Colección de ejercicios resueltos de

Matemáticas Aplicadas a la Biología

En estas páginas se expone una colección de ejercicios resueltos de la asignatura *Matemáticas Aplicadas a la Biología*. Todos ellos provienen de exámenes de los últimos cursos.

De la misma manera que no se aprende a jugar al tenis *mirando* partidos por la televisión, no se aprende a resolver problemas *leyendo* problemas resueltos. Es necesario enfrentarse al problema, intentando resolverlo una y otra vez, si fuera preciso, acudiendo a la solución sólo para comprobar el resultado, o si no se consigue hacerlo.

Las Matemáticas utilizan un lenguaje que necesariamente debe ser claro, conciso y, sobre todo, preciso. No consiste este lenguaje en un conjunto de fórmulas puestas unas al lado o debajo de las otras. Es necesario expresar, mediante símbolos o mediante frases, la lógica del razonamiento que se está realizando.

Los resolución de los ejercicios de esta colección está escrita (en casi todos los casos) con todo detalle con un doble objetivo:
(a) facilitar su comprensión;
(b) mostrar **cómo se debe escribir** la solución de un ejercicio: de alguna manera es lo que los prefesores **desearíamos** encontrarnos al corregir un examen.

Ejercicios del Tema 1: Repaso de resultados previos

1. En un cultivo de laboratorio, el número de bacterias (medido en millones) durante las primeras 100 horas viene dado por
$$N(t) = 25 + te^{-t/10}, \quad t \in [0, 100].$$
Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de la población así como los momentos en que ésta alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Comenzamos por calcular la derivada de la función $N(t)$:
$$N'(t) = e^{-t/10} + te^{-t/10}\left(\frac{-1}{10}\right) = e^{-t/10}\left(1 - \frac{t}{10}\right)$$
que se anula si $1 - \dfrac{t}{10} = 0$, es decir, para $t = 10$.
Puesto que $e^{-t/10}$ es positivo $\forall t$, es fácil ver que
$$\begin{cases} N'(t) > 0 \text{ para } t \in (0, 10) \\ N'(t) < 0 \text{ para } t \in (10, 100) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \text{ es creciente en } (0, 10) \\ N \text{ es decreciente en } (10, 100) \end{cases}$$
En consecuencia, N tiene un máximo local en $t = 10$, que también es máximo absoluto, ya que es monótona a ambos lados de este punto.
El mínimo absoluto hay que buscarlo en los extremos del intervalo, al no haber mínimos locales:
$$N(0) = 25 \qquad \text{y} \qquad N(100) = 25 + 100e^{-100/10} = 25 + \frac{100}{e^{10}} \approx 25.0045$$
Por lo tanto, el mínimo absoluto se produce en $t = 0$.

2. El rendimiento de una determinada plantación de árboles viene dado por
$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^4}$$
donde x es la distancia en metros entre los distintos árboles. ¿A qué distancia se deben plantar unos árboles de otros para conseguir una mayor producción?

La distancia óptima será la que produzca el mayor rendimiento, es decir, la que produzca el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$, ya que la distancia debe ser positiva.
$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x^4} \\ \text{para } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

f es continua y derivable en $(0, +\infty)$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^4 - 4x^3(x^2-8)}{x^8} = \frac{2x^2 - 4x^2 + 32}{x^5} = \frac{32 - 2x^2}{x^5}$$

Puntos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \iff 32 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4$$

El valor $x = -4$ no interesa ya que está fuera del intervalo admisible. Por tanto, el único punto crítico de f en $(0, +\infty)$ es $x = 4$.
Puesto que $x^5 > 0$ en $(0, +\infty)$, es evidente que

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ en } (0,4) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (4,+\infty) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ es creciente en } (0,4) \\ f \text{ es decreciente en } (4,+\infty) \end{array} \right.$$

y que, en consecuencia, f tiene un máximo local en $x = 4$, que también es máximo absoluto de f en $(0, +\infty)$.

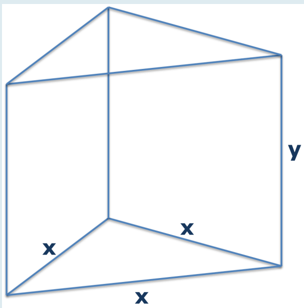
Solución: la distancia entre árboles óptima es de 4 metros.

3. Se necesita encargar la fabricación de unas cajas de cartón para transportar plantas. Deben tener la forma que se indica en la figura, siendo la base un triángulo equilátero, y un volumen de 6 litros (6000 cm^3). Se desea minimizar la cantidad de cartón necesario para la fabricación, esto es, el área total de la superficie de la caja, incluyendo las dos tapas.

   a) Deducir la función que proporciona el área total de las cajas que cumplen la condición dada (volumen igual a 6000 cm^3) en función, sólo, de la variable x. Aclaración: no es la función del apartado *b*).

   b) Calcular la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } A(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{24}{x} \\ \text{para } x \in (0, +\infty) \end{array} \right.$$

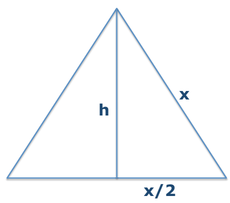


a) Comenzamos por escribir las expresiones del volumen del recipiente y de su área superficial.

$$\text{Volumen} = V(x,y) = \text{área base } \times \text{ altura}$$

$$\text{Área} = A(x,y) = 2 \times \text{área base } + 3 \times \text{ área lados rectangulares}$$

La base de la caja es un triángulo equilátero de lado x. Para calcular su área necesitamos conocer su altura, que se deduce usando el Teorema de Pitágoras:



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \iff h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \iff h = \frac{\sqrt{3}\,x}{2}$$

En consecuencia se tiene

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Área triángulo} = \dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}\\ \text{Área rectángulo} = x\cdot y\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} V(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{4}\cdot y = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2 y}{4}\\ A(x,y) = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{4} + 3xy = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + 3xy\end{array}\right.$$

El volumen de las cajas debe cumplir la condición $V(x,y) = 6000\ \text{cm}^3$ y esta condición impone una relación de dependencia entre las variables del problema; por ejemplo, se puede despejar la y en función de la x:

$$\frac{\sqrt{3}\,x^2 y}{4} = 6000 \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{4\times 6000}{\sqrt{3}\,x^2} = \frac{24000}{\sqrt{3}\,x^2}$$

y sustituyendo esta expresión de y en función de x en la expresión del área superficial tendremos ésta expresada, sólo, en función de la variable x, como nos piden:

$$A = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + 3xy = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + 3x\cdot\frac{24000}{\sqrt{3}\,x^2} = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + \frac{24000\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(x^2 + \frac{48000}{x}\Big)$$

b) Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función $A(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{24}{x}$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

Al tratarse de un intervalo abierto (que no contiene a sus extremos) ese mínimo, de existir, sólo puede ser un mínimo relativo (local).

