose además a esta frecuencia que $X_L = X_C$, por lo que, según (5.65), la impedancia es puramente real. Los fenómenos de resonancia tienen múltiples aplicaciones prácticas; por ejemplo, si el circuito serie RLC se utiliza como el circuito de sintonía de una radio, la capacidad del condensador puede variarse de modo que la frecuencia de resonancia vaya cambiando, sintonizándose así las diferentes emisoras (esto es, la emisora que emita con frecuencia igual a la de resonancia es la que se recibiría con más intensidad).

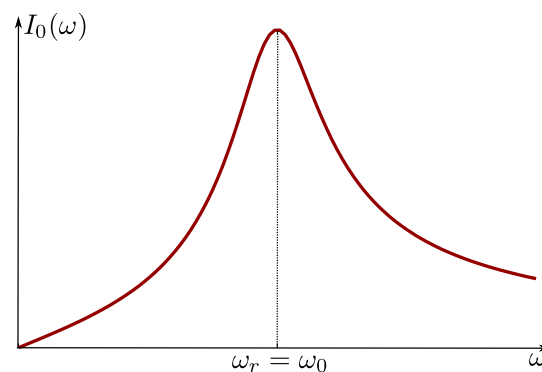


FIGURA 5.2: Amplitud de la intensidad frente a la frecuencia en un circuito serie RLC.

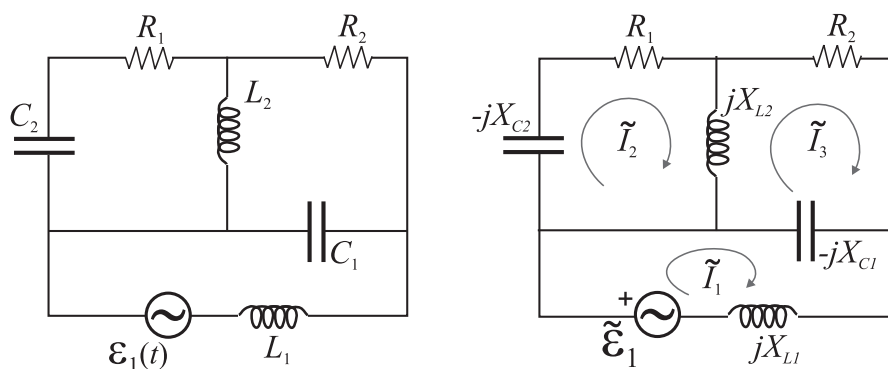
Actividad 5.6:

- ¿Puede encontrar alguna razón para explicar que la amplitud de la corriente en un circuito serie RLC dependa de la frecuencia de la fuente de tensión de CA?
- Dibuje I_o frente a ω de acuerdo con la Ec. (5.72). ¿Qué ocurriría si $R \rightarrow 0$?
- Demuestre que en resonancia la amplitud de la tensión en la bobina o bien el condensador puede ser mucho mayor que el valor de la amplitud de la fuente de tensión de CA.
- Obtenga una expresión para la amplitud de la intensidad de la corriente si la fuente de tensión está en paralelo con el condensador, la bobina y el resistor. ¿Hay resonancia en este caso?

5.5.5. (*) Análisis de mallas

La resolución del circuito RLC serie en corriente alterna ha puesto de manifiesto que mediante el uso de los fasores y de la impedancia asociada a cada elemento, la resolución de un circuito de corriente alterna es equivalente a la de uno de corriente continua en la que las magnitudes intensidad y tensión son ahora fasores y las impedancias juegan el papel de resistencias. De este modo, todas las técnicas introducidas en el Tema 2 para la resolución de circuitos de corriente continua pueden ser ahora aplicadas a la resolución de circuitos de corriente alterna, teniendo en cuenta las equivalencias antes mencionadas.

Como ejemplo, un circuito como el mostrado en la Figura 5.3 puede resolverse mediante la aplicación del método de las corrientes de mallas. Definiendo los fasores intensidades de malla en cada una de las tres mallas del circuito según se muestra en la figura y teniendo en cuenta el valor de las impedancias de cada uno de los elementos implicados, la ecuación para las

**FIGURA 5.3:** Circuito de tres mallas

intensidades de malla puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [Z_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_3 \end{bmatrix}$$

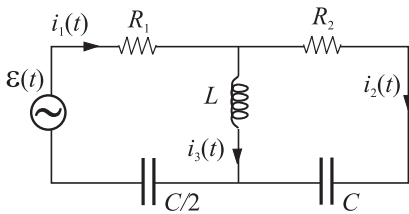
donde la matriz de impedancias viene dada por

$$[Z_{ij}] = \begin{bmatrix} j(X_{L1} - X_{C1}) & 0 & jX_{C1} \\ 0 & R_1 + j(X_{L2} - X_{C2}) & -jX_{L2} \\ jX_{C1} & -jX_{L2} & R_2 + j(X_{L2} - X_{C1}) \end{bmatrix}.$$

Para los cálculos en los ejercicios es siempre conveniente trabajar con números sustituyendo las expresiones algebraicas por sus valores numéricos concretos antes de resolver el correspondiente sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 5.1 En el circuito de la figura, determine las intensidades fasoriales, \tilde{I}_1 , \tilde{I}_2 e \tilde{I}_3 y las instantáneas, $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

Datos: $\xi(t) = 20 \text{ sen}(4 \times 10^4 t) \text{ V}$, $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $L = 0,2 \text{ mH}$ y $C = 3,125 \mu\text{F}$.



Lo primero que podemos hacer es obtener la frecuencia angular, ω , de la fuente; esto es,

$$\omega = 4 \times 10^4 \text{ rad/s}.$$

Para obtener el fasor fuerza electromotriz notemos que

$$\xi(t) = 20 \text{ sen}(4 \times 10^4 t) \text{ V} = 20 \text{ cos}(4 \times 10^4 t - \pi/2) \text{ V}$$

y, por tanto, su correspondiente fasor asociado es

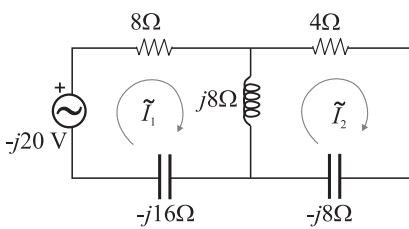
$$\tilde{\xi} = 20e^{-j\pi/2} = -j20 \text{ V}.$$

Para obtener las impedancias de la bobina y los condensadores, debemos calcular primero las reactancias inductivas y capacitivas:

$$X_L = \omega L = 4 \times 10^4 \cdot 2 \times 10^{-4} = 8 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \times 10^4 \cdot 3,125 \times 10^{-6}} = 8 \Omega$$

por lo que el circuito equivalente que debemos resolver es el mostrado en la figura adjunta.



Las ecuaciones para las intensidades fasoriales de malla, \tilde{I}_1 e \tilde{I}_2 , son

$$\begin{bmatrix} -j20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - j8 & -j8 \\ -j8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}$$

o bien simplificando al dividir por 4:

$$\begin{bmatrix} -j5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - j2 & -j2 \\ -j2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Las intensidades de mallas pueden ahora calcularse usando, por ejemplo, el método de sustitución. Así de la segunda ecuación obtenemos

$$\tilde{I}_2 = 2j\tilde{I}_1$$

que al sustituir en la primera ecuación, nos lleva a que

$$-j5 = (2 - j2)\tilde{I}_1 - j2j2\tilde{I}_1 = (2 - j2 + 4)\tilde{I}_1 = (6 - j2)\tilde{I}_1.$$

Despejando tenemos que

$$\tilde{I}_1 = \frac{-j5}{6 - j2} = \frac{-j5(6 + j2)}{(6 - j2)(6 + j2)} = \frac{-j5(6 + j2)}{5 \cdot 8} = \frac{-j6 + 2}{8} = \frac{1 - j3}{4}$$

y sustituyendo ahora este valor para obtener \tilde{I}_2 , obtenemos

$$\tilde{I}_2 = \frac{2j(1 - j3)}{2 \cdot 2} = \frac{3 + j}{2}.$$

Para calcular ahora el fasor \tilde{I}_3 , asociado a $i_3(t)$, debemos tener en cuenta que

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$$

por lo que

$$\tilde{I}_3 = \frac{1 - j3}{4} - \frac{3 + j}{2} = \frac{1 - j3 - 6 - j2}{4} = \frac{-5 - j5}{4}.$$

Antes de obtener las expresiones de las intensidades instantáneas es conveniente expresar los fasores anteriores en forma módulo y argumento:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= \frac{\sqrt{10}}{4} e^{j \arctan(-3)} = \frac{\sqrt{10}}{4} e^{-j1,249} \\ \tilde{I}_2 &= \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j \arctan(1/3)} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j0,291} \\ \tilde{I}_3 &= \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j \arctan(-1/-1)} = \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j5\pi/4}.\end{aligned}$$

(Notar que \tilde{I}_3 se encuentra en el tercer cuadrante, por lo que su fase será $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$).

Finalmente las intensidades instantáneas vienen dadas por

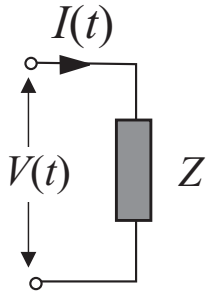
$$\begin{aligned}i_1(t) &= \frac{\sqrt{10}}{4} \cos(4 \times 10^4 t - 1,249) \text{ A} \\ i_2(t) &= \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(4 \times 10^4 t + 0,291) \text{ A} \\ i_3(t) &= \frac{5\sqrt{2}}{4} \cos(4 \times 10^4 t + 5\pi/4) \text{ A}.\end{aligned}$$

Actividad 5.7:

- La única manera efectiva de familiarizarse con el análisis de circuitos de CA es resolver tantos problemas como sea posible. Se aconseja, por tanto, que resuelva los problemas propuestos en la Sec. 5.7 y muchos más que pueda encontrar en diferentes libros de texto y otras fuentes.

5.6. Balance de potencia

5.6.1. Potencia media



Consideremos una rama de un circuito de CA caracterizada por una impedancia $Z = |Z|e^{j\varphi}$ donde los valores de la tensión e intensidad instantáneas vienen dados por

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

siendo $-\varphi$ el ángulo de desfase entre la tensión y la intensidad (en el presente caso se ha tomado, por sencillez, la fase inicial de la tensión igual a cero, aunque este hecho no afecta a las conclusiones y resultados del presente apartado).

La potencia *instantánea*, $P(t)$, consumida en dicha rama vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P(t) = I(t)V(t) = I_0 V_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \quad (5.73)$$

donde debemos observar que dicha potencia es una función variable y *periódica* en el tiempo ($T = 2\pi/\omega$). Debido al carácter variable y periódico de esta magnitud, la idea de “potencia consumida en el sistema” puede relacionarse más convenientemente con la **potencia media** en un periodo, P_{med} , cuya expresión será

$$P_{\text{med}} = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt. \quad (5.74)$$

La potencia media es justamente el valor que usualmente se proporciona al referirnos al consumo de cualquier aparato eléctrico. Esta magnitud nos da una idea clara de cómo se comporta el sistema puesto que lo que ocurre en el intervalo “natural” de tiempo en el sistema (esto es, el periodo T) determina el comportamiento del sistema en cualquier otro intervalo de tiempo mayor —dado que este comportamiento será simplemente una repetición de lo que sucede en uno de los periodos. Así, por ejemplo, la energía, ΔE , consumida en el sistema durante un intervalo de tiempo $\Delta t \gg T$ puede calcularse como

$$\Delta E \simeq P_{\text{med}} \Delta t.$$

Usando (5.73) en (5.74) para obtener la potencia media tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\text{med}} &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt \\ &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \left[\cos \varphi \int_0^T \cos^2(\omega t) dt + \sin \varphi \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \right] \quad (5.75) \end{aligned}$$

y dado que la segunda integral se anula mientras que la primera es $\frac{1}{2}T$, podemos concluir que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} I_o V_o \cos \varphi = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \varphi . \quad (5.76)$$

Potencia media consumida

Es interesante observar que, desde un punto de vista operativo, la potencia media podría haberse calculado igualmente mediante la siguiente expresión:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V}\tilde{I}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V}^*\tilde{I}) . \quad (5.77)$$

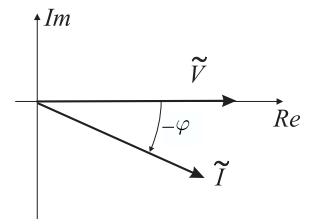
Si tomamos las expresiones fasoriales correspondientes a la intensidad y tensión consideradas,

$$\tilde{V} = V_o \quad (5.78)$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = I_o e^{-j\varphi} \quad (5.79)$$

podemos comprobar que efectivamente (5.77) nos dice que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_o I_o e^{-j\varphi}) = \frac{1}{2} I_o V_o \cos \varphi . \quad (5.80)$$

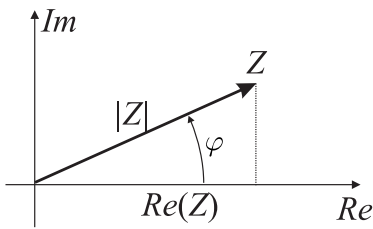


Actividad 5.8:

- Explique las razones que nos han llevado a emplear la “potencia media” en vez de la “potencia instantánea.”
- Lleve a cabo los pasos detallados para obtener (5.76) a partir de (5.75).
- Demuestre que la expresión (5.77) para el cálculo de la potencia media es equivalente a (5.76).
- Deduzca las condiciones que hacen que la potencia media sea nula. ¿Puede encontrar las razones físicas para ello?

5.6.2. Factor de potencia

En la expresión (5.76) de la potencia media podemos apreciar que junto al producto de las amplitudes de la tensión e intensidad aparece un factor $\cos \varphi$ denominado **factor de potencia**. Este factor de máxima importancia práctica es determinante en el consumo/suministro de potencia en el sistema puesto que su valor está comprendido en el intervalo $[-1, 1]$. Por ejemplo, en la resonancia donde el desfase entre la tensión y la intensidad es nulo, el factor de potencia es uno y consecuentemente el consumo de potencia es máximo. Por el contrario si el desfase entre la tensión y la intensidad fuese de $\pi/2$ el consumo de potencia sería nulo.



El factor de potencia puede expresarse en términos de la impedancia Z de la rama, que venía dada por

$$Z = |Z|e^{j\varphi}.$$

Dado que en el presente caso la fase del fasor \tilde{V} es nula, la fase del fasor intensidad \tilde{I} será la opuesta a la fase de la impedancia,

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I_0 e^{-j\varphi} \\ &= \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_0}{|Z|e^{j\varphi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j\varphi}\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}. \quad (5.81)$$

En la figura anterior podemos observar que

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} \quad (5.82)$$

y, consecuentemente, la potencia media puede también expresarse como

$$P_{\text{med}} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \varphi = I_{\text{ef}} |Z| I_{\text{ef}} \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = I_{\text{ef}}^2 \operatorname{Re}(Z) \quad (5.83)$$

o expresiones equivalentes (en función de V_{ef}).

Actividad 5.9:

- ¿Cuando encontramos el máximo de potencia consumida en un circuit RLC serie? Justifique su respuesta.
- ¿Cuando encontramos el máximo de potencia consumida en un circuit RLC paralelo? Justifique su respuesta.
- ¿Podemos tener un circuito con resistores, condensadores y bobinas en el que el consumo de potencia sea nulo? Justifique su respuesta. Demuestre que un ejemplo de tal circuito es un resistor en serie con un paralelo LC.

5.6.3. Consumo de potencia

La expresión (5.83) indica que la potencia media consumida puede relacionarse directamente con la parte real de la impedancia. Si el sistema bajo estudio fuese un circuito “serie”, entonces la parte real de la impedancia vendría dada simplemente por la suma de las resistencias pero si el circuito fuese de otro tipo, la presencia de las partes reactivas del circuito (condensadores y bobinas) aparecerán explícitamente en la parte real de la impedancia. Evidentemente, el consumo de potencia sólo se lleva a cabo en las

resistencias (únicos elementos en los que tiene lugar efecto Joule) y NO en las bobinas y condensadores. No obstante, esto no quiere decir que estos últimos elementos no influyan en el consumo de potencia, más bien habría que decir que la potencia se disipa en las resistencias pero que la presencia y disposición de bobinas y condensadores determina ciertamente cuánta potencia es disipada en estas resistencias.

En el caso de un circuito alimentado por una fuente de tensión (ver figura adjunta), un análisis similar al del Apartado 5.6.1 nos dice que la potencia instantánea suministrada por el *generador* de fuerza electromotriz $\xi(t)$, que proporciona una corriente $I(t)$, viene dada por

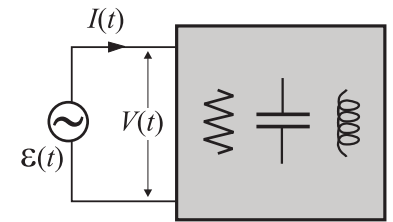
$$P(t) = \xi(t)I(t) \quad (5.84)$$

por lo que la potencia media suministrada por dicho generador será

$$P_{\text{med}}^{\text{gen}} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)I(t)dt = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\xi}\tilde{I}^*) . \quad (5.85)$$

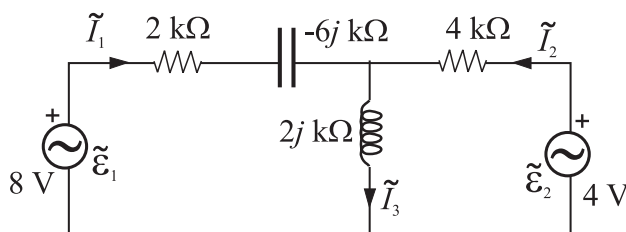
Dado que las potencias medias (5.85) y (5.76) representan físicamente la energía por periodo proporcionada por la fuente y la consumida en el circuito respectivamente, debe cumplirse que

la suma de las potencias medias suministrada por los generadores debe ser igual a la suma de las potencias medias disipadas en las resistencias.