Estudiemos el crecimiento/decrecimiento de la función A. Su derivada primera es:

$$A'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{24}{x^2} = x - \frac{24}{x^2} = \frac{x^3-24}{x^2}$$

que sólo se anula para $x = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt{3}$.

Estudiemos ahora el signo de A' en los intervalos $(0,2\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{3},+\infty)$:

En $(0,2\sqrt{3})$ se tiene $x < 2\sqrt{3} \Rightarrow x^3 < 24 \Rightarrow x^3 - 24 < 0$, de donde A' es negativa en $(0,2\sqrt{3})$.

En $(2\sqrt{3},+\infty)$ se tiene $x < 2\sqrt{3} \Rightarrow x^3 > 24 \Rightarrow x^3 - 24 > 0$, de donde A' es positiva en $(2\sqrt{3},+\infty)$.

Se tiene, pues,

$$\left\{\begin{array}{l} A'(x) < 0 \text{ en } (0,2\sqrt{3})\\[2mm] A'(x) > 0 \text{ en } (2\sqrt{3},+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \text{ es decreciente en } (0,2\sqrt{3})\\[2mm] A \text{ es creciente en } (2\sqrt{3},+\infty)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A \text{ tiene un mínimo local en } x = 2\sqrt{3},$$

que, debido a la monotonía de A en $(0,2\sqrt{3})$ y en $(2\sqrt{3},+\infty)$, es, además, mínimo absoluto en el intervalo $(0,+\infty)$.

4. El dueño de una piscifactoría ha determinado que si compra x peces (en millares), entonces, al cabo de un mes tendrá

$$f(x) = \frac{9x}{2x+4}$$

peces. ¿Qué número de peces debe comprar para conseguir que la ganancia, $f(x) - x$, sea máxima?

La cantidad óptima de peces que debe comprar será la que produzca el mayor valor de $f(x) - x$, es decir, la que produzca el máximo absoluto de la función $f(x) - x$ en el intervalo $[0,+\infty)$, ya que el número de peces a comprar será no negativo (en principio, cabe la posibilidad de que la máxima ganancia se produzca no comprando ninguno. . .)

Luego el problema a resolver es

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Maximizar } g(x) = f(x) - x = \dfrac{9x}{2x+4} - x = \dfrac{5x-2x^2}{2x+4}\\ \text{para } x\in[0,+\infty)\end{array}\right.$$

g es continua y derivable en $(0, +\infty)$.
Derivada:

$$g'(x) = \frac{(5-4x)(2x+4) - (5x-2x^2)2}{(2x+4)^2} = \frac{-4x^2 - 16x + 20}{(2x+4)^2} =$$

Puntos críticos de g:

$$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ -4x^2 - 16x + 20 = -4(x^2 + 4x - 5) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$$

El valor $x = -5$ no interesa ya que está fuera del intervalo admisible. Por tanto, el único punto crítico de f en $(0, +\infty)$ es $x = 1$.
Conocidas sus raices, $g'(x)$ se puede escribir $g'(x) = -4(x+5)(x-1)$ y puesto que $(2x+4)^2 > 0$ en $(0, +\infty)$, es evidente que

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \text{ en } (0,1) \\ g'(x) < 0 \text{ en } (1, +\infty) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g \text{ es creciente en } (0,1) \\ g \text{ es decreciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

y que, en consecuencia, g tiene un máximo local en $x = 1$, que también es máximo absoluto de g en $[0, +\infty)$.

Solución: el número óptimo de peces es 1 millar.

5. La población de una especie sigue la siguiente función

$$P(t) = a + \frac{t}{e^{t/2}}, \quad t \geq 0$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses) y a es una constante positiva.

a) Calcular a sabiendo que inicialmente había 3000 individuos.

b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?

c) ¿A qué tiende la población en el futuro?

d) Si se sabe que una población está en peligro de extinción cuando el número de individuos es menor que 1000, ¿tiene esta población peligro de extinción?

a) Tenemos que ver para qué valor de a se tiene

$$P(0) = 3 \text{ (3000 individuos)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a = 3}$$

b) El máximo absoluto de $P(t) = 3 + \dfrac{t}{e^{t/2}} = 3 + t\,e^{-t/2}$ en el intervalo $[0, +\infty)$ sólo puede ser un máximo relativo o el punto $t = 0$.

Veamos si P tiene algún máximo relativo:

$$P'(t) = e^{-t/2} - t\,\frac{1}{2}\,e^{-t/2} = \left(1 - \frac{t}{2}\right) e^{-t/2} = 0 \ \Longleftrightarrow \ t = 2$$

Claramente se tiene, puesto que $e^{-t/2} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{cases} P'(t) > 0 \text{ en } [0,2) \Rightarrow P \text{ es creciente en } [0,2) \\ P'(t) < 0 \text{ en } (2, +\infty) \Rightarrow P \text{ es decreciente en } (2, +\infty) \end{cases}$$

Luego P tiene un máximo relativo en $t = 2$ que, claramente, es también máximo absoluto en $[0, +\infty)$.