Potencia media suministrada por un generador de fem

EJEMPLO 5.2 En el circuito de la figura, verifique que la potencia media suministrada por la fuente es igual a la suma de las potencias medias consumidas en las resistencias.



Teniendo en cuenta que $\tilde{\xi}_1 = 8$ y $\tilde{\xi}_2 = 4$, tras resolver el circuito para obtener las intensidades fasoriales de rama obtendríamos que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= 1 + j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_2 &= 1 - j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_3 &= 2 \text{ mA} . \end{aligned}$$

Los fasores tensión en las resistencias se obtienen simplemente multiplicando los correspondientes fasores intensidad por el valor de la resistencia, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{2k\Omega} &= 2\sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ V} \\ \tilde{V}_{4k\Omega} &= 4\sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ V} . \end{aligned}$$

La potencia media, P_{med} , consumida en cada una de las respectivas resistencias puede obtenerse según (5.77), resultando

$$P_{\text{med}}(R = 2\text{k}\Omega) = 2 \text{ mW}$$

$$P_{\text{med}}(R = 4\text{k}\Omega) = 4 \text{ mW} .$$

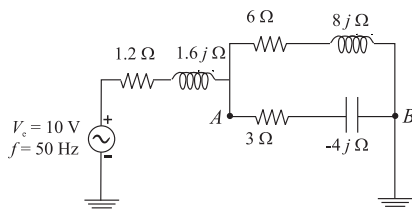
Análogamente la potencia media suministrada por cada una de las fuentes de fem será

$$P_{\text{med}}(\xi_1) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\tilde{I}_1 \tilde{\xi}_1^* \right) = 4 \text{ mW}$$

$$P_{\text{med}}(\xi_2) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\tilde{I}_2 \tilde{\xi}_2^* \right) = 2 \text{ mW} .$$

Obtenemos que la potencia media total suministrada por las fuentes (6 mW) coincide con la potencia media total consumida en las resistencias (6 mW).

EJEMPLO 5.3 En el circuito de la figura, calcule: (1) la intensidad (instantánea y eficaz) que circula por el generador; (2) la potencia media consumida por el circuito; (3) el equivalente Thevenin entre los puntos A y B; y (4) la energía almacenada por la bobina de reactancia inductiva $X_L = 1,6 \Omega$ en un instante t .



1. Para calcular el fasor intensidad, \tilde{I} , que circula por el generador podemos, en primer lugar, calcular la impedancia, Z , en serie con dicha fuente. Para ello notemos que

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{6 + j8} + \frac{1}{3 - j4} = 0,18 + j0,08 = 0,2 e^{j0,418}$$

por lo que

$$Z_{AB} = 4,6 - j2 = 5 e^{-j0,418}$$

y, por consiguiente, encontramos que

$$Z = (1,2 + j1,6) + (4,6 - j2) = 5,8 - j0,4 = 5,8 e^{-j0,069} .$$

Ahora podremos calcular el fasor intensidad a partir de

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\xi}}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{5,8 e^{-j0,069}} = 2,43 e^{j0,069}$$

de donde finalmente obtenemos que

$$i(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}) = \text{Re}(2,43 e^{j0,069} e^{j100\pi t}) = 2,43 \cos(100\pi t + 0,069) \text{ A} .$$

El valor eficaz de la corriente será, por tanto, $I_{\text{ef}} = I_0 / \sqrt{2} = 1,72 \text{ A}$.

2. Teniendo en cuenta que la potencia media consumida en el circuito será idéntica a la proporcionada por la fuente de fem, usando la expresión (5.85), tenemos que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\tilde{\xi} \tilde{I}^* \right) = 10 \times 1,72 \times \cos(0,069) = 17,16 \text{ W} .$$

3. Para calcular el equivalente es conveniente dibujar el circuito original en la forma mostrada en la figura adjunta. Así, para calcular la impedancia Thevenin, Z_{TH} ,

tendremos que calcular la impedancia equivalente de las tres ramas en paralelo resultantes tras cortocircuitar la fuente de fem; esto es,

$$\frac{1}{Z_{TH}} = \frac{1}{4,6 - j2} + \frac{1}{1,2 + j1,6}$$

que tras operar nos da

$$Z_{TH} = 1,43 + j0,95 = 1,72 e^{j0,588}.$$

Para obtener el fasor de tensión Thevenin, \tilde{V}_{TH} , notemos que debido a que las tres ramas están en paralelo

$$\tilde{V}_{TH} = \tilde{V}_{AB} = Z_{AB} \tilde{I} = 8,6 e^{-j0,349}$$

donde $Z_{AB} = 5,8 e^{-j0,069}$ ya fue obtenido en el primer apartado de este problema. \tilde{V}_{TH} también podría haberse obtenido si consideramos que

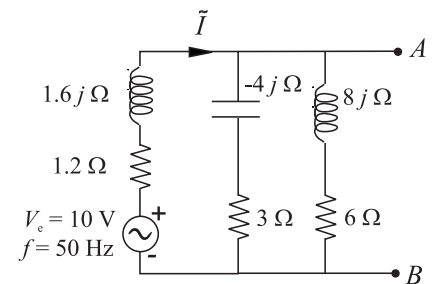
$$\tilde{V}_{TH} = \tilde{\xi} - (1,2 + j1,6) \tilde{I}.$$

4. Para calcular la energía instantánea almacenada en la bobina debemos usar la siguiente expresión:

$$U_m(t) = \frac{1}{2} L I^2(t),$$

que al operar nos da

$$\begin{aligned} U_m(t) &= \frac{1}{2} \frac{1,6}{100\pi} [2,43 \cos(100\pi t + 0,069)]^2 \\ &= 0,015 \cos^2(100\pi t + 0,069) \text{ J}. \end{aligned}$$



5.7. Problemas propuestos

5.1: Una bobina de 200 vueltas posee un área de 4 cm^2 y gira dentro de un campo magnético. ¿Cuál debe ser el valor del módulo de este campo magnético para que genera un fem máxima de 10 V a 60 Hz?

Sol. 0,332 T.

5.2: Calcular el valor eficaz y la amplitud de la corriente de un secador eléctrico de una lavandería que proporciona 5,0 kW eficaces cuando se conecta a una red de **a)** 240 V eficaces y **b)** 120 V eficaces.

Sol.: **a)** $I_{ef} = 20,8 \text{ A}$, $I_o = 29,5 \text{ A}$; **b)** $I_{ef} = 41,7 \text{ A}$, $I_o = 58,9 \text{ A}$.

5.3: Un determinado dispositivo eléctrico es recorrido por 10 A eficaces y consume una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. **a)** ¿Cuál es el módulo de la impedancia del aparato? **b)** ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato? **c)** Si la corriente se adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

[Recuerde que $f(x - a)$ con $a > 0$ es una función adelantada una cantidad a a $f(x)$.]

Sol.: **a)** $|Z| = 12 \Omega$; **b)** $R = 7,2 \Omega$, $X = 9,6 \Omega$; **c)** Capacitiva.

5.4: Para la función armónica $f(t) = 7,32 \cos(3,8\pi t + \pi/6)$, determine su amplitud, periodo y fase inicial. Representela gráficamente.

5.5: Obtenga la expresión dual de los siguientes números complejos: $z_1 = 3 + j4$, $z_2 = 4,6 e^{j\pi/3}$.

5.6: Para los números complejos del problema anterior, realice las siguientes operaciones: $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, z_1 / z_2 , z_2^3 , e^{z_1} , z_1^2 .

5.7: Usando fasores, calcule la función resultante $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ si $u_1(t) = 3 \text{ sen}(2\pi t)$ y $u_2(t) = -2 \text{ cos}(2\pi t)$.

5.8: Obtenga el fasor asociado a la derivada de la función armónica $f(t) = 3,2 \text{ cos}(2,5t + \pi/4)$.

5.9: En un nudo de una red concurren cuatro ramas. Las intensidades que recorren tres de ellas son: $i_1(t) = 3 \text{ cos}(\omega t)$ A, $i_2(t) = 4 \text{ cos}(\omega t + \pi/4)$ A e $i_3(t) = 2 \text{ cos}(\omega t + 5\pi/4)$ A. Utilizando la técnica de fasores, determinar la intensidad, $i_4(t)$, en la cuarta rama.

Sol: $i_4(t) = 4,414 \text{ cos}(\omega t + 0,31)$ A.

5.10: En el circuito de la figura, determinar la d.d.p. entre los extremos de R_2 cuando se conecta entre los terminales a y b: **a)** una fuente de continua de 100 V; **b)** una fuente de alterna de valor eficaz 100 V y frecuencia $f = 400/\pi$ Hz.

Sol: **a)** 50 V; **b)** $V(t) = 79,05\sqrt{2} \text{ cos}(800t - 0,3217)$ V.

5.11: En el circuito de la figura, se conecta entre los terminales A y B una fuente de alterna de valor eficaz 500 V y frecuencia 50 Hz. Determinar: **a)** la impedancia total entre A y B; **b)** la intensidad, $i(t)$, que circula por la fuente; **c)** la capacidad del condensador y la inductancia de la bobina; **d)** la potencia media consumida en el circuito.

Sol: **a)** $Z_{AB} = (100/41)(121 + 18j) \Omega$; **b)** $i(t) = 2,37 \text{ cos}(100\pi t - 0,1477)$ A;

c) $C = 12,73 \mu\text{F}$, $L = 1,273$ H; **d)** $P = 828,8$ W.

5.12: En el circuito de la figura determinar: **a)** la impedancia de cada elemento y la admitancia del conjunto; **b)** la intensidad $i(t)$ que circula por la fuente; **c)** las intensidades complejas por las ramas de la resistencia y de la bobina, dibujando, además, el diagrama fasorial de intensidades; **d)** el valor de la capacidad, C, que conectada en serie en el punto M hace que la intensidad que circula por la fuente esté en fase con la tensión de la misma.

Sol: **a)** $R = 20 \Omega$, $Z_L = 4j \Omega$; **b)** $i(t) = 56,09\sqrt{2} \text{ cos}(\omega t - 1,3734)$ A;

c) $\tilde{I}_R = 11\sqrt{2} \text{ A}$, $\tilde{I}_L = -55\sqrt{2}j \text{ A}$; **d)** $C = 650 \mu\text{F}$.

5.13: Una bobina de 0.1 H está conectada en serie con una resistencia de 10 Ω y con un condensador. El condensador se elige de forma que el circuito esté en resonancia al conectarlo a una fuente de alterna de 100 V (voltaje máximo) y 60 Hz. Calcular el valor del condensador utilizado así como la d.d.p. entre los extremos del condensador ($V_C(t)$) y de la bobina ($V_L(t)$).

Sol: $C = 70,4 \mu\text{F}$, $V_C(t) = 120\pi \text{ cos}(120\pi t + \pi/2)$ V, $V_L(t) = 120\pi \text{ cos}(120\pi t - \pi/2)$ V.

5.14: Un receptor de radio se sintoniza para detectar la señal emitida por una estación de radio. El circuito de sintonía –que puede esquematizarse como un circuito RLC serie– utiliza un condensador de 32.3 pF y una bobina de 0.25 mH. Calcular la frecuencia de emisión de la estación de radio.

Sol: 1.77 MHz.

5.15: Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad y una resistencia conocidas, un amperímetro de ca y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador se varía y se mantiene constante la fem hasta que la corriente es máxima. Si $C = 10 \mu\text{F}$, $\xi_{\text{max}} = 10$ V, $R = 100 \Omega$, siendo la intensidad máxima para $\omega = 5000$ rad/s, calcular cuánto vale L e I_{max} .

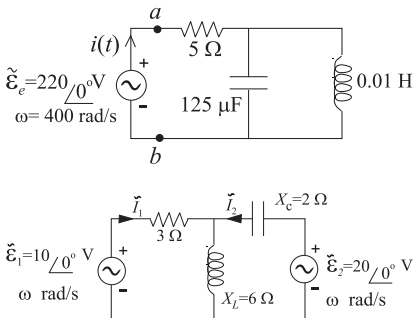
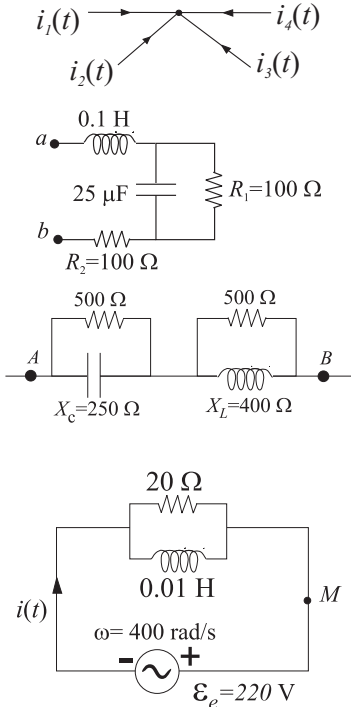
Sol: $L = 4$ mH, $I_{\text{max}} = 100$ mA.

5.16: En el circuito de la figura determinar: **a)** la impedancia Z_{ab} ; **b)** la intensidad, $i(t)$, que atraviesa la fuente; **c)** la potencia media suministrada y la potencia media consumida (verificar el balance de las mismas); **d)** el elemento que debe conectarse entre los puntos a y b para que la intensidad y tensión en la fuente estén en fase.

Sol: **a)** $Z_{ab} = 5 + 5j \Omega$; **b)** $i(t) = 44 \text{ cos}(400t - \pi/4)$ A; **c)** $P_{\text{act}} = P_R = 4840$ W; **d)** un condensador de 250 μF .

5.17: En el circuito que se muestra en la figura, calcular: **a)** las intensidades (expresiones temporales y fasoriales) y representar el diagrama fasorial de las mismas; **b)** la potencia media suministrada y consumida.

Sol: $\tilde{I}_1 = -10(1 + j)/3$ A, $\tilde{I}_2 = 5$ A, $i_1(t) = 10\sqrt{2}/3 \text{ cos}(\omega t - 3\pi/4)$ A, $i_2(t) = 5 \text{ cos}(\omega t)$ A; **b)** fuente(1) consume 50/3 W, fuente(2) suministra 50 W, resistencia consume 100/3 W.



5.18: Se desea diseñar un dispositivo RLC serie destinado a funcionar conectado a una fuente de frecuencia angular ω y resistencia de salida R_s . Determinar los valores de R , L y C (en función de ω y R_s) para que el dispositivo cumpla las tres especificaciones siguientes: 1) la tensión eficaz entre los bornes de R debe ser igual a la que exista entre los bornes de L ; 2) el dispositivo debe ser globalmente resistivo, esto es, debe equivaler a una resistencia; 3) la potencia consumida en la resistencia de salida de la fuente debe ser igual a la consumida en el dispositivo. Determinar también la intensidad que circularía en el circuito si la fuente utilizada tuviese amplitud máxima V_0 .

Sol.: $R = R_s$, $L = R_s/\omega$ y $C = 1/(\omega R_s)$; $i(t) = \frac{V_0}{2R_s} \cos(\omega t)$

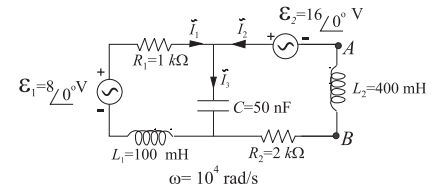
5.19: En el circuito de la figura: **a)** obtener las intensidades fasoriales y temporales en las ramas, representado el diagrama fasorial; **b)** calcular las potencias medias suministradas y consumidas; **c)** encontrar el equivalente Thévenin entre los terminales A y B , obteniendo, además, la intensidad que circularía entre dichos terminales al conectar entre ellos un condensador de 50 nF.

Sol.: **a)** $\tilde{I}_1 = 2 + 6j$ mA, $\tilde{I}_2 = 2$ mA, $\tilde{I}_3 = 4 + 6j$ mA,

$i_1(t) = \sqrt{40} \cos(10^4 t + \arctan(3))$ mA, $i_2(t) = 2 \cos(10^4 t)$ mA,

$i_3(t) = \sqrt{52} \cos(10^4 t + \arctan(3/2))$ mA;

b) Suministradas fuentes: $P_1 = 8$ mW, $P_2 = 16$ mW, consumida resistencias: $P_{R_1} = 20$ mW, $P_{R_2} = 4$ mW; **c)** $\tilde{V}_{Th} = 8j$, $Z_{Th} = (2 + 2j)$ k Ω , $i_c(t) = 4 \cos(10^4 t - \pi/2)$ mA.