$$\boxed{\text{El máximo absoluto de } P \text{ en } [0, +\infty) \text{ se alcanza en } t = 2 \text{ y } P(2) \approx 3.736 \text{ (3736 individuos)}}$$

c) Para ver a qué tiende la población tenemos que calcular

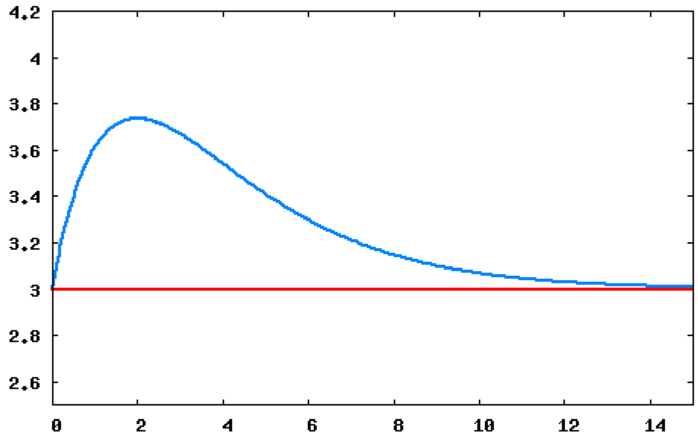
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 3 + \frac{t}{e^{t/2}} = 3 + \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t/2}} = 3$$

lo que significa que $\boxed{\text{la población tiende a estabilizarse en 3000 individuos}}$.

d) Obviamente, no hay peligro de extinción:

- $P(0) = 3$ y P es creciente entre $t = 0$ y $t = 2$.
- P es decreciente en $(2, +\infty)$, pero no desciende del valor 3, al que tiende asintóticamente.

Es decir, la población no desciende de 3000 individuos.



6. La población de una especie sigue la siguiente función:

$$P(t) = 1 + \frac{(t-a)^2}{1+(t-a)^2}, \quad t \geq 0, \quad a > 0,$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses).

(a) Calcula a sabiendo que inicialmente había 1700 individuos, esto es $P(0) = 1.7$.

(b) ¿En qué momento la población aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿Cuándo alcanza un mínimo?

(c) ¿A qué tiende la población en el futuro?

a) Tenemos que ver para qué valor de a se tiene

$$P(0) = 1.7 \text{ (1700 individuos)}$$

$$1.7 = 1 + \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1+2a^2}{1+a^2} \iff 1.7 + 1.7a^2 = 1 + 2a^2 \iff 0.7 = 0.3a^2 \iff \boxed{a = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1.53}$$

b) Para ver cuándo la población aumenta/disminuye tenemos que estudiar el signo de $P'(t)$:

$$P'(t) = \frac{2(t-a)(1+(t-a)^2) - 2(t-a)^3}{\left(1+(t-a)^2\right)^2} = \frac{2(t-a) + 2(t-a)^3 - 2(t-a)^3}{\left(1+(t-a)^2\right)^2} = \frac{2(t-a)}{\left(1+(t-a)^2\right)^2}$$

Se ve claramente que

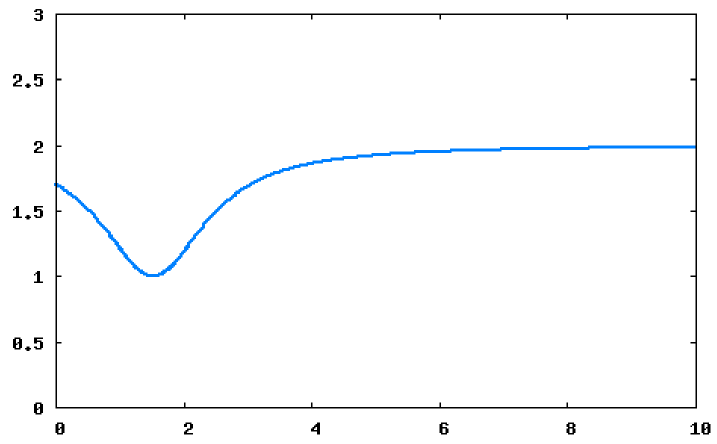
$$\begin{cases} P'(t) < 0 \text{ para } 0 \leq t < a \\ P'(t) > 0 \text{ para } t > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \text{ decrece en } [0, a) \\ P \text{ crece en } (a, +\infty) \end{cases}$$

Obviamente, P tiene en $t = a$ un mínimo relativo que es también su mínimo absoluto en $[0, +\infty)$.

c) Tenemos que calcular

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 1 + \frac{(t-a)^2}{1+(t-a)^2} = 1 + \lim_{t\to+\infty} \frac{(t-a)^2}{1+(t-a)^2} = 1 + \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1+1 = 2$$

Esto significa que la población tiene a estabilizarse en 2000 individuos



7. La población de cierta especie de pez que habita en un lago está dada por la siguiente función:

$$P(t) = A + \frac{t}{9}\, e^{1-\frac{t}{10}}, \quad t \geq 0,$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medido en miles) y t es el tiempo (medido en meses). Se pide:

a) Calcula el valor de A sabiendo que inicialmente el lago tiene 2000 peces.

b) ¿En qué momento la población de peces del lago alcanza su valor máximo? ¿Cuál es el valor de dicho máximo?

c) ¿A qué tiende la población en el futuro? ¿En algún momento la población desciende por debajo de la población inicial?

d) Esboza la gráfica de la función.

a) Tenemos que calcular para qué valor de A se tiene

$$P(0) = 2 \text{ (2000 individuos)} \iff \boxed{A=2}$$

b) El máximo absoluto de P en $[0,+\infty)$ sólo puede producirse en un máximo relativo o en el punto $t=0$. Veamos si P tiene algún máximo relativo:

$$P'(t) = \frac{1}{9}e^{1-\frac{t}{10}} - \frac{1}{10}\cdot\frac{t}{9}\,e^{1-\frac{t}{10}} = \frac{1}{9}\,e^{1-\frac{t}{10}}\left(1-\frac{t}{10}\right) = 0 \iff t = 10$$

Puesto que $\frac{1}{9}\,e^{1-\frac{t}{10}} > 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, se tiene claramente

$$\begin{cases} P'(t) > 0 \text{ si } t < 10 \\ P'(t) < 0 \text{ si } t > 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 10 \text{ es un máximo relativo de } P.$$

Pero también es su máximo absoluto en $[0,+\infty)$, ya que P es creciente en $[0,10)$ y decreciente en $(10,+\infty)$.

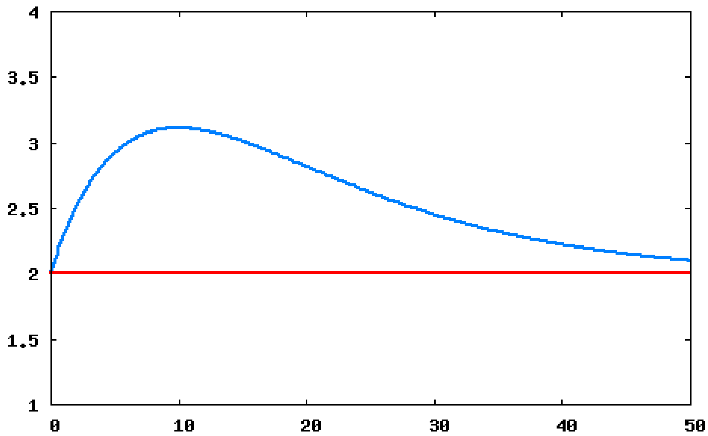
$\boxed{\text{El máximo absoluto de } P \text{ se obtiene en } t=10 \text{ y vale } P(10)\approx 3.11 \text{ (3110 peces)}}$.

c) Tenemos que calcular

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(2+\frac{t}{9}\,e^{1-\frac{t}{10}}\right) = 2+\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{9}\,e^{1-\frac{t}{10}} = 2+\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{9}\,\frac{e}{e^{t/10}} = 2$$

La función $P(t)$ tiende asintóticamente a 2, lo que significa que la población tiende a estabilizarse en 2000 peces y no desciende de este valor.

d)



8. La población de cierta especie que vive en un hábitat protegido sigue la siguiente función:

$$P(t) = A + 2\,\frac{t+1}{t^2+24}, \quad t\geq 0,$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medido en miles) y t es el tiempo (medido en años). Se pide:

a) Calcula el valor de A sabiendo que inicialmente hay 3000 individuos.

b) ¿En qué momento la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál es el valor de dicho máximo?

c) ¿A qué tiende la población en el futuro? ¿En algún momento la población desciende por debajo de la población inicial?

d) Esboza la gráfica de la función.

a) Utilizamos que $P(0) = 3$ (3000 individuos) para calcular A:

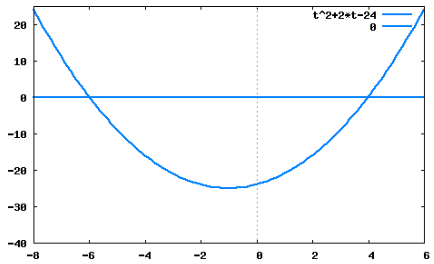
$$P(0) = A + \frac{2}{24} = 3 \iff A = 3 - \frac{2}{24} \iff \boxed{A = \frac{70}{24} \approx 2.92}$$

b) El máximo (absoluto) de $P(t)$ en el intervalo $(0,+\infty)$, que es abierto, sólo se puede producir en un máximo relativo. Veamos si $P(t)$ tiene alguno:

$$P'(t) = 2\,\frac{t^2+24-(t+1)2t}{(t^2+24)^2} = -2\,\frac{t^2+2t-24}{(t^2+24)^2} = 0 \iff t^2+2t-24 = 0 \iff \begin{cases} t=-6 \\ t=4 \end{cases}$$

Vemos que el único punto crítico en el intervalo $(0,\infty)$ es $t=4$. Veamos si se trata de un máximo relativo estudiando el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto $t=4$:

El signo de $P'(t) = -2\,\dfrac{t^2+2t-24}{(t^2+24)^2}$ es el opuesto al signo de $t^2+2t-24 = (t+6)(t-4)$, cuya gráfica es una parábola convexa.



Por consiguiente,

$$\begin{cases} t^2+2t-24<0 \text{ en } (0,4) \\ t^2+2t-24>0 \text{ en } (4,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'(t)>0 \text{ en } (0,4) \\ P'(t)<0 \text{ en } (4,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \text{ es creciente en } (0,4) \\ P \text{ es decreciente en } (4,+\infty) \end{cases}$$

lo que demuestra que P tiene un máximo relativo en $t=4$. Este máximo relativo es también máximo absoluto debido a que P es creciente en $(0,4)$ y decreciente en $(4,+\infty)$.

Luego, efectivamente, $\boxed{P \text{ tiene un máximo absoluto en el punto } t=4}$

El valor de P en dicho punto es $\boxed{P(4)=\dfrac{38}{12}\approx 3.124}$.

c) Para saber a qué tiende la población en el futuro calculamos

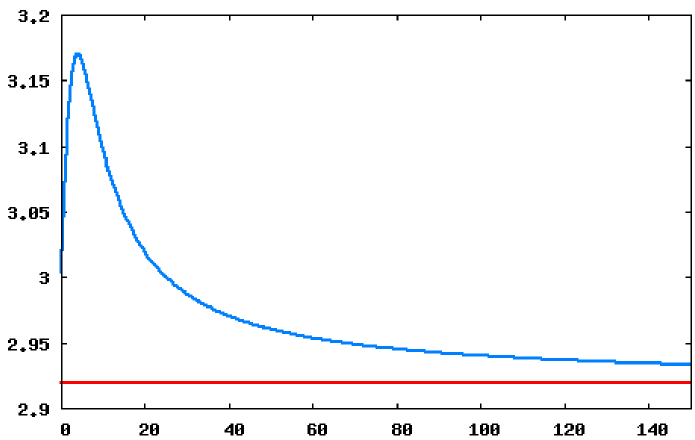
$$\lim_{t\to\infty}\left(A+2\,\frac{t+1}{t^2+24}\right)=A+2\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t^2+24}=A=2.92$$

Es decir, $\boxed{\text{La población tiende asintóticamente 2.92 (2920 individuos)}}$

La población inicial es de 3000 individuos, es decir, $P(0)=3$. Hemos visto que, cuando $t\to\infty$, P tiende asintóticamente a 2.92. Lo cual significa que que, para t suficientemente grande, P toma valores tan próximos a 2.92 como se quiera. Obviamente, hay puntos en los que P toma valores menores que 3.