TEMA 6

Ondas Electromagnéticas

6.1. Introducción

Una de las características fundamentales de una onda es que es capaz de transmitir energía sin que ello implique un transporte neto de materia. Usualmente, las ondas consisten en la propagación de alguna perturbación física a través de algún *medio material*, por ejemplo: olas en el agua, variaciones de presión en el aire (sonido), etc. No obstante, existe un tipo de fenómeno ondulatorio que no requiere la presencia de medios materiales para su propagación (esto es, la perturbación se puede propagar en el vacío o espacio libre) aunque ciertamente también puede propagarse en presencia de medios materiales. Estas ondas son las **ondas electromagnéticas (OEM)**, que consisten en la transmisión de campos eléctricos y magnéticos a una velocidad $v \leq c$; siendo c la velocidad de propagación en el vacío. El origen de estas ondas puede entenderse como una consecuencia de que un campo magnético variable en el tiempo, $\vec{B}_1(x, t)$, puede ser la fuente de un campo eléctrico variable en el tiempo, $\vec{E}_1(x, t)$, y éste a su vez puede ser la fuente de un campo magnético variable en el tiempo, $\vec{B}_2(x, t)$, y así sucesivamente:

$$\vec{B}_1(x, t) \Rightarrow \vec{E}_1(x, t) \Rightarrow \vec{B}_2(x, t) \Rightarrow \vec{E}_2(x, t) \Rightarrow \vec{B}_3(x, t) \Rightarrow \dots$$

De este modo, los campos eléctrico y magnético se generan mutuamente dando lugar a una onda electromagnética que se propaga en el espacio libre a una velocidad $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8$ m/s. (Evidentemente si el campo *primario* fuese uno eléctrico, en vez de uno magnético, también se produciría una onda electromagnética). Esta hipótesis teórica deducida por James C. Maxwell (~ 1860) fue confirmada experimentalmente por H. Hertz en 1888. Adicionalmente, el hecho de que la velocidad de propagación de las OEM fuese justamente la velocidad medida experimentalmente para la propagación de la luz fue el primer indicio claro de que la luz no era otra cosa que una onda electromagnética.

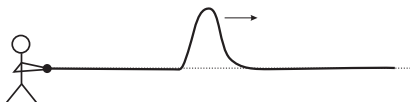
Las ondas electromagnéticas, además de constituir uno de los fenómenos físicos más predominantes en la naturaleza, tienen una importancia tecnológica fundamental en el campo de las comunicaciones. Podría decirse

que la mayoría de las comunicaciones actuales se sustentan en la transmisión de ondas electromagnéticas, ya sea a través del espacio libre: radio, televisión, teléfonos móviles, redes inalámbricas, satélites,... o bien a través de medios materiales: telefonía convencional, televisión por cable, transmisión por fibra óptica, redes locales de ordenadores, etc. Existen muchas razones para justificar este extendido uso pero, entre otras, cabe destacar:

- la posibilidad de que las ondas electromagnéticas se propaguen en el vacío;
- el desarrollo de antenas (emisoras y receptoras) que permiten la transmisión y recepción de estas ondas involucrando muy poca energía;
- la posibilidad de “guiar” estas ondas mediante diversos sistemas de transmisión: línea bifilar, cable coaxial, guías de ondas metálicas, fibras ópticas, etc;
- el hecho de poder usar señales portadoras de muy alta frecuencia que permiten grandes anchos de banda;
- la facilidad de tratamiento de las señales electromagnéticas, por ejemplo su modulación/demodulación en fase, amplitud o frecuencia, que permite usar estas señales como soporte de información tanto analógica como digital; y
- la fácil integración de los equipos de generación/recepción con la circuitería electrónica.

6.2. Nociones generales de ondas

En la naturaleza existen muchos fenómenos físicos en los que una perturbación física viaja sin que ello lleve aparejado un desplazamiento neto de materia. Un ejemplo de esto puede ser la *ola* que se produce en el agua tras arrojar una piedra. En este fenómeno se observa el desplazamiento de una “ondulación” en la superficie del agua con la particularidad de que las partículas individuales de agua *no se trasladan* sino que realizan un simple movimiento de vaivén vertical (movimiento oscilatorio). Otro ejemplo, es la propagación del sonido, que básicamente es un desplazamiento de un cambio de presión en el aire pero sin que ello implique que las partículas de aire viajen desde el lugar donde se originó el sonido hasta el receptor; más bien cada partícula transmite su movimiento oscilatorio a la siguiente antes de volver a su posición original. Otro ejemplo bastante visual de este tipo de fenómenos se produce al agitar una cuerda por uno de sus extremos. En este caso se observaría claramente el desplazamiento de un pulso en la cuerda, siendo también evidente que cada segmento de cuerda no viaja junto a este pulso.



En todos los ejemplos anteriores una perturbación física se desplaza a través de un medio (agua, aire y cuerda, respectivamente) sin que las partí-

culas de este medio hayan sufrido un desplazamiento neto.¹ Estos ejemplos son casos concretos de un tipo general de fenómenos físicos denominados **ondas**, las cuales pueden definirse como

Propagación de una perturbación física sin que exista un transporte neto de materia.

Debe notarse que la propagación de la perturbación en la onda implica el transporte de cierta energía y momento lineal (y/o angular). En este sentido, el comportamiento ondulatorio debe discernirse claramente del comportamiento de las *partículas*, puesto que estas últimas siempre transportan energía y momento asociado a un transporte neto de materia.

Entre las posibles formas de clasificar a las ondas, a continuación se presentan dos de ellas:

■ **Naturaleza física de la perturbación**

- **ONDAS MECÁNICAS:** cuando la perturbación física involucrada es de naturaleza mecánica, por ejemplo: desplazamiento, velocidad, presión, torsión, etc.
- **ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS:** cuando la perturbación es un campo electromagnético.

■ **Dirección relativa de la perturbación y el desplazamiento ondulatorio**

- **ONDAS LONGITUDINALES:** cuando la dirección de la perturbación física y de la propagación ondulatoria coinciden, por ejemplo: onda de sonido.
- **ONDAS TRANSVERSALES:** cuando la perturbación física se realiza en un plano transversal a la dirección de propagación de la onda; por ejemplo: el desplazamiento de un pulso en una cuerda, ondas electromagnéticas planas en el espacio libre, etc.

→ perturbación
 ~~~~~→ propagación

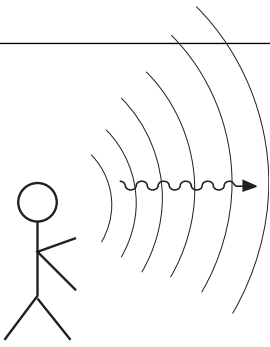
↑ perturbación  
 ~~~~~→ propagación

Cuando se trata de caracterizar una onda, algunos conceptos usuales son:

- **Foco:** es el recinto donde se produce la perturbación inicial.
- **Superficie/Frente de Onda:** es el lugar geométrico de los puntos en que han sido alcanzados simultáneamente por la perturbación.
- **Velocidad de Fase:** velocidad con la que se propagan las superficies de onda.

Los conceptos anteriores pueden clarificarse si los concretamos en el caso de la propagación del sonido. En este caso, el *foco* sería el lugar donde se

¹ Debe notarse que la ausencia de un desplazamiento *neto* no implica la existencia de movimiento nulo. El movimiento oscilatorio de una partícula en torno a un punto fijo es un claro ejemplo de movimiento en el cual no existe traslación neta.



emiten los sonidos (por ejemplo la boca de alguien), la *superficie de onda* serían superficies aproximadamente esféricas centradas en el foco, y la *velocidad de fase* sería la velocidad a la que se viaja el frente de ondas, esto es, la velocidad del sonido ~ 340 m/s.

6.2.1. (*) Ecuación de ondas

Del mismo modo que existe una ecuación diferencial general que determina el momento lineal, \vec{p} , de una partícula (o conjunto de ellas) en función de la fuerza externa, \vec{F} ,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.1)$$

(o bien $F = m d^2x/dt^2$ para el caso de movimiento monodimensional), existe también una ecuación diferencial, denominada *ecuación de ondas*, que se aplica a todos los fenómenos ondulatorios. La ecuación que describe el comportamiento ondulatorio de una perturbación física, descrita matemáticamente por la función $u(x, t)$, que se propaga con velocidad constante *sin distorsión (onda no-dispersiva)* a lo largo del eje x viene dada por

Ecuación de ondas no dispersiva
monodimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6.2)$$

Para mostrar que, desde un punto de vista matemático, la ecuación anterior describe apropiadamente el fenómeno ondulatorio analizaremos la propagación de un pulso en una cuerda (dado que este ejemplo ofrece una imagen visual muy clara). En este caso, la perturbación que se propaga, $u(x, t)$, es justamente el desplazamiento vertical de cada trocito de cuerda. La forma del pulso para un instante arbitrario, que podemos tomar como $t = 0$, se muestra en la Figura 6.1(a), esto es, la forma matemática de la onda en ese instante de tiempo viene completamente descrita por la función $f(x)$. Si tras un tiempo t , el pulso viaja sin distorsión hacia la derecha una distancia a , el perfil de la cuerda será como el mostrado en la Figura 6.1(b), pudiéndose describir matemáticamente por la función $f(x - a)$. Ahora bien, si el pulso está viajando a una velocidad v , entonces la distancia recorrida por el pulso puede escribirse como $a = vt$ y, consecuentemente, la expresión matemática de la onda en el instante t será

$$u(x, t) = f(x - vt) \quad (6.3)$$

Evidentemente, el pulso podría haber viajado igualmente hacia la izquierda, en cuyo caso, la expresión matemática de la onda viajera en la cuerda sería

$$u(x, t) = f(x + vt) \quad (6.4)$$

de modo que, en general, un movimiento ondulatorio sin distorsión en la cuerda podría ser descrito por la función

$$u(x, t) = f(\chi) \quad \text{siendo} \quad \chi = x \pm vt \quad (6.5)$$

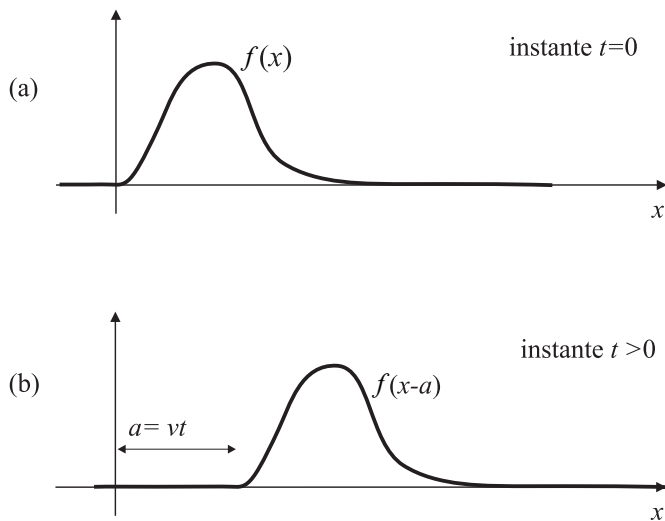


FIGURA 6.1: Evolución del pulso en una cuerda en dos instantes

que representaría una onda que puede viajar tanto hacia la izquierda como hacia la derecha.

Una propiedad muy importante de la ecuación general de ondas es que ésta es *lineal*, lo que implica que si $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son soluciones individuales de la ecuación de ondas, entonces la superposición lineal de ambas, $u(x, t) = \alpha u_1(x, t) + \beta u_2(x, t)$, también lo es. Esta propiedad de linealidad de la ecuación de ondas simplemente expresa en forma matemática el siguiente principio físico conocido como **principio de superposición de ondas**:

la perturbación ondulatoria resultante es igual a la suma de las perturbaciones coincidentes.

Principio de superposición de ondas

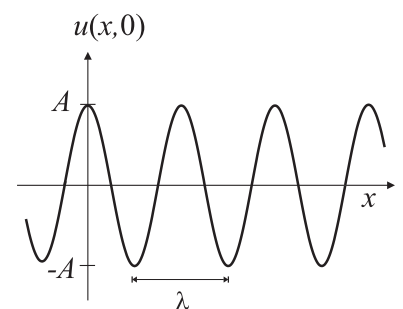
6.2.2. Ondas armónicas

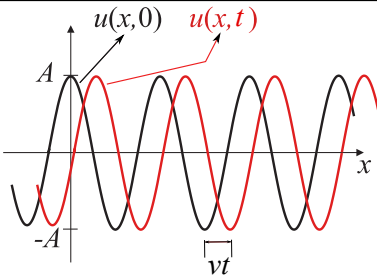
Según se ha explicado en el apartado anterior, la expresión matemática general de una onda monodimensional no-dispersiva venía dada por (6.5). De entre las posibles formas matemáticas que puede tener este tipo de ondas, hay una especialmente interesante conocida como **onda armónica**. La forma de una onda armónica es una curva tipo senoidal (seno/coseno), cuya instantánea en $t = 0$ puede venir dada por la siguiente expresión matemática:

$$u(x, 0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \quad (6.6)$$

La constante A es la **amplitud** de la onda y representa el valor máximo de la perturbación, λ es la **longitud de onda** o periodo espacial, esto es, la distancia en la que se repite la perturbación (por ejemplo, la distancia entre dos mínimos sucesivos). Si la onda se mueve hacia la derecha con cierta velocidad v , la función de onda en cualquier instante de tiempo t posterior vendrá dada por

$$u(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \quad (6.7)$$





El tiempo que tarda la onda en recorrer una longitud de onda se conoce como **periodo** T , por lo que

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{o}' \quad \lambda = vT. \quad (6.8)$$

El periodo T corresponde igualmente al tiempo empleado por la perturbación en realizar una oscilación completa en un punto fijo.

Teniendo en cuenta que $v/\lambda = 1/T$, $u(x, t)$ puede escribirse como

$$u(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (6.9)$$

La expresión anterior indica claramente que la onda armónica muestra una doble periodicidad, tanto en el espacio como en el tiempo:

$$u(x, t) = u(x + n\lambda, t + mT). \quad (6.10)$$

Esta doble periodicidad es una consecuencia de la periodicidad temporal de la perturbación en el foco ($x = 0$), que se refleja en una periodicidad espacial.²

La función de onda armónica puede expresarse en una forma más conveniente si se definen las dos siguientes cantidades:

$$k = 2\pi/\lambda \quad (6.11)$$

$$\omega = 2\pi/T, \quad (6.12)$$

donde k corresponde a la frecuencia espacial o **número de ondas** y ω a la **frecuencia angular**. Combinando las expresiones (6.11) y (6.12) junto con (6.8), obtenemos la siguiente relación para la frecuencia angular y el número de ondas de una onda armónica:

$$\omega = vk. \quad (6.13)$$

La frecuencia angular ω suele expresarse comúnmente en términos de la **frecuencia temporal**, f (siendo ésta la inversa del periodo: $f = 1/T$) mediante

$$\omega = 2\pi f. \quad (6.14)$$

Unidad de frecuencia:
1 hercio ($\text{Hz} \equiv \text{s}^{-1}$)

La frecuencia temporal representa por tanto el número de oscilaciones realizadas por unidad de tiempo, siendo su unidad el **hercio** (Hz).

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en (6.11) y (6.12), la función de onda armónica que viaja en el sentido positivo de las x puede reescribirse como

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (6.15)$$

La expresión anterior es un caso particular que impone que la perturbación en el origen e instante inicial sea justamente $u(x = 0, t = 0) = A$. En general, tendremos la siguiente expresión:

Expresión matemática de la onda armónica viajando en el sentido positivo de las x

² De manera análoga a como un pastelero soltando pasteles cada tiempo T en un extremo de una cinta transportadora (periodicidad temporal en el foco) que se mueve con velocidad v da lugar a una periodicidad espacial en dicha cinta; esto es, los pasteles aparecen distanciados una distancia que equivaldría a la "longitud de onda".

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \varphi) , \quad (6.16)$$

donde el argumento completo del coseno se conoce como **fase** de la onda y la constante φ como **fase inicial** (que se introduce para posibilitar que en $t = 0$ la perturbación en el foco, $x = 0$, pueda tomar un valor arbitrario: $u(0, 0) = A \cos \varphi$). Una onda armónica viajando en el sentido *negativo* de las x tendrá la siguiente forma general:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t + kx - \varphi) . \quad (6.17)$$

Es importante notar que el carácter viajero de la onda en sentido positivo/-negativo del eje x lo determina la desigualdad/igualdad entre los signos que acompañan a ωt y kx en la fase.

Para facilitar las operaciones con ondas armónicas, éstas suelen expresarse en forma de exponencial compleja, de manera que la onda armónica dada en (6.16) se escribirá usualmente como

$$u(x, t) = A e^{-j(kx+\varphi)} e^{j\omega t} \quad (6.18)$$

Expresión matemática compleja de la onda armónica

(ver Apartado 5.3.2 para un repaso de los fasores). Debemos considerar que $u(x, t)$, tal como se ha expresado en (6.16), es solamente la *parte real* de (6.18); esto es,

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \varphi) = \text{Re} \left(A e^{-j(kx+\varphi)} e^{j\omega t} \right) . \quad (6.19)$$

No obstante, en lo que sigue del tema, cuando tratemos con ondas armónicas usaremos por simplicidad la notación compleja dada en (6.18), debiéndose sobreentender que la expresión matemática correcta sería la parte real de la expresión compleja correspondiente.

6.3. (*) Ecuación de Ondas Electromagnéticas

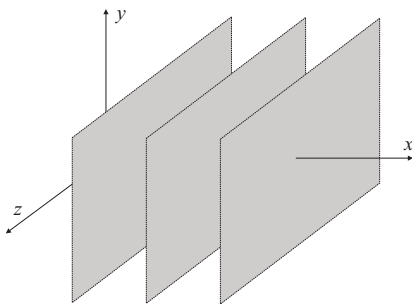
Según se discutió en el Apartado 6.2.1, la expresión matemática de cualquier magnitud física que represente a una onda debe satisfacer la ecuación de ondas (6.2). En este sentido, aparte de la idea cualitativa obtenida en el anterior apartado acerca de que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variaciones temporales} \\ \text{del campo eléctrico } \vec{E} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variaciones temporales} \\ \text{del campo magnético } \vec{B} \end{array} \right\} ,$$

es fundamental comprobar si los campos \vec{E} y \vec{B} en el vacío satisfacen la ecuación de ondas para verificar así que efectivamente estos campos son *ondas*. Por simplicidad en nuestro tratamiento, supondremos campos eléctricos/magnéticos del tipo

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t) ; \quad \vec{B} = \vec{B}(x, t) , \quad (6.20)$$

es decir, campos variables en el tiempo cuya dependencia espacial es únicamente a lo largo de la dirección x .



Ecuaciones de onda monodimensionales para los campos eléctrico y magnético

Si estos campos representaran a una onda electromagnética (OEM), ésta sería una **onda electromagnética plana**, dado que la perturbación física (campos \vec{E} y \vec{B}) tomaría los mismos valores en los *planos* definidos por $x = \text{Cte}$; es decir, su frente de ondas serían planos normales al eje x .

Si operásemos a partir de las ecuaciones de Maxwell (cuestión que queda fuera del alcance de este Manual) podríamos demostrar que, efectivamente, se satisfacen las siguientes ecuaciones de onda monodimensionales para campos eléctricos y magnéticos del tipo $\vec{E} = (0, E_y(x, t), E_z(x, t))$ y $\vec{B} = (0, B_y(x, t), B_z(x, t))$:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.21)$$

y

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.22)$$

La solución de estas ecuaciones de onda son precisamente OEM planas que se propagan en la dirección x a velocidad c y cuyos campos asociados tienen direcciones normales a la dirección de propagación. En consecuencia puede establecerse que

las ondas electromagnéticas planas en el vacío son ondas transversales.

También puede demostrarse que el campo eléctrico y el magnético se propagan en el vacío conjuntamente a una velocidad $c \equiv v$ cuyo valor viene dado por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (6.23)$$

Al sustituir los valores numéricos de μ_0 y de ϵ_0 en la expresión anterior se obtiene que

$$c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s} .$$

Dado que la velocidad a la que se propaga el campo electromagnético en el vacío (obtenida de forma teórica mediante manipulaciones en las ecuaciones de Maxwell) era muy próxima a la velocidad medida experimentalmente para la luz, esta sorprendente coincidencia sugería que la luz era simplemente una onda electromagnética. Debe notarse que en el momento en que se dedujo teóricamente la velocidad de propagación del campo electromagnético se admitía que la luz era una onda pero se discutía sobre la *naturaleza* de esta onda. Así, por ejemplo, se postulaba que la luz, en analogía con las ondas mecánicas, podía ser una vibración de las partículas de un medio que "impregnaba" todo el universo denominado *éter*. Esta y otras teorías fueron desechadas a la vista de los trabajos teóricos de Maxwell y a la verificación experimental de las ondas electromagnéticas realizada por Hertz. Por último cabe señalar que si la onda electromagnética se propaga en un *medio homogéneo material* de constante dieléctrica relativa, ϵ_r , entonces la velocidad de propagación de la onda electromagnética (es decir, de la luz) en ese medio será

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (6.24)$$

donde $n = \sqrt{\epsilon_r}$ es un parámetro del medio material que se denomina **índice de refracción**.

6.4. Ondas electromagnéticas planas armónicas

Ya se indicó en el Apartado 6.2.2 que una solución particularmente importante de la ecuación de ondas era la solución armónica. Para el caso de ondas electromagnéticas planas, un campo eléctrico $\vec{E}(x, t)$ de tipo *armónico* que satisfaga la ecuación de ondas (6.21) puede ser descrito por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \hat{y} . \quad (6.25)$$

El campo magnético asociado a este campo eléctrico armónico en la onda electromagnética puede calcularse a partir de las ecuaciones de Maxwell, lo que nos diría que dicho campo viene dado por

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \hat{z} , \quad (6.26)$$

donde

$$B_0 = \frac{E_0}{c} . \quad (6.27)$$

A la vista de la forma de los campos \vec{E} y \vec{B} dados en (6.25) y (6.26) podemos establecer para la *onda electromagnética plana armónica* mostrada en la Fig.6.2 que

- los campos eléctrico y magnético están en fase (es decir, su fase es la misma); y
- \vec{E} , \vec{B} y \vec{c} (siendo \vec{c} el vector velocidad de la onda; en el presente caso $\vec{c} = c\hat{x}$) forman un triángulo rectángulo, es decir, cada uno de estos vectores es perpendicular a los otros dos.

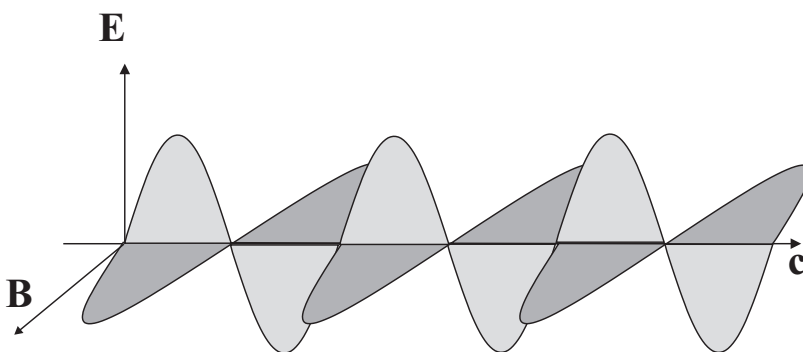


FIGURA 6.2

Las dos anteriores conclusiones junto con la relación (6.27) pueden ser expresadas matemáticamente mediante la siguiente relación vectorial que cumplen los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana armónica:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c} . \quad (6.28)$$

EJEMPLO 6.1 Una onda electromagnética plana armónica de frecuencia $f = 3 \text{ GHz}$ viaja en el espacio libre en la dirección x . El valor máximo del campo eléctrico es de 300 mV/m y está dirigido según el eje y . Calcular la longitud de onda de esta onda así como las expresiones temporales de sus campos eléctrico y magnético.

Dado que $f = 3 \text{ GHz}$, la longitud de onda asociada a esta frecuencia será

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 10 \text{ cm} .$$

Asimismo, el número de ondas, k , y la frecuencia angular, ω , de esta onda serán

$$\omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^9 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{6\pi \times 10^9}{3 \times 10^8} = 20\pi \text{ m}^{-1} .$$

Si el campo eléctrico, \vec{E} , de la onda plana armónica que viaja según x está dirigido según y , este campo vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y} ,$$

donde E_0 representa la amplitud del campo que coincide con el valor máximo de éste, luego $E_0 = 0,3 \text{ V/m}$. Dado que no nos han especificado nada acerca de la fase inicial, por simplicidad tomamos ésta de valor nulo ($\varphi = 0$). Según se ha visto en el presente apartado, la expresión correspondiente para el campo magnético de esta onda será entonces

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z} ,$$

siendo, según la expresión (6.27):

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3 \times 10^{-1}}{3 \times 10^8} = 10^{-9} \text{ T} .$$

Finalmente, las expresiones temporales de los campos \vec{E} y \vec{B} de esta onda electromagnética serán

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= 0,3 \cos(20\pi x - 6\pi \times 10^9 t) \hat{y} \text{ V/m} \\ \vec{B}(x, t) &= 10^{-9} \cos(20\pi x - 6\pi \times 10^9 t) \hat{z} \text{ T} . \end{aligned}$$

6.5. Intensidad de la onda electromagnética

Una de las propiedades más significativas de la OEM es que transporta energía a través del espacio libre. Así, la onda electromagnética que transmite la luz de una estrella (que ha viajado durante muchos millones de kilómetros antes de llegar a la Tierra) tiene todavía suficiente energía como para hacer reaccionar a los receptores de nuestros ojos. Cuando estamos tratando con ondas, la magnitud relevante para caracterizar el contenido energético de las mismas es su **intensidad**, \mathcal{I} (no confundir con la intensidad, I , de una corriente eléctrica, que aunque tiene el mismo nombre es una magnitud completamente diferente).

La **intensidad** de una onda se define como la energía que fluye por unidad de tiempo a través de una superficie de área unidad situada perpendicularmente a la dirección de propagación. Si u es la densidad volumétrica de energía de la onda (esto es, la energía por unidad de volumen contenida en la región donde se propaga la onda) y c la velocidad de propagación de la onda, la intensidad \mathcal{I} de la onda puede escribirse como

$$\mathcal{I} = uc, \quad (6.29)$$

cuyas unidades son $(\text{ms}^{-1})(\text{Jm}^{-3}) = \text{Js}^{-1}\text{m}^{-2} = \text{Wm}^{-2}$; es decir, potencia por unidad de área.

A la vista de la anterior expresión, para calcular la intensidad de la onda electromagnética debemos obtener en primer lugar la densidad volumétrica de energía asociada con esta onda. La energía del campo eléctrico y del magnético ya se discutió en el Tema 1, donde se obtuvieron las expresiones (1.68) y (4.56) respectivamente. Concretamente se obtuvo que

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 \quad \text{densidad de energía eléctrica} \quad (6.30)$$

$$u_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \quad \text{densidad de energía magnética}, \quad (6.31)$$

por lo que la intensidad (también denominada intensidad *instantánea*: $\mathcal{I}_{\text{inst}}$) de la onda electromagnética vendrá dada por

$$\mathcal{I}_{\text{inst}} = (u_E + u_B)c. \quad (6.32)$$

Intensidad de la onda

Intensidad instantánea de una onda electromagnética

Para OEM *planas armónicas*, encontramos que la relación entre los módulos de los campos eléctrico y magnético de la onda verificaban que $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. Esto nos permite escribir la densidad volumétrica de energía almacenada en el campo magnético como

$$u_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2, \quad (6.33)$$

donde se ha tenido en cuenta que $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$.

Igualdad de las densidades de energía eléctrica y magnética en una OEM plana armónica

Hemos obtenido, por tanto, que para una onda plana electromagnética armónica, la densidad de energía almacenada en el campo magnético es idéntica a la almacenada en el campo eléctrico, esto es,

$$u_E = u_B . \quad (6.34)$$

La anterior igualdad nos permite escribir las siguientes expresiones para la densidad de energía de dicha onda electromagnética, u_{EB} :

$$u_{EB} = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 = \epsilon_0|\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0} = \frac{|\vec{E}||\vec{B}|}{\mu_0 c} , \quad (6.35)$$

y, consecuentemente, podemos expresar la intensidad instantánea de dicha onda como

$$\mathcal{I}_{inst} = u_{EB}c = c\epsilon_0|\vec{E}|^2 = c\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0} = \frac{|\vec{E}||\vec{B}|}{\mu_0} . \quad (6.36)$$

En el espacio libre, la energía de la OEM plana armónica viaja en la dirección de propagación de la onda, esto es, en una dirección perpendicular tanto a \vec{E} como \vec{B} . Por otra parte, para este tipo de ondas, la intensidad de la onda se puede expresar, según (6.36), en función de los módulos de los campos eléctrico y magnético de la onda. Todo ello nos sugiere la introducción de un vector \vec{S} , denominado **vector de Poynting**, que caracterice energéticamente a la onda electromagnética y que tendrá por dirección la dirección de propagación de la energía y por módulo la intensidad instantánea de la OEM. A la vista de las expresiones anteriores, para una onda electromagnética plana armónica, este vector vendrá dado por el siguiente producto vectorial:

Vector de Poynting

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} . \quad (6.37)$$

Aunque la expresión anterior del vector de Poynting se ha obtenido para el caso concreto de una onda plana armónica, cálculos más elaborados muestran que la expresión (6.37) tiene validez general para cualquier tipo de onda electromagnética.

Para la onda plana armónica discutida en el apartado anterior, el vector de Poynting puede escribirse como

$$\vec{S}(x, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi) \hat{x} = c u_{EB} \hat{x} , \quad (6.38)$$

por lo que la intensidad instantánea de esta onda será

$$\mathcal{I}_{inst}(x, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi) . \quad (6.39)$$

Tal y como se comentó en el Apartado 5.6, los valores instantáneos de magnitudes energéticas *armónicas* no tienen mucho interés práctico dado que estas magnitudes suelen variar muy rápidamente (por ejemplo, del orden de 10^{15} veces en un segundo para la luz). Es, por tanto, más significativo obtener el promedio de la intensidad, \mathcal{I}_{med} , en un periodo de tiempo, para lo

cual debemos promediar temporalmente (6.39):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{med}} &= \langle \mathcal{I}_{\text{inst}}(x, t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx - \varphi) dt \\ &= \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Intensidad promedio de una onda electromagnética armónica

EJEMPLO 6.2 Sabiendo que la amplitud del campo eléctrico de la radiación solar que llega a la superficie terrestre es de aproximadamente $E_0 = 850 \text{ V/m}$, calcule la potencia total que incidiría sobre una azotea de 100 m^2 .

Para calcular la potencia promedio que incide en una superficie S debemos primero obtener el valor de la intensidad promedio, \mathcal{I}_{med} , de la OEM. En este caso dado que conocemos el valor de la amplitud del campo eléctrico, esta intensidad vendrá dada por

$$\mathcal{I}_{\text{med}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 = \frac{3 \times 10^8 \times 8,85 \times 10^{-12}}{2} \times (850)^2 \approx 959 \text{ W/m}^2.$$

Una vez calculada la intensidad promedio, la potencia promedio, P_{med} , que incide sobre la superficie será simplemente

$$P_{\text{med}} = \mathcal{I}_{\text{med}} S = 959 \cdot 100 \approx 9,6 \times 10^4 \text{ W}.$$

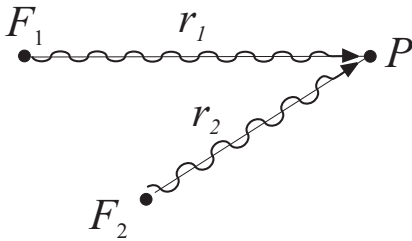
Aunque esta potencia es realmente alta, debe tenerse en cuenta que está distribuida en una área grande y que su aprovechamiento total es imposible. De hecho con placas solares típicas se podría transformar en potencia eléctrica aproximadamente el 10 % de la radiación solar, debiéndose tener en cuenta además que los datos dados en el problema se refieren a las horas de iluminación de días soleados.

6.6. Interferencia de Ondas

Cuando dos o más ondas coinciden en el espacio en el mismo instante de tiempo se produce un fenómeno que se conoce como **interferencia**. El principio de superposición de ondas establece que cuando dos o más ondas coinciden en un punto y en un instante de tiempo, la perturbación resultante es simplemente la *suma* de las perturbaciones individuales (este principio ya fue relacionado en el Apartado 6.2.1 con la linealidad de la ecuación de ondas). En consecuencia, la perturbación resultante en un punto P y en un instante de tiempo t , $u(P, t)$, debido a la coincidencia de N ondas $u_i(x, t)$ se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$u(P, t) = \sum_{i=1}^N u_i(P, t). \quad (6.41)$$

6.6.1. Superposición de dos ondas electromagnéticas planas armónicas



Para estudiar los aspectos cuantitativos de la interferencia consideraremos la *superposición de dos ondas electromagnéticas planas armónicas de la misma frecuencia* pero distinta amplitud y fase inicial en cierto punto P , cuyos campos eléctricos vienen dados por

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = E_{0,1} \cos(\omega t - kr - \varphi_1) \hat{y}$$

y

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_{0,2} \cos(\omega t - kr - \varphi_2) \hat{y} .$$

Si r_1 y r_2 son las distancias desde los focos respectivos (F_1 y F_2) al punto P , usando el principio de superposición, la componente y del campo eléctrico resultante vendrá dada por

$$E_y(P, t) = E_{y1}(r_1, t) + E_{y2}(r_2, t) . \quad (6.42)$$

Si hacemos uso de la notación compleja introducida en (6.18), la perturbación total en el punto P puede obtenerse como la siguiente suma:

$$E_y(P, t) = E_{0,1} e^{-j(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + E_{0,2} e^{-j(kr_2 - \omega t + \varphi_2)} ,$$

que puede reescribirse tras definir

$$\varepsilon_j = kr_j + \varphi_j \quad (6.43)$$

como

$$\begin{aligned} E_y(P, t) &= \left[E_{0,1} e^{-j\varepsilon_1} + E_{0,2} e^{-j\varepsilon_2} \right] e^{j\omega t} \\ &= E_0(P) e^{-j\varepsilon(P)} e^{j\omega t} , \end{aligned} \quad (6.44)$$

donde $E_0(P)$ y $\varepsilon(P)$ representan respectivamente la amplitud y la fase de la componente y del campo eléctrico resultante en el punto P . Operando en (6.44) encontramos que

$$\begin{aligned} E_0(P) e^{-j\varepsilon(P)} &= E_{0,1} e^{-j\varepsilon_1} + E_{0,2} e^{-j\varepsilon_2} \\ &= (E_{0,1} \cos \varepsilon_1 - j E_{0,1} \sen \varepsilon_1) + (E_{0,2} \cos \varepsilon_2 - j E_{0,2} \sen \varepsilon_2) \\ &= (E_{0,1} \cos \varepsilon_1 + E_{0,2} \cos \varepsilon_2) - j (E_{0,1} \sen \varepsilon_1 + E_{0,2} \sen \varepsilon_2) , \end{aligned} \quad (6.45)$$

de donde obtenemos que la amplitud puede ser calculada como sigue:

$$\begin{aligned} E_0^2(P) &= E_{0,1}^2 \cos^2 \varepsilon_1 + E_{0,2}^2 \cos^2 \varepsilon_2 + 2E_{0,1}E_{0,2} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + \\ &\quad E_{0,1}^2 \sen^2 \varepsilon_1 + E_{0,2}^2 \sen^2 \varepsilon_2 + 2E_{0,1}E_{0,2} \sen \varepsilon_1 \sen \varepsilon_2 \\ &= E_{0,1}^2 + E_{0,2}^2 + 2E_{0,1}E_{0,2} \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) , \end{aligned}$$

esto es,

$$E_0(P) = \sqrt{E_{0,1}^2 + E_{0,2}^2 + 2E_{0,1}E_{0,2} \cos \delta(P)} , \quad (6.46)$$

Amplitud interferencia de 2 ondas armónicas de igual frecuencia

siendo

$$\begin{aligned}\delta(P) &= kr_1 - kr_2 + \varphi_1 - \varphi_2 \\ &= k\Delta r + \Delta\varphi.\end{aligned}\quad (6.47)$$

En la expresión anterior, $\delta(P)$ se denomina **diferencia de fase**, $\Delta r = r_1 - r_2$ se conoce como **diferencia de camino** entre el recorrido de las dos ondas al propagarse desde los focos respectivos hasta el punto P y $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ es la **diferencia de fase inicial** entre las dos ondas. El último término de la expresión anterior,

$$2E_{0,1}E_{0,2} \cos \delta(P),$$

se denomina usualmente **término de interferencia** puesto que es el responsable de que la amplitud de la interferencia dependa de la diferencia de camino hasta el punto P . En concreto, si notamos que

$$-1 \leq \cos \delta(P) \leq 1$$

encontraremos que la amplitud en un punto podrá tomar en general valores comprendidos entre

$$(E_{0,1} - E_{0,2}) \leq E_0(P) \leq (E_{0,1} + E_{0,2}). \quad (6.48)$$

Para obtener la intensidad resultante de la superposición de las dos ondas electromagnéticas planas armónicas de igual frecuencia en el punto P , debemos tener en cuenta que, según (6.39), la intensidad de dichas ondas depende del cuadrado de la amplitud ($\mathcal{I} \propto E_0^2$). En consecuencia, a partir de (6.46), podemos deducir que la intensidad resultante será

$$\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} \cos \delta(P). \quad (6.49)$$

6.6.2. Focos incoherentes

En el apartado anterior observamos que la amplitud resultante en el punto P oscilaba entre dos valores dependiendo del valor concreto de δ en dicho punto. No obstante, en la práctica ocurre frecuentemente que la diferencia de fase no es constante en el tiempo sino que $\delta = \delta(t)$. Esto puede ser causado por una posible variación temporal de las condiciones de emisión de los focos (usualmente en tiempos característicos menores que 10^{-10} s) debida, por ejemplo, a que

1. La frecuencia de los focos no es estrictamente constante sino que presenta pequeñas fluctuaciones arbitrarias que provocan que el número de ondas (y equivalentemente la longitud de onda) oscile ligeramente en torno a cierto valor promedio, $\langle k \rangle$

$$k(t) = \langle k \rangle + \Delta k(t).$$

2. Las fases iniciales de los dos focos presentan fluctuaciones al azar de modo que las funciones $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ no están correlacionadas de ninguna manera, dando lugar a que la diferencia de fase inicial sea una función del tiempo,

$$\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = f(t),$$

que varía igualmente al azar.