$\boxed{\text{La población desciende del valor inicial}}$.

d)



9. La población de una especie de insectos, tras la eclosión de los huevos puestos, sigue la siguiente función

$$P(t)=t^2\,e^{-at},$$

donde $t \geq 0$ ($t = 0$ es el momento de la eclosión), siendo $P(t)$ el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en días).

a) Calcula a sabiendo que para $t = 1$ había 700 individuos.

b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?

c) ¿A qué tiende la población en el futuro?

d) Esboza la gráfica de la función.

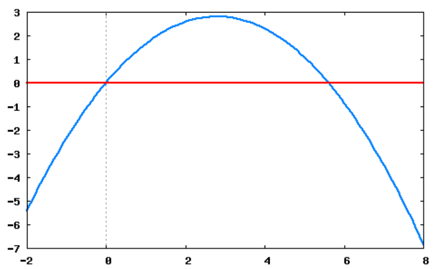
a) Utilizamos que $P(1) = 0.7$ (700 individuos) para calcular a:

$$P(1) = e^{-a} = 0.7 \iff -a = \ln(0.7) \iff \boxed{a = -\ln(0.7) \approx 0.36}$$

b) El máximo (absoluto) de $P(t)$ en el intervalo $[0, +\infty)$ sólo se puede producir en un máximo relativo o en $t = 0$ (extremo del intervalo incluido en el mismo). Vamos a calcular los máximos relativos (si existen) de $P(t)$:

$$P'(t) = 2te^{-at} - at^2e^{-at} = (2 - at)te^{-at} = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \text{o bien} \\ 2 - at = 0 \iff t = \dfrac{2}{a} \approx 5.6 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $P'(t)$ para saber dónde P es creciente/decreciente: puesto que e^{-at} es siempre positivo, el signo de $P'(t)$ coincide con el signo de $(2 - at)t = 2t - at^2$, cuya gráfica, puesto que $a > 0$, es una parábola cóncava que se anula en $t = 0$ y en $t = 2/a \approx 5.6$:



Por consiguiente:

$$\begin{cases} P'(t) > 0 \text{ en } (0, 5.6) \\ P'(t) < 0 \text{ en } (5.6, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \text{ es creciente en } (0, 5.6) \\ P \text{ es decreciente en } (5.6, +\infty) \end{cases}$$

En consecuencia, P tiene un máximo relativo en $t = 5.6$.

$$P(5.6) = (5.6)^2\, e^{-0.36\times 5.6} \approx 4.18 > 0 = P(0)$$

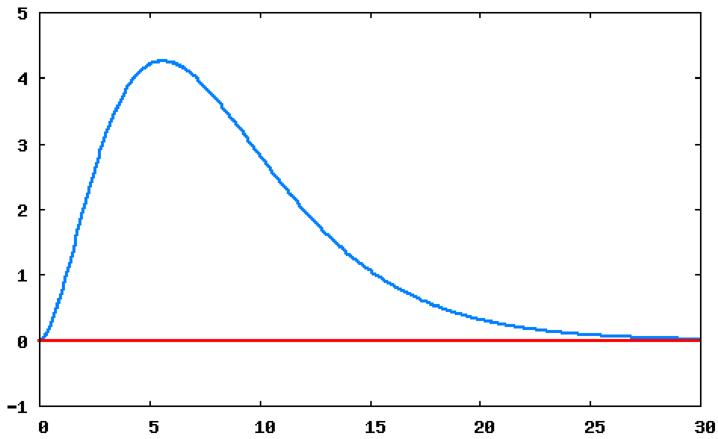
Está claro, pues, que $\boxed{t = 5.6 \text{ es el máximo absoluto de } P \text{ en } [0, +\infty)}$ y que $\boxed{P(5.6) \approx 4.18}$.

c) Para saber a qué tiende la población en el futuro calculamos

$$\lim_{t\to\infty} t^2\, e^{-at} = (\infty \times 0) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{-at}} = (LH) = 0$$

Es decir, $P(t)$ tiende asintóticamente a cero cuenado $t \to +\infty$, lo que significa que $\boxed{\text{la población tiende a la extinción}}$.

d)



10. Representar gráficamente la función siguiente, estudiando previamente dominio de definición, cortes con los ejes, asíntotas, crecimiento / decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad / convexidad y puntos de inflexión:
$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

Dominio de definición: $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
Corte con el eje OY: $f(0) = 1$, luego la gráfica corta al eje OY en $(0, 1)$.
Corte con el eje OX: e^x es siempre positivo, luego la gráfica no corta al eje OX
Signo de la función: $\begin{cases} f(x) < 0 \text{ si } x+1 < 0 \text{ es decir, si } x < -1 \\ f(x) > 0 \text{ si } x+1 > 0 \text{ es decir, si } x > -1 \end{cases}$
Asíntotas horizontales:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$$
Es decir, $y = 0$ es asíntota horizontal de f, para $x \to -\infty$.
Asíntotas verticales: la única posible asíntota vertical es la recta $x = -1$, ya que este es el único punto de discontinuidad de la función:
$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{e^x}{x+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{e^x}{x+1} = +\infty$$
Asíntotas oblicuas: sólo podría haberla para $x \to +\infty$, ya que para $x \to -\infty$ hay una asíntota horizontal. Si existe, será una recta $y = mx + n$ con
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{no hay asíntota oblicua.}$$
Derivada:
$$f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$
que solo se anula para $x = 0$ que es, por lo tanto, el único punto crítico.
Crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada. El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo, luego el signo de la derivada coincide con el signo de xe^x, que, a su vez, coincide con el signo de x:
$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (-1, 0) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (0, +\infty) \end{cases} \quad \text{y por lo tanto que} \quad \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty, -1) \\ f \text{ es decreciente en } (-1, 0) \\ f \text{ es creciente en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior, puesto que f es continua en $x = 0$ y pasa de ser decreciente a ser creciente en dicho punto, se tiene que f tiene un mínimo en $x = 0$, en el cual $f(0) = 1$.
Derivada segunda:

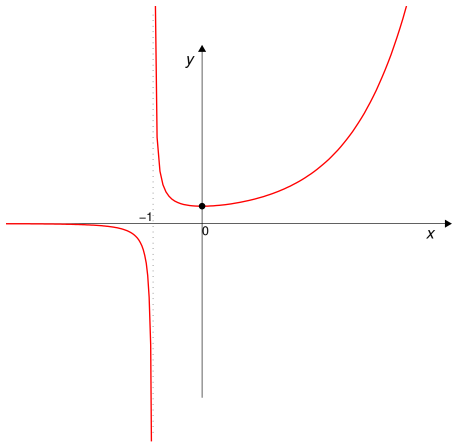
$$f''(x) = \frac{(xe^x + e^x)\,(x+1)^2 - 2xe^x(x+1)}{(x+1)^4} = e^x\,\frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^3} = e^x\,\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$$

que no se anula en ningún punto, ya que tanto e^x como $x^2 + 1$ son siempre positivos.