Cuando nos encontramos con alguna de las condiciones anteriores decimos que los focos son **incoherentes**. Debido a esta rápida variación arbitraria en el tiempo de la diferencia de fase, el término de interferencia se *anula en promedio* durante el intervalo de observación debido a que el valor medio del coseno de un argumento que varía al azar es cero:

$$\langle \cos \delta(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \delta(t) dt = 0.$$

Esto hecho implica que la intensidad promedio en el punto P , $\langle \mathcal{I}(P) \rangle = \mathcal{I}_{\text{med}}$, venga dada por

$$\mathcal{I}_{\text{med}} = \mathcal{I}_{\text{med},1} + \mathcal{I}_{\text{med},2} \quad \text{focos incoherentes.} \quad (6.50)$$

Notemos que en el presente caso de focos incoherentes, la anulación en promedio del término de interferencia hace que la intensidad de la perturbación no dependa de la posición del punto de observación. Este hecho provoca que aunque podamos, en un sentido estricto, hablar de interferencia, ésta *no será observable* y usualmente diremos que “no existe interferencia”.

A menudo cuando se habla de un *único* foco también podemos decir que este foco es “incoherente”. En este caso, en realidad estamos queriendo decir que este único foco tiene cierta extensión espacial, y que las distintas partes del foco (asimilables a diversos focos puntuales) no son coherentes entre sí.

6.6.3. Focos coherentes

Cuando la frecuencia de los focos es constante y sus fases iniciales están completamente correlacionadas, de modo que

$$\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \neq f(t),$$

manteniendo una diferencia de fase inicial constante, se dice que los dos focos son **coherentes**. En el caso de que $\Delta\varphi = 0$, δ sólo dependerá de la diferencia de camino (en general Δr),

$$\delta = k\Delta r = 2\pi\Delta r/\lambda, \quad (6.51)$$

dando lugar así a una interferencia que sí podría ser observable debido a que el término de interferencia no se anula ahora en promedio.

En las circunstancias anteriores, podemos distinguir dos casos de interés, dependiendo de si $\cos \delta$ es 1 o -1, esto es, si $E_o(P)$ adquiere su valor

máximo (**interferencia constructiva**) o bien su valor mínimo (**interferencia destructiva**). Por tanto, si

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \Rightarrow E_0(P) = E_{0,1} + E_{0,2} & \text{Interferencia Constructiva} \\ (2n + 1)\pi & \Rightarrow E_0(P) = E_{0,1} - E_{0,2} & \text{Interferencia Destructiva.} \end{cases} \quad (6.52)$$

Teniendo en cuenta (6.51), la condición de interferencia constructiva o destructiva para Δr en P vendrá dada por

$$\Delta r = \begin{cases} n\lambda & \text{Interferencia Constructiva} \\ (2n + 1)\frac{\lambda}{2} & \text{Interferencia Destructiva ;} \end{cases} \quad (6.53)$$

es decir, si la diferencia de camino es un múltiplo *entero/semientero* de la longitud de onda, entonces tendremos interferencia constructiva/destructiva.

Desde un punto de vista práctico, una forma usual de producir focos coherentes es generar dos focos secundarios a partir de la misma fuente primaria, asegurando así que la diferencia de fase inicial en los dos focos secundarios es una constante. Uno de los primeros experimentos que mostró el fenómeno de interferencia con luz es el **experimento de la doble rendija de Young** mostrado en la Figura 6.3(a), constatando así de forma convincente que la luz tenía naturaleza ondulatoria. En este experimento la luz (u otra

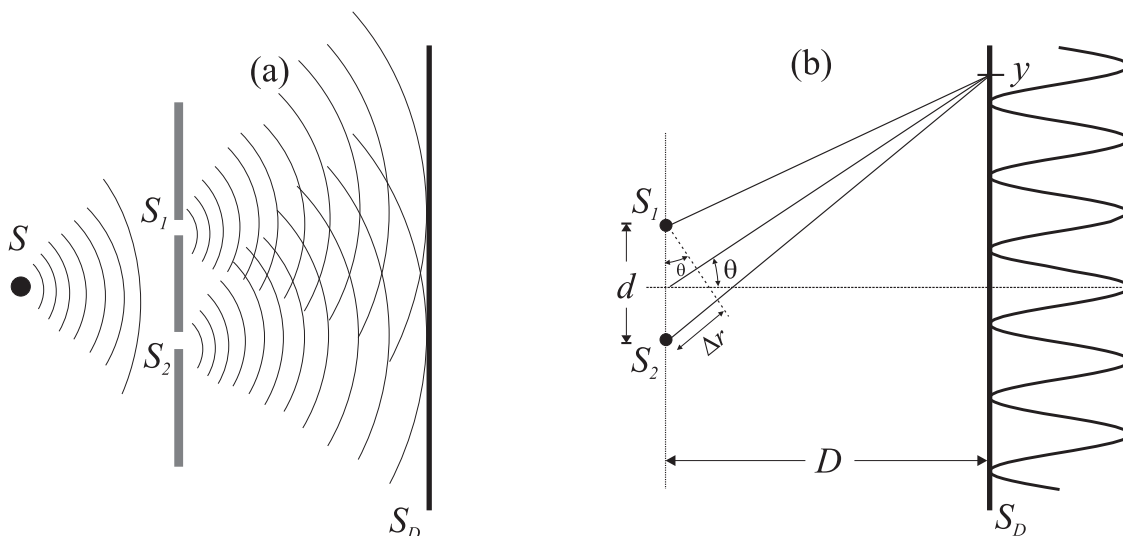


FIGURA 6.3: Experimento de la doble rendija de Young

perturbación ondulatoria) proveniente de un foco primario S se hace pasar por una pantalla en la que se han realizado dos ranuras S_1 y S_2 separadas una distancia d . Las rendijas se comportan como dos focos *coherentes* de luz cuyas ondas interfieren en el semiespacio derecho. Este fenómeno provoca un patrón de interferencias en la pantalla S_D donde aparecen regiones sombreadas (dibujadas en negro) junto a regiones más iluminadas tal y como se muestra en la Figura 6.4. En este experimento tenemos que la amplitud de

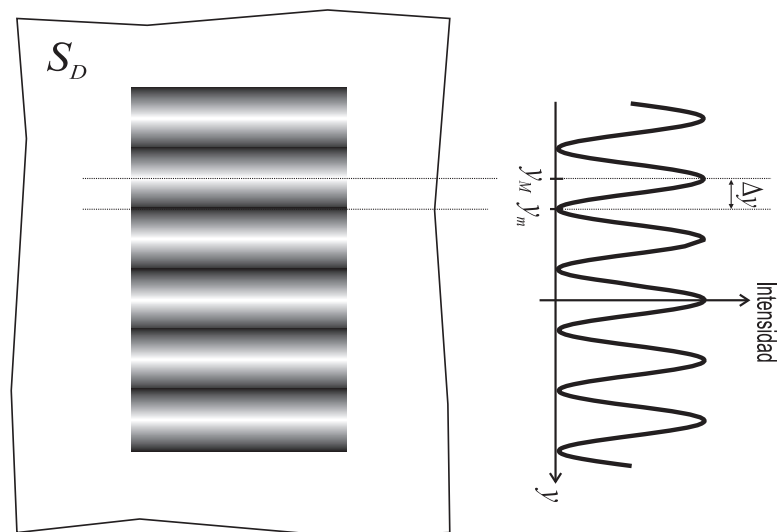


FIGURA 6.4: Patrón de interferencia resultante en el experimento de la doble rendija de Young

las ondas que interfieren es idéntica, esto es,

$$E_{o,1} = E_{o,2} .$$

Si además consideramos que la pantalla S_D se coloca a una distancia de las rendijas tal que $D \gg d$ y admitimos que θ es muy pequeño, entonces, según muestra la Fig. 6.3(b), encontramos que la diferencia de camino en un punto de la pantalla de coordenada y viene dada por

$$\Delta r = d \sin \theta \approx d \tan \theta \approx d \frac{y}{D} . \quad (6.54)$$

En consecuencia, el patrón de interferencia obtenido en la pantalla S_D mostrará franjas de interferencia constructiva o bien destructiva según se cumplan las siguientes condiciones:

- **Interferencia constructiva, $y = y_M$:**

$$k\Delta r = 2n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y_M}{D} = 2n\pi , \quad (6.55)$$

de donde se deduce que las franjas $y = y_M$ de interferencia constructiva verifican

$$y_M = n \frac{D}{d} \lambda , \quad (6.56)$$

siendo la intensidad media de la onda en estas franjas: $\mathcal{I}_{med} = 4\mathcal{I}_{med,1}$.

- **Interferencia destructiva, $y = y_m$:**

$$k\Delta r = (2n + 1)\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y_m}{D} = (2n + 1)\pi , \quad (6.57)$$

de donde se deduce que las franjas $y = y_m$ de interferencia destructiva verifican

$$y_m = \frac{2n + 1}{2} \frac{D}{d} \lambda , \quad (6.58)$$

siendo la intensidad de la onda en estas franjas $\mathcal{I}_{med} = 0$.

Nótese que la diferencia Δy entre un máximo y un mínimo consecutivo es

$$\Delta y = \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}. \quad (6.59)$$

Esta expresión nos proporciona adicionalmente un procedimiento muy sencillo para determinar el valor de la longitud de onda a partir de la medida de la distancia entre franjas de interferencia constructiva y destructiva.

Es interesante notar que en las franjas de interferencia constructiva se ha obtenido que la intensidad media es *cuatro* veces (y no dos) el valor de la intensidad media proporcionada por cada uno de los focos. Esto parece violar el principio de conservación de la energía, aunque tal hecho no se produce puesto que la energía de la onda no se distribuye homogéneamente en la pantalla S_D sino que, debido a la interferencia, existen puntos donde la energía es mayor que la suma de las energías provenientes de los focos pero también existen otros puntos donde la energía es menor (incluso cero) que la proveniente de los focos.

EJEMPLO 6.3 Un foco de luz amarilla ($\lambda = 600 \text{ nm}$) incide sobre dos rendijas separadas una distancia d , observándose la interferencia de la luz proveniente de estas rendijas en una pantalla situada a una distancia de 3 m. Obtener la separación d entre las rendijas para que la distancia entre máximos y mínimos consecutivos del patrón de interferencia luminoso sea mayor que 5 mm.

Según la teoría expuesta anteriormente, la distancia entre máximos y mínimos consecutivos en el experimento de la doble rendija de Young viene dado por

$$\Delta y > \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}.$$

Al despejar en la expresión anterior d encontramos que

$$d < \frac{D\lambda}{2\Delta y} = \frac{3 \cdot 6 \times 10^{-7}}{2 \cdot 5 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m} = 180 \mu\text{m}.$$

El resultado anterior nos muestra que la separación entre rendijas debe ser muy pequeña (y aún menor si Δy se quiere mayor) por lo que en la práctica no es fácil llevar a cabo este experimento.

6.7. (*) Difracción

Uno de los fenómenos ondulatorios más característicos es el conocido como difracción. Este fenómeno se produce cuando una onda es distorsionada en su propagación por un obstáculo, aunque también se llama difracción a la interferencia producida por *muchos* focos coherentes elementales. Desde el punto de vista físico, la difracción no se diferencia básicamente de la interferencia puesto que ambos fenómenos son fruto de la superposición de ondas. La difracción es, por ejemplo, la causa de la desviación de la luz de una trayectoria recta, explicando así por qué la luz llega a puntos que, en

principio, no debería alcanzar si su propagación fuese estrictamente rectilínea. Un ejemplo de difracción puede verse en la Fig. 6.5(b), que muestra el patrón de sombras cuando una fuente de luz *coherente* ilumina una esquina recta. En la Fig. 6.5(a) se muestra esta misma sombra cuando no se produce difracción (por ejemplo, cuando la fuente de luz es incoherente).

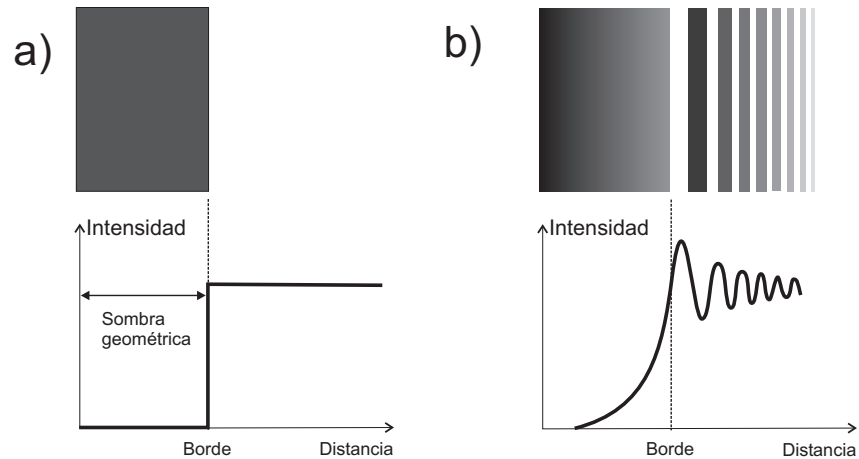
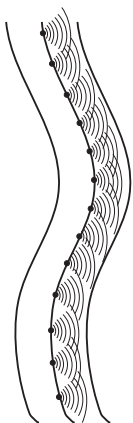


FIGURA 6.5: Sombra producida por una esquina recta iluminada por una fuente de luz cuando: (a) no se produce difracción, (b) sí se produce difracción

En el presente estudio de la difracción, consideraremos únicamente la denominada **difracción de Fraunhofer**, que se presenta cuando las ondas incidentes pueden considerarse planas y el patrón de difracción es observado a una distancia lo suficientemente lejana como para que solo se reciban los rayos difractados *paralelamente*. Por ello consideraremos que la onda incidente es una onda electromagnética plana armónica cuyo campo eléctrico está dirigido en la dirección y (de forma similar a como hemos hecho en apartados anteriores). Para obtener la perturbación resultante haremos uso del **principio de Huygens**, que explica la propagación ondulatoria suponiendo que



cada punto de un frente de ondas primario se comporta como un foco de ondas esféricas elementales secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la onda primaria. La posición del frente de ondas primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de dichas ondas elementales.

Siguiendo este principio, cuando un frente de onda alcanza una pantalla en la que existe una rendija de anchura b , tal y como se muestra en la Figura 6.6, sólo aquellos puntos del frente de ondas coincidentes con la rendija se convierten en focos emisores secundarios, de modo que la perturbación ondulatoria en cualquier punto a la derecha de la rendija puede calcularse como la superposición de las ondas originadas en cada uno de estos focos secundarios (ver Figura 6.6b).

En este sentido, y a efectos de cálculo, supondremos que existen N focos

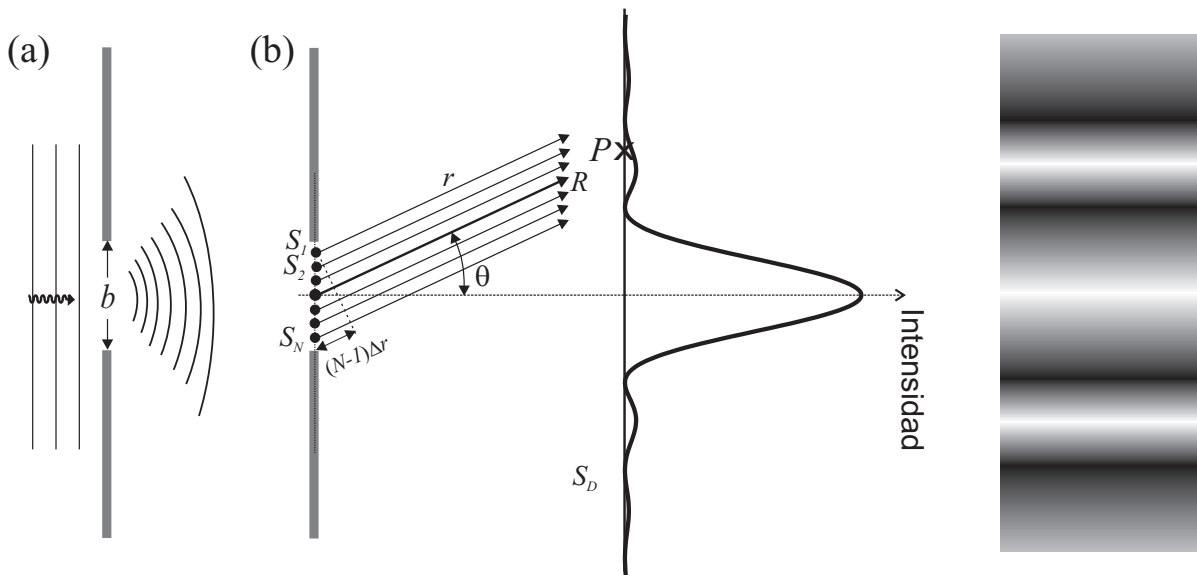


FIGURA 6.6: (a) Difracción de Fraunhofer de una rendija rectangular; (b) Cada punto de la rendija se comporta como un foco puntual emisor de ondas secundarias.

puntuales equiespaciados en la rendija. El campo eléctrico de la onda electromagnética resultante, $E_y(r, t)$, en cierto punto P de una pantalla S_D (situada a una distancia $D \gg d$) será fruto de la *interferencia* de un gran número de fuentes equiespaciadas de igual amplitud y fase inicial, esto es,

$$E_y(P, t) = \sum_{n=1}^N E_0 e^{-j(kr_n - \omega t)}, \quad (6.60)$$

donde r_n es la distancia desde el foco secundario n -ésimo hasta el punto P y E_0 la amplitud constante de cada onda elemental. Notemos que, bajo la presente aproximación, todos los rayos que llegan a P se consideran paralelos. Si llamamos r a la distancia desde el foco 1 hasta P y Δr a la diferencia de camino entre la perturbación que llega a P desde un foco y el siguiente, r_n puede escribirse como

$$r_n = r + (n - 1)\Delta r .$$

La perturbación en P según (6.60) puede entonces expresarse como

$$\begin{aligned} E_y(P, t) &= E_0 \left[e^{-jkr} + e^{-jk(r+\Delta r)} + e^{-jk(r+2\Delta r)} + \dots \right] e^{j\omega t} \\ &= E_0 \left[1 + e^{-j\phi} + e^{-2j\phi} + \dots + e^{-(N-1)j\phi} \right] e^{-j(kr - \omega t)}, \quad (6.61) \end{aligned}$$

donde $\phi = k\Delta r$, lo que nos lleva a identificar la suma entre corchetes como una serie geométrica, S_g , de razón $q = e^{-j\phi}$. Dado que la suma de la siguiente serie geométrica viene dada por

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

el resultado de la serie geométrica en (6.61) puede expresarse como

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1 - e^{jN\phi}}{1 - e^{j\phi}} = \frac{e^{jN\phi/2} e^{-jN\phi/2} - e^{jN\phi/2}}{e^{j\phi/2} e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}} \\ &= \frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)} e^{j(N-1)\phi/2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$E_y(P, t) = E_0 \frac{\text{sen}(kN\Delta r/2)}{\text{sen}(k\Delta r/2)} e^{-j[k(r + \frac{N-1}{2}\Delta r) - \omega t]}. \quad (6.62)$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$E_y(P, t) = E_P e^{-j(kR - \omega t)}, \quad (6.63)$$

donde

$$R = r + \frac{N-1}{2} \Delta r$$

es la distancia desde el centro de la rendija al punto P y

$$E_P = E_0 \frac{\text{sen}(kN\Delta r/2)}{\text{sen}(k\Delta r/2)} \quad (6.64)$$

es la amplitud resultante de la componente y del campo eléctrico en P . Dado que esta amplitud varía en cada punto de la pantalla, también lo hará la intensidad de la onda, formando lo que se conoce como un **patrón de difracción**:

$$\frac{\mathcal{I}_{\text{med}}(\theta)}{\mathcal{I}_{\text{med}}^{\text{max}}} = \frac{\text{sen}^2(Nk\Delta r/2)}{\text{sen}^2(k\Delta r/2)}. \quad (6.65)$$

Claramente existe un mínimo en la intensidad de la perturbación cuando $E_P \rightarrow 0$, esto es, cuando el numerador de (6.64) sea cero,

$$\text{sen}(kN\Delta r/2) = 0,$$

es decir, cuando el argumento verifica que

$$kN\Delta r/2 = m\pi. \quad (6.66)$$

Según se puede deducir de la Fig. 6.6(b) (si $N \gg 1$):

$$N\Delta r \approx (N-1)\Delta r = b \text{sen } \theta,$$

por lo que la condición de mínimo (6.66) para E_P puede reescribirse como

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{b \text{sen } \theta}{2} = m\pi, \quad (6.67)$$

o equivalentemente

$$b \text{sen } \theta_m = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.68)$$

Condición de intensidad nula en la difracción por una rendija

El primer mínimo (o mínimo de primer orden) ocurre para $m = 1$, verificándose entonces que

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\lambda}{b}. \quad (6.69)$$

Puede observarse que si $\lambda \ll b$, $\theta_1 \approx 0$, por lo que apenas se observará patrón de difracción, es decir, la zona de sombra aparece bien definida tal como ocurriría si la onda se propagase en línea recta. A medida que el cociente λ/b crece, el ángulo θ_1 aumenta, haciéndose, por tanto, más evidente el fenómeno de difracción. En general, los fenómenos de difracción son más apreciables cuando las dimensiones de la rendija son del orden de la longitud de onda de la perturbación ondulatoria (no obstante, debe tenerse en cuenta que el análisis efectuado para obtener la expresión (6.68) es sólo válido si $\lambda < b$, puesto que de otro modo el seno sería mayor que uno para todo valor de m).

EJEMPLO 6.4 Hallar la anchura de la franja central del patrón de difracción producido en una pantalla situada a una distancia de 5 m de una rendija de anchura 0.3 mm por la que se ha hecho pasar una luz laser de 600 nm.

La anchura de la franja central puede obtenerse a partir del ángulo θ_1 que nos da el primer mínimo en el patrón de difracción. Según la expresión (6.69), este ángulo viene dado por

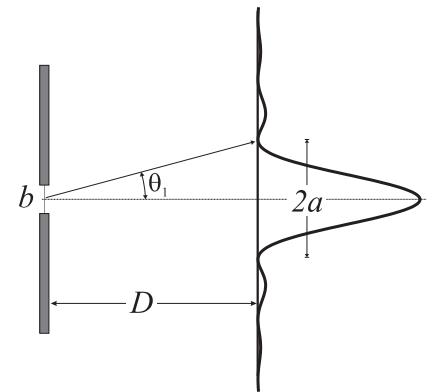
$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\lambda}{b} = \frac{6 \times 10^{-7} \text{ m}}{3 \times 10^{-4} \text{ m}} = 2 \times 10^{-3}.$$

Dado que $\text{sen } \theta_1 \ll 1$, tenemos que

$$\text{sen } \theta_1 \approx \tan \theta_1$$

y, por tanto, la anchura de la franja central será

$$2a = 2D \tan \theta_1 \approx 2 \cdot 5 \cdot 2 \times 10^{-3} = 20 \text{ mm}.$$



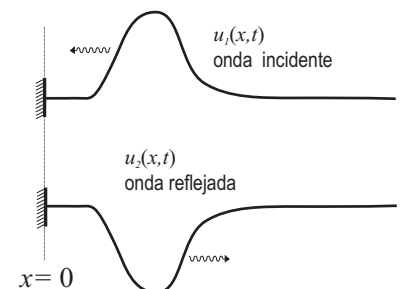
6.8. Ondas estacionarias

Observemos que cuando una perturbación viaja hacia la izquierda por una cuerda, al llegar al extremo, ésta se refleja de la forma mostrada en la figura adjunta. Este fenómeno ondulatorio también se dará para ondas electromagnéticas cuando dichas ondas son reflejadas por “espejos”. Consideremos entonces una onda electromagnética plana armónica viajando hacia la izquierda con un campo eléctrico dado por (suponemos, por simplicidad, que la fase inicial de la onda es nula, $\varphi = 0$)

$$\vec{E}_1(x, t) = E_{0,1} \cos(\omega t + kx) \hat{y}.$$

Al llegar al punto $x = 0$, la onda se refleja en un espejo dando lugar a otra onda armónica viajando hacia la derecha cuyo campo eléctrico vendrá dado por

$$\vec{E}_2(x, t) = E_{0,2} \cos(\omega t - kx) \hat{y}.$$



Dado que las dos ondas viajeras anteriores se encuentran en una misma *región* del espacio darán lugar a un fenómeno típico de superposición o interferencia.

Puesto que en el punto $x = 0$ la amplitud del campo electromagnético debe ser nula para cualquier instante de tiempo (por hipótesis ésta es la condición de reflexión "ideal" en un espejo), tendremos que la componente y del campo resultante en este punto cumplirá

$$\begin{aligned} E_y(0, t) &= E_{0,1} \cos(\omega t) + E_{0,2} \cos(\omega t) \\ &= (E_{0,1} + E_{0,2}) \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (6.70)$$

de donde se deduce que $E_{0,1} = -E_{0,2}$.

Como las dos ondas electromagnéticas anteriores coinciden simultáneamente en la misma región del espacio, la superposición de ambas (usando notación compleja) hará que la componente y del campo eléctrico de la onda electromagnética resultante venga dada por

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= -E_{0,2} e^{j(\omega t + kx)} + E_{0,2} e^{j(\omega t - kx)} = E_{0,2} (-e^{jkx} + e^{-jkx}) e^{j\omega t} \\ &= E_0 \operatorname{sen}(kx) e^{j(\omega t - \pi/2)} \end{aligned} \quad (6.71)$$

(donde $E_0 = 2E_{0,2}$ y $-j$ se ha escrito como $e^{-j\pi/2}$), cuya parte real puede finalmente escribirse como

$$E_y(x, t) = E_0 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t. \quad (6.72)$$

Nótese que en la expresión (6.72) no aparecen explícitamente expresiones del tipo $f(\omega t \pm kx)$, lo que indica que esta perturbación no puede identificarse ya simplemente con una onda viajera, sino que constituye un nuevo tipo de onda conocido como **onda estacionaria**. En este tipo de perturbación ya no podemos decir que la energía viaja de un punto a otro sino que, como muestra la Fig. 6.7, esta onda estacionaria corresponde a una situación en

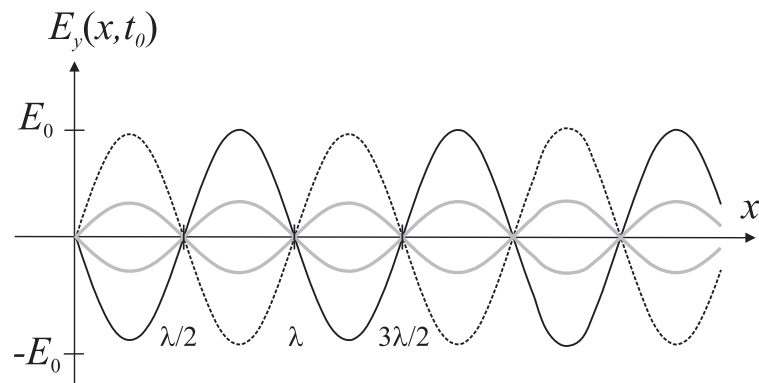


FIGURA 6.7: Instantánea de la onda estacionaria en $t = t_0$. Los nodos están separados una distancia $\lambda/2$.

la que cada punto del espacio está sometido a un campo eléctrico caracterizado por una *oscilación armónica simple* cuya "amplitud" es una función de x , $E_0(x)$, pudiéndose escribir entonces que

$$E_y(x, t) = E_0(x) \operatorname{sen} \omega t, \quad (6.73)$$

siendo

$$E_0(x) = E_0 \text{ sen } kx . \quad (6.74)$$

Observemos que en la situación anterior podemos encontrar puntos denominados **nodos** donde el campo eléctrico es nulo para todo instante de tiempo. Estos puntos son aquellos que verifican que $E_0(x)$ es cero, es decir, aquellos que satisfacen la siguiente condición:

$$kx = n\pi \Rightarrow x_{\text{nodo}} = n \frac{\lambda}{2} , \quad (6.75)$$

siendo la distancia entre dos nodos sucesivos una semilongitud de onda (recuérdese que la longitud de onda está determinada por la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda: $\lambda = c/f$).

Si ahora imponemos al problema anterior una *segunda condición* consistente en colocar un segundo espejo en el punto $x = L$, entonces ha de verificarse igualmente que

$$E_y(L, t) = 0 ,$$

lo cual requiere que

$$\text{sen } kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi . \quad (6.76)$$

La condición anterior implica que tanto el número de ondas como la longitud de onda de la onda electromagnética estacionaria resultante sólo pueden tomar ciertos valores **discretos** (fenómeno conocido como *cuantización*) dados por

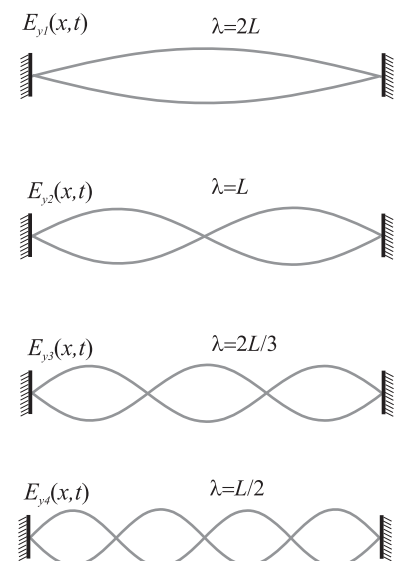
$$k_n = n \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots \quad (6.77)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \dots \quad (6.78)$$

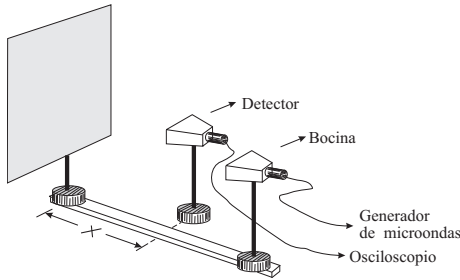
Vemos entonces que la imposición de (6.76) ha limitado los valores de las longitudes de onda de la onda electromagnética en la región del espacio limitada por los dos espejos a aquellos valores que cumplan la condición (6.78). De forma análoga, las frecuencias permitidas serán aquellas que cumplan

$$\omega_n = ck_n = c \frac{n\pi}{L} . \quad (6.79)$$

En consecuencia podemos concluir que tanto las longitudes de onda como las frecuencias permitidas están **cuantizadas** y que esta cuantización es fruto de la imposición de condiciones de contorno en las fronteras de cierta región del espacio.



EJEMPLO 6.5 En el montaje de la figura se genera una onda estacionaria en la región entre la bocina emisora y la pantalla metálica (espejo). Supuesto que el detector de campo eléctrico nos dice que la distancia mínima entre los mínimos de amplitud de campo están situados a 15 cm, determine la frecuencia de la onda emitida por la bocina.



Teniendo en cuenta que la distancia entre mínimos de amplitud de campo eléctrico viene determinada por la expresión (6.75), y que la distancia entre dos nodos sucesivos es $\Delta = \lambda/2$, tenemos entonces que la longitud de onda será

$$\lambda = 2\Delta = 2 \cdot 0,15 = 0,3 \text{ m} .$$

Considerando ahora la relación existente entre la frecuencia y la longitud de onda ($\lambda = cf$) tendremos que la frecuencia emitida es

$$f = \frac{\lambda}{c} = \frac{0,3}{3 \times 10^8} = 1 \text{ GHz} .$$

Finalmente observemos que en la región limitada por los espejos, cada una de las ondas electromagnéticas estacionarias permitidas posee un campo eléctrico cuya componente y responde a la siguiente expresión:

$$E_{y,n}(x, t) = E_{0,n} \text{sen}(k_n x) \text{sen}(\omega_n t + \varphi_n) ,$$

que se denominan genéricamente como *armónicos*. Estos armónicos presentan la importante propiedad de que cualquier perturbación electromagnética que en pueda existir en dicha región puede expresarse como una superposición de ellos, esto es,

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0,n} \text{sen}(k_n x) \text{sen}(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0,n} \text{sen}(nk_1 x) \text{sen}(n\omega_1 t + \varphi_n) , \end{aligned} \quad (6.80)$$

siendo

$$k_1 = \frac{\pi}{L} , \quad \omega_1 = v \frac{\pi}{L}$$

y $E_{0,n}$ la amplitud del n -ésimo armónico (esta amplitud será distinta en cada caso particular). El resultado anterior puede considerarse como una conclusión particular de un teorema más general, llamado **teorema de Fourier**, que básicamente dice que una función periódica puede expresarse como la suma de senos/cosenos cuyas frecuencias son un número entero de veces la frecuencia original del problema (un tratamiento detallado de este teorema puede encontrarse en cualquier libro de Cálculo).

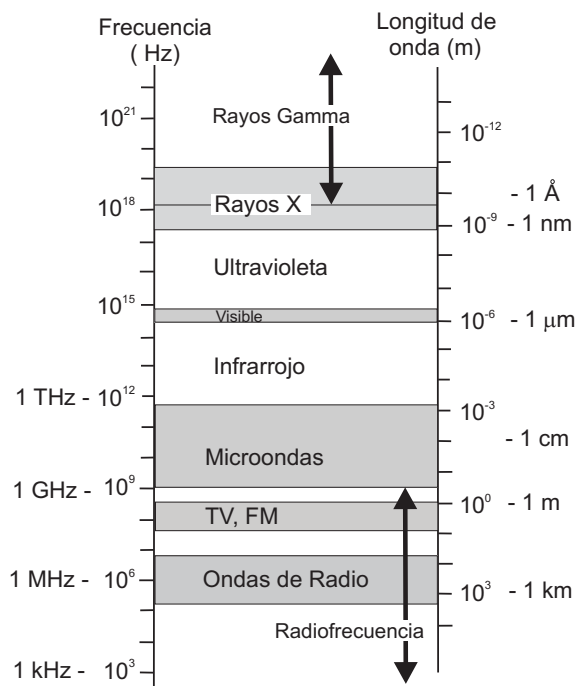


FIGURA 6.8: Espectro electromagnético

6.9. Espectro electromagnético

Uno de los aspectos más interesantes de las ondas electromagnéticas es que distintos fenómenos ondulatorios aparentemente inconexos como la luz, las ondas de radio, las microondas, los rayos X, los rayos gamma, etc, son todos ellos ondas electromagnéticas que se diferencian simplemente por su distinta frecuencia y longitud de onda. Todos los fenómenos anteriores son básicamente campos eléctricos y magnéticos oscilantes a determinada frecuencia. En el espacio libre, la relación entre la frecuencia f y la longitud de onda λ viene dada por

$$\lambda = \frac{c}{f} . \quad (6.81)$$

El conjunto de todas las radiaciones electromagnéticas se conoce **espectro electromagnético**, distinguiéndose en él las distintas denominaciones que toman las ondas electromagnéticas en función de la frecuencia, tal como se muestra en la Fig. 6.8.

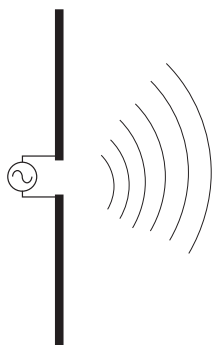
A lo largo de este tema hemos visto cómo la longitud de onda y la frecuencia determinan fundamentalmente las propiedades de la onda. En este sentido se vio en el Apartado 6.7 que los fenómenos de difracción dependían básicamente de la relación entre la longitud de onda y el tamaño físico de los objetos donde se producía la difracción. Esto justificaba que los efectos de difracción de la luz sean apenas perceptibles debido a la corta longitud de onda de la luz visible ($400 \lesssim \lambda(\text{nm}) \lesssim 700$) y que, por tanto, la luz pueda ser considerada en muchas situaciones prácticas como un *rayo*. La misma explicación sirve para entender por qué grandes obstáculos como edificios o montes no afectan drásticamente a la propagación de ondas de radio lar-

gas ($10^7 \lesssim \lambda(\text{m}) \lesssim 10^2$). La interacción de la onda electromagnética con la materia también depende básicamente de la longitud de la onda y así, la pequeña longitud de onda de los rayos X ($10^{-12} \lesssim \lambda(\text{m}) \lesssim 10^{-8}$) es la que explica por qué estos rayos pueden atravesar fácilmente muchos materiales que son opacos para radiaciones de mayor longitud de onda. Igualmente, al estar la longitud de onda de las ondas generadas en los hornos de microondas ($\lambda \sim 15 \text{ cm}$) dentro del espectro de absorción de las moléculas de agua se explica que esta radiación sea considerablemente absorbida por las moléculas de agua que contienen los alimentos y, consecuentemente, se calienten.

6.10. Fuentes de las Ondas Electromagnéticas

Hasta ahora hemos estado estudiando algunas de las características de las ondas electromagnéticas pero todavía no sabemos dónde y cómo se originan estas ondas. Dado que las ondas electromagnéticas son simplemente campos eléctricos y magnéticos oscilantes y las fuentes de estos campos son las cargas eléctricas estáticas y/o en movimiento, es razonable suponer que estas cargas serán las fuentes de las ondas electromagnéticas. No obstante, debemos notar que estamos hablando de las fuentes de los campos “primarios” puesto que, como se ha discutido anteriormente, una vez que se han generado estos campos primarios, son precisamente los propios campos los responsables de la generación de los subsiguientes campos. Ahora bien, para que los campos primarios generen otros campos, éstos debían ser campos variables en el tiempo por lo que *ni cargas estáticas ni las cargas en movimiento uniforme de una corriente estacionaria puede producir ondas electromagnéticas*.³ Consecuentemente solo las cargas eléctricas aceleradas (único estado de movimiento no considerado hasta ahora) originarán estos campos primarios y, por tanto, podemos concluir que

las cargas eléctricas aceleradas son fuentes de las ondas electromagnéticas.



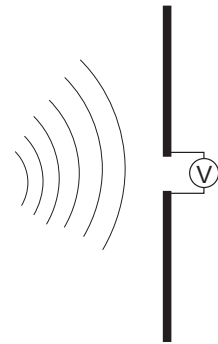
Cargas eléctricas oscilando a una determinada frecuencia ω serán los focos de ondas electromagnéticas de esa misma frecuencia y con una longitud de onda en el espacio libre dada por: $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Normalmente la oscilación de una única carga produce una onda cuya intensidad es prácticamente indetectable, por ello las ondas electromagnéticas suelen originarse en la práctica cuando un número importante de cargas están oscilando conjuntamente. Este hecho se produce, por ejemplo, en las **antenas**, que no son, en su forma básica, más que dos varillas conductoras alimentadas mediante un generador de corriente alterna. El generador de corriente alterna provoca que los electrones de las varillas conductoras

³ Recordemos que las cargas estáticas son las fuentes de campos eléctricos estáticos y las cargas en movimiento uniforme en un conductor (esto es, las corrientes eléctricas continuas) son las fuentes de los campos magnéticos estáticos.

viajen desde un extremo a otro de las varillas realizando un movimiento oscilatorio que viene determinado por la frecuencia del generador. Este tipo de antenas es el comúnmente usado para generar ondas de radio y TV ($\text{MHz} \lesssim f \lesssim \text{GHz}$). Las ondas de la luz visible que oscilan a una $f \sim 10^{15} \text{Hz}$ son originadas por el movimiento oscilatorio de las cargas atómicas y las radiaciones de mayor frecuencia por rápidas oscilaciones electrónicas y nucleares.

El mismo mecanismo que justifica que los electrones en movimiento en un conductor originan ondas electromagnéticas, esto es, forman una *antena emisora*, también explica por qué este mismo dispositivo (sin el generador) sería una *antena receptora*. Los campos eléctricos que llegan a la antena ejercen una fuerza sobre las cargas móviles del conductor (electrones) que las hacen oscilar a la misma frecuencia que la onda electromagnética incidente. Claramente, el movimiento de estas cargas, que simplemente sigue el patrón de la radiación incidente, produce una corriente eléctrica oscilante que puede ser detectada por algún dispositivo adecuado. De esta manera el patrón de variación temporal que se produjo en el generador de la antena emisora es ahora “recogido” en el detector de la antena receptora. (Los electrones de la antena receptora se mueven tal como lo hacían los electrones de la antena emisora, sólo que cierto intervalo de tiempo después; justamente el necesario para que la onda recorra la distancia entre las dos antenas). De esta manera se ha transmitido información desde un sitio a otro del espacio usando como intermediario a la onda electromagnética. Esta manera de transmitir información es muy eficaz ya que pone en juego muy poca energía y permite transmitir información entre puntos muy lejanos entre sí (incluyendo comunicaciones con satélites y vehículos espaciales).



6.11. Problemas propuestos

6.1: Demostrar por sustitución directa que la siguiente expresión:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin k(x - ct),$$

donde $c = \omega/k$, satisface la ecuación de ondas.

6.2: Hallar la longitud de onda de **a)** una onda de radio de AM típica con una frecuencia de 100 kHz; **b)** una onda de radio de FM típica de 100 MHz; **c)** la frecuencia de una microonda de 3 cm y **d)** la frecuencia de unos rayos X con una longitud de onda de 0,1 nm.

Sol. **a)** $\lambda = 3 \text{ km}$; **b)** $\lambda = 3 \text{ m}$; **c)** $f = 10 \text{ GHz}$; **d)** $f = 3 \times 10^{18} \text{ Hz}$;

6.3: Una onda electromagnética (OEM) plana se propaga en el vacío. Sabiendo que su frecuencia es de 98.4 MHz y su amplitud de campo eléctrico es de 20 mV/m, calcúlese: **a)** la amplitud del campo magnético; **b)** la intensidad de onda (potencia media por unidad de área).

Sol. **a)** $B_0 = 0,66 \times 10^{-10} \text{ T}$; **b)** $I = 0,53 \mu\text{W}/\text{m}^2$.

6.4: Una OEM plana se propaga a lo largo del eje X con una longitud de onda de 3 cm, transportando una potencia media por unidad de área de $6 \mu\text{W}/\text{m}^2$. Determinense las expresiones completas de los campos \vec{E} y \vec{B} sabiendo que el campo eléctrico está dirigido según el eje Y.

Sol. $\vec{E}(x, t) = 67,26 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^{10}t - 200\pi x/3 + \phi) \hat{y} \text{ V/m}$,
 $\vec{B}(x, t) = 22,42 \times 10^{-11} \cos(2\pi \times 10^{10}t - 200\pi x/3 + \phi) \hat{z} \text{ T}$.

6.5: Cierta pulso de campo electromagnético puede asimilarse a una onda plana cuyos campos son $\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-(x-ct)^2} \hat{y}$ (V/m) y $\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-(x-ct)^2} \hat{z}$ (T). Demostrar que ambos campos verifican la ecuación de onda y obtener la relación entre E_0 y B_0 sabiendo que de acuerdo con la ley de Faraday debe cumplirse que $\partial E_y(x, t)/\partial x = -\partial B_z(x, t)/\partial t$.

Sol.: $E_0 = cB_0$.

6.6: La antena de un receptor radioeléctrico es equivalente a una barra conductora de 2 m de altura y está orientada paralelamente al campo eléctrico de la OEM que se desea sintonizar. Si la tensión eficaz entre los extremos de la antena al recibir la onda es de 4 mV, determinen las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda sintonizada, así como la potencia media por unidad de área transportada por la onda.

Sol.: $E_e = 2 \times 10^{-3}$ V/m; $B_e = 0,666 \times 10^{-11}$ T, $I = 10^{-8}$ W/m².

6.7: En la superficie de la Tierra, el flujo solar medio aproximado es de 0,75 kW/m². Se desea diseñar un sistema de conversión de energía solar a eléctrica para que proporcione una potencia eléctrica de 25 kW que permita cubrir las necesidades de una casa. Si el sistema tiene una eficacia del 30 %, ¿cuál será el área necesaria de los colectores solares, supuestos que son absorbentes perfectos?

Sol. 111 m².

6.8: Un pulso de láser tiene una energía de 20 J y un radio de haz de 2 mm. La duración del pulso es de 10 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso. **a)** ¿Cuál es la longitud espacial del pulso? **b)** ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo? **c)** Hallar los valores de la amplitud de los campos eléctrico y magnético.

Sol.: **a)** 3 m; **b)** $5,31 \times 10^5$ J/m³; **c)** $E_0 = 3,46 \times 10^8$ V/m, $B_0 = 1,15$ T.

6.9: El campo eléctrico de una onda electromagnética oscila en la dirección z, viniendo su vector de Poynting dado por

$$\vec{S}(x, t) = -100 \cos^2[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{x} \text{ W/m}^2$$

donde x está en metros y t en segundos. **a)** ¿En qué dirección se propaga la onda? **b)** Calcular la longitud de onda y la frecuencia. **c)** Hallar los campos eléctrico y magnético.

Sol.: **a)** sentido negativo de x; **b)** $\lambda = 0,620$ m, $f = 4,77 \times 10^8$ Hz;

c) $\vec{E} = 194 \cos[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{z}$ V/m, $\vec{B} = 0,647 \times 10^{-6} \cos[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{y}$ T.

6.10: El campo eléctrico de una onda electromagnética armónica plana tiene la expresión $\vec{E}(z, t) = 3 \times 10^{-3} \cos(kz - 2\pi \times 10^8 t) \hat{y}$ (V/m). Determinese: **a)** la longitud de onda, frecuencia, periodo y número de onda; **b)** el campo magnético, \vec{B} , así como el vector de Poynting, \vec{S} , y la intensidad de onda, I.

Sol.: **a)** $\lambda = 3$ m, $f = 100$ MHz, $T = 10$ ns, $k = 2\pi/3$ m⁻¹;

b) $\vec{B}(z, t) = -0,01 \cos(2\pi z/3 - 2\pi \times 10^8 t) \hat{x}$ nT,

$\vec{S}(z, t) = 0,0239 \cos^2(2\pi z/3 - 2\pi \times 10^8 t) \hat{z}$ $\mu\text{W/m}^2$, $I = \langle S \rangle = 0,01195$ $\mu\text{W/m}^2$.

6.11: Una OEM armónica plana de longitud de onda $\lambda = 6$ m se propaga en el sentido negativo del eje de las X siendo su campo magnético $\vec{B}(x, t) = 2 \times 10^{-10} \cos(\omega t + kx + \pi/4) \hat{y}$ T. Determinese: **a)** el número de ondas, la frecuencia y el periodo de la onda; **b)** las expresiones del campo eléctrico, \vec{E} , y del vector de Poynting, \vec{S} , así como la intensidad de onda, I.

Sol.: **a)** $k = \pi/3$ m⁻¹, $f = 50$ MHz, $T = 20$ ns;

b) $\vec{E}(x, t) = 60 \times 10^{-3} \cos(\pi \times 10^8 t + kx + \pi/4) \hat{z}$ V/m,

$\vec{S}(x, t) = -(30/\pi) \cos^2(\pi \times 10^8 t + kx + \pi/4) \hat{x}$ $\mu\text{W/m}^2$, $I = \langle S \rangle = 15/\pi$ $\mu\text{W/m}^2$.

Constantes: $c = 3 \times 10^8$ m/s, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m.

Apéndice A

Análisis vectorial

A.1. Vectores

En la naturaleza existen magnitudes físicas que están completamente determinadas por su valor y sus unidades. De forma genérica puede decirse que estas magnitudes son *escalares*. Ejemplos de estas magnitudes son la masa, la distancia, la temperatura, etc. Por el contrario, existen otras magnitudes que además de su valor y unidades están “dotadas” de una propiedad adicional: su dirección. Este tipo de magnitudes se conocen con el nombre de magnitudes *vectoriales* e incluyen a magnitudes tales como la posición, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc. Para expresar las magnitudes vectoriales se hace uso de los *vectores* y por tanto se hace imprescindible el álgebra de vectores.

A.1.1. Notación vectorial

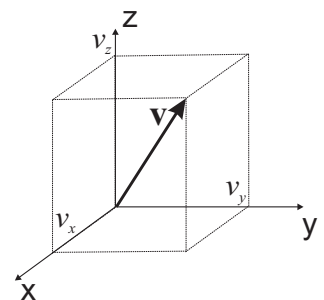
Usualmente las magnitudes vectoriales suelen denotarse en los textos impresos mediante letras minúsculas o mayúsculas en tipo **negrita**, \vec{v} , \vec{V} , dejándose usualmente la notación con una flecha/raja encima de dichas letras, \vec{v} , \vec{V} , para la escritura manual de los mismos. No obstante en el texto de estos apuntes y con la idea de evidenciar más si cabe el carácter vectorial de las magnitudes usaremos la notación con una flechita encima de las variables. En las figuras aparecerán sin embargo los vectores denotados en tipo **negrita**.

Para especificar los vectores se usan frecuentemente varios tipos de notación.

- Mediante una terna de números que son las **componentes** del vector en los ejes cartesianos x, y, z ,

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) . \quad (\text{A.1})$$

Geoméricamente, las componentes del vector son las proyecciones de este vector en los ejes cartesianos.



Módulo del vector \vec{v}

- El vector \vec{v} puede también expresarse en función de su **módulo** y de su **vector unitario**. El módulo del vector \vec{v} suele denotarse como v o bien $|\vec{v}|$ y viene dado según el teorema de Pitágoras por

$$|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (\text{A.2})$$

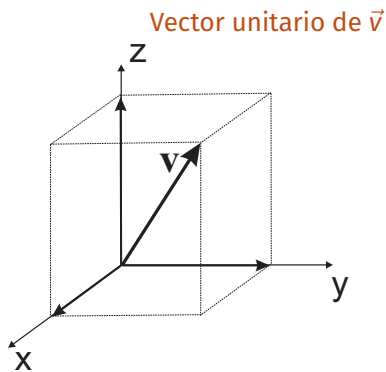
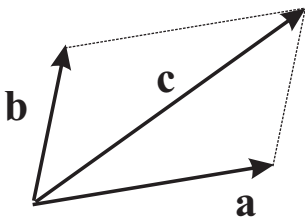
El vector unitario asociado con el vector \vec{v} se define como aquel vector de módulo unidad que tiene la misma dirección y sentido que \vec{v} . Dicho vector se denotará de forma genérica como \hat{v} , pudiéndose expresar como

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(v_x, v_y, v_z)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Obviamente el vector \vec{v} puede escribirse como: $\vec{v} = v\hat{v}$.

- Expresando el vector como suma de las componentes del vector por los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y, z se denotarán como $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ respectivamente. Otras notaciones frecuentes para estos vectores unitarios son $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ o bien $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Usando esta notación, el vector \vec{v} se escribirá como:

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}. \quad (\text{A.4})$$

Vector unitario de \vec{v} 

A.1.2. Suma de vectores

La suma de vectores se realiza sumando sus componentes. De este modo si

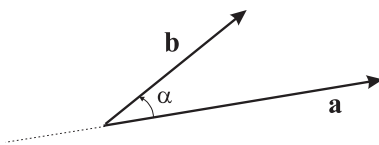
$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z},$$

el vector \vec{c} suma de los dos anteriores será por tanto:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y} + (a_z + b_z)\hat{z}. \quad (\text{A.5})$$



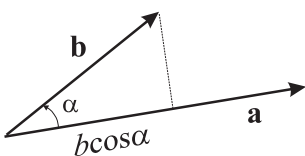
A.1.3. Producto escalar

El producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} , denotado como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es un *escalar* fruto de la siguiente operación:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{A.6})$$

$$= ab \cos \alpha, \quad (\text{A.7})$$

siendo α el ángulo formado por los dos vectores (es independiente si este ángulo se mide en dirección horaria o antihoraria ya que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$). El producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ puede interpretarse geométricamente como la proyección de uno de los vectores sobre el otro (salvo factores numéricos). Este



hecho se manifiesta claramente en el producto escalar de \vec{a} por uno de los vectores unitarios según los ejes coordenados, esto es,

$$\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x,$$

donde se ve claramente que $\vec{a} \cdot \hat{x}$ es justamente la proyección del vector \vec{a} sobre el eje x .

Algunas de las propiedades del producto escalar son:

- El producto escalar es conmutativo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (\text{A.8})$$

- El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (\text{A.9})$$

- El producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (\text{A.10})$$

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo de dicho vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2. \quad (\text{A.11})$$

A.1.4. Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores \vec{a} y \vec{b} , denotado como $\vec{a} \times \vec{b}$, es un vector definido como

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \alpha \hat{v}, \quad (\text{A.12})$$

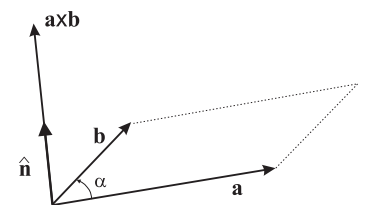
siendo α el ángulo *más pequeño* formado por los dos vectores y \hat{v} el vector unitario normal exterior al plano que contiene a los vectores \vec{a} y \vec{b} . Puesto que el plano tiene dos normales (cada una con distinto sentido), el vector \hat{v} que aparece en (A.12) siempre se refiere a la normal que apunta según la *regla de la mano derecha*. Esta regla dice que usando la mano derecha y apuntando el dedo índice en la dirección de \vec{a} y el dedo corazón en la de \vec{b} , el dedo pulgar indicará la dirección de \hat{v} . Geométricamente, el módulo del producto vectorial, $|\vec{a} \times \vec{b}|$, es igual al área del paralelogramo generado por los vectores \vec{a} y \vec{b} .

A partir de la definición del producto vectorial (A.12) pueden deducirse las siguientes propiedades:

- El producto vectorial es anticonmutativo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (\text{A.13})$$

¹ Esta regla también se conoce a veces como *regla del tornillo* cuando dice que considerando el giro que va desde \vec{a} hasta \vec{b} por el camino más corto, si este giro se aplica a un tornillo, el sentido de avance o retroceso del tornillo indica hacia donde se dirige la normal.



- El producto vectorial es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (\text{A.14})$$

- El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (\text{A.15})$$

- Multiplicación por un escalar α :

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \alpha\vec{b}. \quad (\text{A.16})$$

Teniendo en cuenta la definición (A.12) y las propiedades (A.13)–(A.15), el producto vectorial de \vec{a} por \vec{b} puede obtenerse como

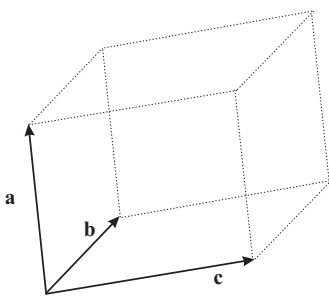
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando la definición del determinante, la expresión anterior puede escribirse como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

A.1.5. Productos triples

Dado que el producto vectorial de dos vectores es otro vector, este vector puede a su vez multiplicarse escalar o vectorialmente para formar lo que se conoce como productos triples.



- Producto triple escalar:** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Desde un punto de vista geométrico, este producto triple escalar puede interpretarse como el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} dado que según la figura adjunta $|\vec{b} \times \vec{c}|$ es el área de la base y $|a \cos \alpha|$ es la altura (α es el ángulo entre \vec{a} y $\vec{b} \times \vec{c}$). Usando esta interpretación geométrica es fácil deducir que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (\text{A.19})$$

Es interesante notar que en la expresión anterior se ha preservado el “orden alfabético”.

El producto triple escalar puede también obtenerse a partir del siguiente determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

■ **Producto triple vectorial:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Este producto triple vectorial puede también obtenerse como

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (\text{A.21})$$

Nótese que el vector

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (\text{A.22})$$

es un vector completamente diferente al definido en la expresión (A.21).

A.1.6. Diferencial y derivada de funciones de una sola variable

Dada una función de una sola variable $f = f(x)$, se define la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{A.23})$$

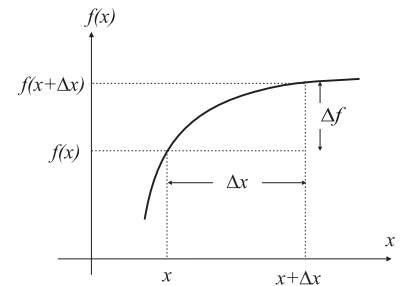
y expresa geoméricamente el valor de la pendiente de la tangente a la curva $f(x)$ en el punto x . El concepto de **diferencial** de $f(x)$, denotado genéricamente como df , expresa la variación infinitesimal de la función $f(x)$ entre x y $x + dx$, esto es,

$$df(x) = f(x + dx) - f(x). \quad (\text{A.24})$$

Desde un punto de vista matemático, este diferencial viene dado por el siguiente producto:

$$df(x) = \left(\frac{df}{dx} \right) dx. \quad (\text{A.25})$$

Debe notarse que df/dx **no** expresa un cociente entre df y dx sino que por el contrario debe entenderse como la acción del *operador* d/dx sobre la función $f(x)$. Este hecho se pone de manifiesto con otras notaciones que prefieren expresar la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x como $D_x f(x)$, donde $D_x \equiv d/dx$ es precisamente el operador derivada.



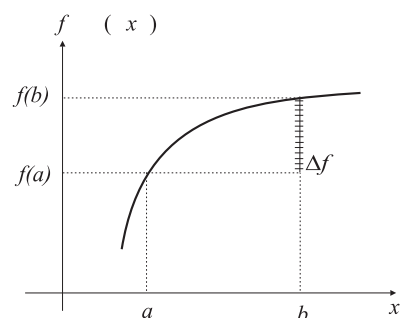
A.1.7. Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo establece la siguiente relación entre las operaciones de integración y diferenciación de la función $f(x)$:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a). \quad (\text{A.26})$$

Una posible manera de “deducir” la expresión anterior pasa por tener en cuenta que $df(x) = \left(\frac{df}{dx} \right) dx$, y por tanto

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a). \quad (\text{A.27})$$



A.1.8. Diferencial y derivada parcial de una función de varias variables

Es muy frecuente que en la naturaleza las magnitudes dependan de más de una variable, así la temperatura de una habitación depende de la posición del punto donde se mide, esto es, de las *tres* coordenadas espaciales del punto. Este hecho se manifiesta matemáticamente diciendo que la temperatura es función de x, y y z y se denota como $T = T(x, y, z)$.

Similarmente al concepto de derivada introducido en la sección anterior para funciones de una sola variable, puede ahora definirse el concepto de *derivada parcial*. Esta derivada hace referencia a la variación de cierta función con respecto a *una sola* de las variables cuando las demás permanecen constantes. Así, se define la derivada parcial de la función $f(x, y, z)$ con respecto a x como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (\text{A.28})$$

y análogamente para las restantes variables. A partir del concepto de derivada parcial, puede deducirse que una variación infinitesimal de la función $f(x, y, z)$ cuando dicha función varía entre los puntos x y $x + dx$ podrá expresarse como

$$df|_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{A.29})$$

La variación infinitesimal de la función $f(x, y, z)$ cuando ésta varía entre los puntos (x, y, z) y $(x + dx, y + dy, z + dz)$ podría obtenerse, por tanto, sumando las variaciones parciales a lo largo de cada una de las coordenadas. De este modo, puede escribirse que

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz. \quad (\text{A.30})$$

A.1.9. Operador gradiente

Es interesante notar en la expresión (A.30) que el diferencial de la función $f(x, y, z)$, df , puede expresarse como el siguiente producto escalar:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz). \quad (\text{A.31})$$

Definiendo el operador vectorial $\vec{\nabla}$ como

Operador $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.33})$$

al aplicarlo a la función $f(x, y, z)$ se obtiene el **gradiente** de f , $\vec{\nabla}f$, que es evidentemente una magnitud **vectorial**:

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{A.34}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \tag{A.35}$$

Esta definición permite escribir el diferencial de la función f como el siguiente producto escalar:

$$df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}, \tag{A.36}$$

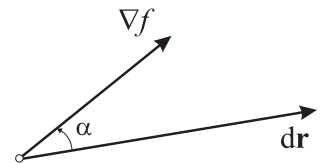
donde $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

Usando la definición de producto escalar, df también puede escribirse como

$$df = |\vec{\nabla}f| |d\vec{r}| \cos \alpha, \tag{A.37}$$

lo que permite deducir que la máxima variación de la función $f(x, y, z)$ se produce cuando $\alpha = 0$, esto es, cuando $d\vec{r}$ es paralelo al gradiente de f , $\vec{\nabla}f$. Consecuentemente, la *dirección del vector $\vec{\nabla}f$ marca la dirección de máxima variación de la función en el punto (x, y, z) .*

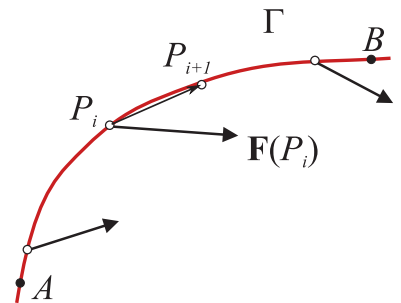
Definición de gradiente de f



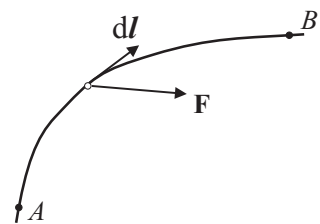
A.1.10. Integral de camino

Dado un campo vectorial \vec{F} (esto es, una magnitud **vectorial** cuyas componentes dependen de la posición espacial), la integral de camino de \vec{F} entre dos puntos A y B a lo largo de la curva Γ se define como la siguiente integral:

$$C_A^B = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \lim_{P_{i+1} \rightarrow P_i(\Gamma)} \sum_i \vec{F}(P_i) \cdot \overline{P_i P_{i+1}}. \tag{A.38}$$



La integral anterior puede interpretarse como la superposición infinitesimal del producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ para cada elemento diferencial de la curva Γ entre los puntos A y B (El vector $d\vec{l}$ es un vector que tiene por módulo la longitud de un elemento diferencial de la curva y por dirección la de la tangente a la curva en dicho punto). Las integrales de camino son muy usuales en Física, definiendo, por ejemplo, el trabajo que realiza cierta fuerza entre dos puntos a través de cierta trayectoria. En general, *la integral de camino depende del camino que se elija para ir desde A hasta B .*



Algunas de las propiedades más importantes de las integrales de camino son:

- $\int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{B,\Gamma}^A \vec{F} \cdot d\vec{l}.$
- Si A' es un punto intermedio de la curva Γ entre A y B , se tiene que $\int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Gamma}^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{A',\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$

A.1.11. Teorema fundamental del gradiente

De forma similar a como se hizo para funciones de una sola variable en (A.26), se verifica que

$$\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A), \quad (\text{A.39})$$

donde la integral en la expresión anterior es una *integral de camino*.

La expresión (A.39) puede “justificarse” considerando la definición del diferencial de f dada por (A.36). A partir de esta definición, la integral en (A.39) puede verse como una superposición infinitesimal de las variaciones de la función entre los puntos A y B , y esto es precisamente $f(B) - f(A)$.

Dos importantes corolarios se pueden extraer de la expresión (A.39)

(i):

$$\int_{A,\Gamma}^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = \int_{A,\gamma}^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} \quad (\text{A.40})$$

esto es, $\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l}$ es *independiente del camino* tomado entre los puntos A y B . Debe notarse que, en general, la integral de camino $C_A^B = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ sí depende del camino (considérese, por ejemplo, el trabajo realizado por un coche para desplazarse entre dos puntos siguiendo distintas carreteras).

(ii):

$$\oint_{\Gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = 0. \quad (\text{A.41})$$

La integral de camino anterior a través de cualquier curva cerrada, Γ , es nula.

A.2. Integral de flujo

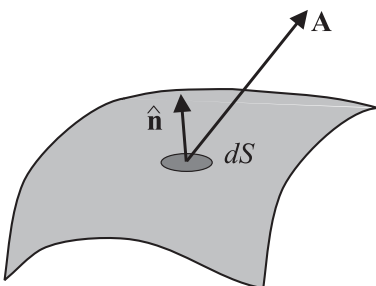
Una integral muy útil que aparece en Física es la integral de flujo. El flujo de un campo vectorial \vec{A} a través de una superficie S se define como la siguiente integral de superficie:

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.42})$$

donde S es una superficie arbitraria y $d\vec{S}$ es el vector *diferencial de superficie*, definido como

$$d\vec{S} = dS \hat{n} \quad (\text{A.43})$$

que tiene por módulo el área del elemento diferencial y por dirección y sentido el del vector unitario normal exterior a la superficie, \hat{n} . Por ejemplo, para el caso del plano $z = \text{Cte}$, el diferencial de superficie será $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$.



A.3. Problemas propuestos

- Expresar el vector $(9, 8)$ como combinación lineal de los vectores $(3, 1)$ y $(1, 2)$ y representar gráficamente el resultado.
Sol.: $(9, 8) = 2(3, 1) + 3(1, 2)$.
- Encontrar el unitario en la dirección dada por los puntos de coordenadas $(3, 2, 0)$ y $(6, 8, 2)$.
Sol.: $\hat{n} = (3/7, 6/7, 2/7)$.
- Calcular el vector unitario perpendicular al plano determinado por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ y $(3, 3, 1)$.
Sol.: $(-7, 8, -3)/\sqrt{122}$
- Encontrar el ángulo formado por los vectores $(3, 6, 2)$ y $(8, 6, 0)$ utilizando dos técnicas diferentes (producto escalar y vectorial).
Sol.: $\alpha = 31,003^\circ$.
- Utilizando el concepto de producto vectorial, determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$, $(4, 5, 2)$ y $(3, 1, 2)$.
Sol.: Área = $\sqrt{117}/2$.
- Encontrar los vectores unitarios radial (\hat{r}) y tangente (\hat{t}) en los puntos (x, y) de una circunferencia de radio R que se halla en el plano XY y tiene su centro en el origen de coordenadas. Repetir lo anterior suponiendo ahora que la circunferencia tiene su centro en el punto $(3, 2)$.
Sol.: centro en $(0, 0)$: $\hat{r} = (x/R, y/R)$, $\hat{t} = (-y/R, x/R)$;
centro en $(3, 2)$: $\hat{r} = ((x-3)/R, (y-2)/R)$, $\hat{t} = (-(y-2)/R, (x-3)/R)$.
- Indicar cuales de las siguientes expresiones tienen sentido y cuales no:
a) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$; b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; c) $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$; d) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$.
Sol.: correctas: b), c); incorrectas: a) y d).
- Utilizando el hecho de que $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, demostrar que

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

- Encontrar la componente del vector $(7, 5, 2)$ en la dirección dada por la recta que une los puntos $(5, 4, 3)$ y $(2, 1, 2)$.
Sol.: $(6, 6, 2)$.
- Descomponer el vector $\vec{A} = (1, 5, 5)$ en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección dada por el unitario $\hat{n} = (0, 3/5, 4/5)$.
Sol.: $\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$, siendo $\vec{A}_{\parallel} = (0, 3/5, 4/5)$ y $\vec{A}_{\perp} = (1, 21/5, 28/5)$.
- Las coordenadas de una partícula móvil de masa $m = 2$ kg en función del tiempo son $\vec{r}(t) = (3t, t^2, t^3)$ m (t en segundos). Determinar: a) la velocidad y aceleración de la partícula; b) la fuerza que actúa sobre la misma en el instante $t = 1$ s, así como las componentes de dicha fuerza en la dirección perpendicular y tangente a la trayectoria.
Sol.: a) $\vec{v}(t) = (3, 2t, 3t^2)$ m/s, $\vec{a}(t) = (0, 2, 6t)$ m/s²; b) $\vec{F} = (0, 4, 12)$ N; $\vec{F}_{\perp} = (-6, 0, 6)$ N, y $\vec{F}_{\parallel} = (6, 4, 6)$ N.
- Calcule el gradiente de la función $\phi(x, y, z) = 2xy/r$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Sol.: $\vec{\nabla}\phi = r^{-3} [2y(r^2 - x^2)\hat{x} + 2x(r^2 - y^2)\hat{y} - 2xyz\hat{z}]$