Convexidad y concavidad: estudiamos el signo de la derivada segunda. Puesto que el numerador $e^x(x^2 + 1)$ es siempre positivo, el signo de $f''(x)$ coincide con el signo del denominador, $(x + 1)^3$. Así, se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ en } (-\infty,-1) \\ f''(x) > 0 \text{ en } (-1,+\infty) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ es cóncava en } (-\infty,-1) \\ f \text{ es convexa en } (-1,+\infty) \end{array}\right.$$

No hay puntos de inflexión.



11. Representar gráficamente la función siguiente, estudiando previamente su dominio de definición, los cortes con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

Dominio de definición: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que la función no está definida en $x = 0$.
Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \ln x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1}$.
Signo de la función: $\left\{\begin{array}{l} f(x) < 0 \text{ si } 1 + \ln x < 0 \text{ es decir, si } x < e^{-1} \\ f(x) > 0 \text{ si } 1 + \ln x > 0 \text{ es decir, si } x > e^{-1} \end{array}\right.$
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x^2} \overset{[LH]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Es decir, $y = 0$ es asíntota horizontal de f, para $x \to +\infty$.
Asíntotas verticales: la única posible asíntota vertical es la recta $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas: no hay, ya que para $x \to +\infty$ f tiene una asíntota horizontal.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$$

que solo se anula para $x = e^{-1/2}$ que es, por lo tanto, el único punto crítico.
Crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada. El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo en $(0, +\infty)$, luego el signo de la derivada coincide con el signo de $-1 - 2\ln x$:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ en } (0, e^{-1/2}) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (e^{-1/2}, +\infty) \end{array}\right. \quad \text{y por lo tanto que} \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ es creciente en } (0, e^{-1/2}) \\ f \text{ es decreciente en } (e^{-1/2}, +\infty) \end{array}\right.$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior, puesto que f es continua en $x = e^{-1/2}$ y pasa de ser creciente a ser decreciente en dicho punto, se tiene que f tiene un máximo en $x = e^{-1/2}$.

Derivada segunda:

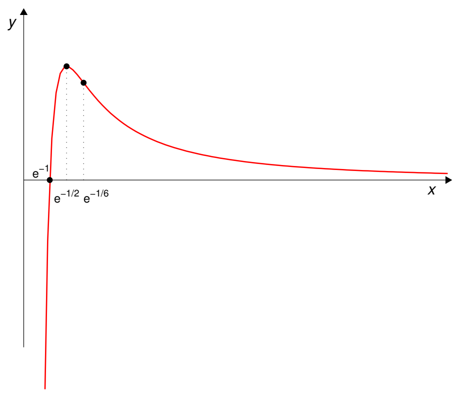
$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x}x^3 + (1+2\ln x)3x^2}{x^6} = \frac{-2+3(1+2\ln x)}{x^4} = \frac{1+6\ln x}{x^4}$$

que sólo se anula si $1+6\ln x = 0$, es decir, para $x = e^{-1/6}$.

Convexidad y concavidad: estudiamos el signo de la derivada segunda. Puesto que el denominador x^4 es siempre positivo, el signo de $f''(x)$ coincide con el signo de su numerador, $1+6\ln x$. Así, se tiene

$$\begin{cases} f''(x) < 0 \text{ en } (0, e^{-1/6}) \\ f''(x) > 0 \text{ en } (e^{-1/6}, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ es cóncava en } (0, e^{-1/6}) \\ f \text{ es convexa en } (e^{-1/6}, +\infty) \end{cases}$$

Obviamente, en $x = e^{-1/6}$ la función tiene un punto de inflexión.



12. Representar gráficamente la función siguiente, estudiando previamente su dominio de definición, los cortes con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{e^{x-1}}$$

Dominio de definición: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ya que e^{x-1} no se anula.

Corte con el eje OY: $f(0) = \dfrac{3}{e^{-1}} = 3e$, luego la gráfica corta al eje OY en el punto $(0, 3e)$.

Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ó $x = 1$.

Signo de la función: el denominador es siempre positivo y el numerador puede escribir factorizado $x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$, de donde se deduce facilmente que $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 1) \\ f(x) < 0 \text{ en } (1, 3) \\ f(x) > 0 \text{ en } (3, +\infty) \end{cases}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{x-1}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{x-1}} = \frac{+\infty}{+\infty} = (\text{LH 2 veces}) = 0$$

Es decir, f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, para $x \to \pm\infty$.

Asíntotas verticales: no hay, ya que f es continua en $\mathbb{R}$.

Asíntotas oblicuas: no hay.

Derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot e^{x-1} - (x^2-4x+3)\cdot e^{x-1}}{(e^{x-1})^2} = \frac{(2x-4)-(x^2-4x+3)}{e^{x-1}} = \frac{-x^2+6x-7}{e^{x-1}} =$$

que se anula si $-x^2+6x-7 = 0$, esto es, para $x = 3-\sqrt{2}$ y para $x = 3+\sqrt{2}$.

Crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada. El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo. El polinomio del numerador cambia de signo en $x = 3-\sqrt{2}$ y en $x = 3+\sqrt{2}$, y se puede ver que

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 3-\sqrt{2}) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (3+\sqrt{2}, +\infty) \end{cases} \quad \text{y por lo tanto que} \quad \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty, 3-\sqrt{2}) \\ f \text{ es creciente en } (3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}) \\ f \text{ es decreciente en } (3+\sqrt{2}, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior, se tiene que f tiene un mínimo local en $x = 3-\sqrt{2}$ y un máximo local en $x = 3+\sqrt{2}$.

Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 8x + 13}{e^{x-1}}$$

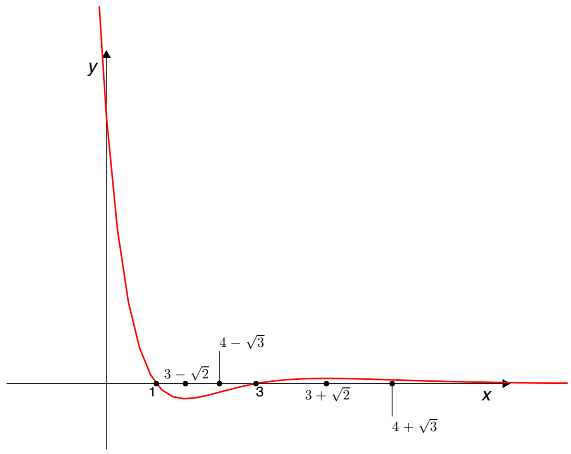
que se anula en $x = 4 - \sqrt{3}$ y en $x = 4 + \sqrt{3}$.

Convexidad y concavidad: estudiamos el signo de la derivada segunda. Puesto que el denominador es siempre positivo, el signo de $f''(x)$ depende del signo de su numerador, $x^2 - 8x + 13$, y se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 4-\sqrt{3}) \\ f''(x) < 0 \text{ en } (4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}) \\ f''(x) > 0 \text{ en } (, 4+\sqrt{3}, +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ es convexa en } (-\infty, 4-\sqrt{3}) \\ f \text{ es cóncava en } (4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}) \\ f \text{ es convexa en } (, 4+\sqrt{3}, +\infty) \end{array}\right.$$

Obviamente, en $x = 4 - \sqrt{3}$ y $x = 4 + \sqrt{3}$ son puntos de inflexión.



Ejercicios del Tema 2: Modelos discretos en Biología

13. La dinámica de una determinada población de mamíferos (medida en miles) que habita un parque natural viene dada por el *modelo de Ricker*:

$$x_n = x_{n-1}e^{r\left(1-\frac{x_{n-1}}{K}\right)}, \quad n \geq 1$$

con parámetro de crecimiento $r = 0.4$ y capacidad de alojamiento $K = 5$ (miles). Se pide:

a) Si la población inicial de mamíferos es $x_0 = 3.5$, ¿cuál es la población tras dos periodos de reproducción?

b) Calcula los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.

c) Interpreta biológicamente los resultados.

1. Calculamos x_1 y x_2, a partir de $x_0 = 3.5$:
   $x_1 = x_0 e^{r\left(1-\frac{x_0}{K}\right)} = 3.5e^{0.4\left(1-\frac{3.5}{5}\right)} \approx 3.946$
   $x_2 = x_1 e^{r\left(1-\frac{x_1}{K}\right)} = 3.946e^{0.4\left(1-\frac{3.946}{5}\right)} \approx 4.293$
   Esto es, tras un periodo reproductivo habrá 3946 ejemplares y después de dos habrá 4293.

2. Los puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación $x = f(x)$ con $f(x) = xe^{r(1-x/K)}$

$$x = xe^{r(1-x/K)} \iff x\big(1 - e^{r(1-x/K)}\big) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ o bien} \\ e^{r(1-x/K)} = 1 \iff 1 - \dfrac{x}{K} = 0 \iff x = K \end{cases}$$

   $\boxed{\text{Los puntos de equilibrio son } x_1^\star = 0 \text{ y } x_2^\star = K = 5}$

   Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio calculamos en primer lugar la derivada de f

$$f'(x) = e^{r(1-x/K)} + x\Big(\frac{-r}{K}\Big)e^{r(1-x/K)} = \Big(1 - \frac{rx}{K}\Big)e^{r(1-x/K)}$$

   - $f'(x_1^\star) = f'(0) = (1-0)e^r = e^r > 1$ (porque $r > 0$), luego el punto de equilibrio $\boxed{x_1^\star = 0 \text{ es inestable}}$
   - $f'(x_2^\star) = f'(5) = \big(1 - \dfrac{2}{5}\big)\, e^{r(1-5/5)} = \dfrac{3}{5}$, luego el punto de equilibrio $\boxed{x_2^\star = 5 \text{ es estable}}$

3. - $x_1^\star = 0$ es un punto de equilibrio inestable: Esto significa que si inicialmente hay 0 individuos, seguirá habiendo 0 individuos para todo tiempo posterior. El hecho de que sea inestable indica que, si se inicia el modelo con un número $x_0 \neq 0$, aunque sea próximo, el sistema evolucionará alejándose de 0.

- $x_2^\star = 5$ es un punto de equilibrio estable: Esto significa que, si inicialmente hay 5000 individuos, la población se mantiene en equilibrio en dicho valor (recuérdese que esa es la capacidad de alojamiento). Este punto de equilibrio es estable, lo que significa que si se comienza con un valor próximo a $K = 5$, aunque distinto, el sistema evolucionará acercándose al punto de equilibrio.

14. La dinámica de una población de peces sometidos a una pesca severa sigue el siguiente modelo discreto

$$x_{n+1} = x_n + 2x_n\big(1 - \frac{x_n}{4}\big) - 1,$$

donde x_n es el número de peces (medido en miles) en el año n.

a) Si $x_0 = 2$, ¿cuál es el valor de x_2?

b) Calcula sus puntos de equilibrio y estudia su estabilidad.

c) Interpreta biológicamente los resultados.

1. $x_1 = x_0 + 2x_0\big(1 - \frac{x_0}{4}\big) - 1 = 2 + 4\big(1 - \frac{2}{4}\big) - 1 = 3$

   $x_2 = x_1 + 2x_1\big(1 - \frac{x_1}{4}\big) - 1 = 3 + 6\big(1 - \frac{3}{4}\big) - 1 = 3.5$

2. Tenemos que resolver la ecuación $x = f(x)$ con $f(x) = x + 2x\big(1 - \frac{x}{4}\big) - 1$:

$$x = x + 2x\big(1 - \frac{x}{4}\big) - 1 \iff 2x\big(1 - \frac{x}{4}\big) - 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \approx 0.58 \\ \text{o bien} \\ x = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41 \end{cases}$$

   $\boxed{\text{Los puntos de equilibrio son } x_1^\star = 0.58 \text{ y } x_2^\star = 3.41 \text{ (valores aproximados)}}$.

   Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio necesitamos calcular la derivada de f:

$$f'(x) = 3 - x.$$

   Se tiene:

$$\begin{cases} f'(x_1^\star) = 3 - 0.58 = 2.48 > 1 \Longrightarrow \boxed{x_1^\star = 0.58 \text{ es localmente inestable}} \\ f'(x_2^\star) = 3 - 3.41 = -0.41; \quad |f'(x_2^\star)| < 1 \Longrightarrow \boxed{x_2^\star = 3.41 \text{ es localmente estable}} \end{cases}$$

3. Desde el punto de vista biológico, que $x_1^\star = 0.58$ y $x_2^\star = 3.41$ sean puntos de equilibrio significa que si el sistema se inicia con estos valores, permanece constante, es decir el número de individuos de la población no cambiará en el tiempo. En efecto, si se comienza con $x_0 = 0.58$ (miles de peces),

$$x_0 = 0.58, \quad x_1 = x_0 + 2x_0\big(1 - \frac{x_0}{4}\big) - 1 = 0.58 + 2 \times 0.58\big(1 - \frac{0.58}{4}\big) - 1 = 0.58, \quad \text{etc.}$$

   Análogamente, si se comienza con $x_0 = 3.41$ (miles de peces),

$$x_0 = 3.41, \quad x_1 = x_0 + 2x_0\big(1 - \frac{x_0}{4}\big) - 1 = 3.41 + 2 \times 3.41\big(1 - \frac{3.41}{4}\big) - 1 = 3.41, \quad \text{etc.}$$

   Que el punto de equilibrio $x_2^\star = 3.41$ sea localmente estable quiere decir que, si iniciamos el sistema con un valor $x_0 \neq 3.41$, pero próximo, el sistema evolucionará acercándose a este valor.

   Por el contrario, que el punto de equilibrio $x_2^\star = 0.58$ sea localmente inestable significa que, si comenzamos con un valor $x_0 \neq 0.58$, por muy próximo que sea, el sistema evolucionará alejándose del valor 0.58.

15. El tamaño de una población de insectos (medida en millones) sigue una dinámica dada por la *curva de reclutamiento de Beverton-Holt*:

$$x_k = \frac{R x_{k-1}}{1 + \dfrac{R-1}{K} x_{k-1}},$$

con constante de crecimiento $R = 1.4$ y capacidad de alojamiento $K = 10$ (millones). Se pide:

a) Si la población inicial de insectos es $x_0 = 4.5$, ¿cuál es la población tras dos periodos de reproducción?

b) Calcula los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.

c) Interpreta biológicamente los resultados.

1. Pongamos

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + \dfrac{R-1}{K}x} = \frac{1.4\,x}{1 + \dfrac{1.4-1}{10}x} = \frac{1.4\,x}{1 + 0.04x}$$

A partir de $x_0 = 4.5$, calculamos x_1 y x_2:

$$x_1 = f(x_0) = f(4.5) = \frac{1.4 \times 4.5}{1 + 0.04 \times 4.5} \approx 5.3390$$

$$x_2 = f(x_1) = f(5.3390) = \frac{1.4 \times 5.339}{1 + 0.04 \times 5.339} \approx 6.1592$$

2. Tenemos que resolver la ecuación $x = f(x)$ con $f(x) = \dfrac{1.4\,x}{1 + 0.04x}$:

$$x = \frac{1.4\,x}{1+0.04x} \iff x\Big(1 - \frac{1.4}{1+0.04\,x}\Big) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ \dfrac{1.4}{1+0.04\,x} = 1 \iff x = 10 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Los puntos de equilibrio son } x_1^\star = 0 \text{ y } x_2^\star = 10}$.

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio calculamos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{1.4(1+0.04\,x) - 1.4 \times 0.04\,x}{(1+0.04\,x)^2} = \frac{1.4}{(1+0.04\,x)^2}$$

Se tiene:

$$\begin{cases} f'(x_1^\star) = f'(0) = 1.4 > 1 \Longrightarrow \boxed{x_1^\star = 0 \text{ es inestable}} \\ f'(x_2^\star) = f'(10) = \dfrac{1}{1.4} < 1 \Longrightarrow \boxed{x_2^\star = 10 \text{ es estable}} \end{cases}$$

3. La interpretación biológica de estos resultados es la siguiente:

Si se inicia el sistema con $x_0 = x_1^\star = 0$ individuos, obviamente se mantiene constante igual a cero: no hay población. Pero, que sea un equilibrio inestable significa que si comenzamos con un valor de x_0 distinto de 0, aunque sea próximo, el sistema evolucionará alejándose del valor 0.

Por otra parte, si iniciamos con $x_0 = x_2^\star = 10$ (millones de individuos) también se mantendrá constante e igual a esa cantidad. Pero, como además es estable, si comenzamos con otro valor de x_0, el sistema tenderá asintóticamente a ese equilibrio, es decir, la población tenderá asintóticamente a 10 millones.

16. En una cierta colonia de focas, cuyas hembras se han clasificado en 3 grupos de edad, se han observado las siguientes tasas de supervivencia: un 60 % de las hembras de edad 0 sobrevive hasta la edad 1, mientras que un 85 % de estas últimas lo hace hasta la edad 2. Ninguna sobrevive más allá de la edad 2.

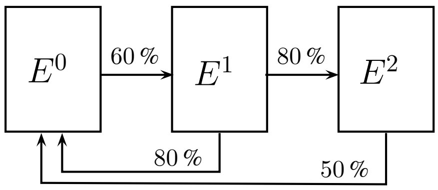
    Por otra parte, se ha estimado que las hembras de edad 1 tienen una tasa de fecundidad del 80 % (es decir, tienen de media 80 cachorros por cada 100 hembras), mientras que las de edad 2 tienen una tasa del 50 %.

    a) Escribir la matriz de Leslie asociada a estos datos.

    b) Partiendo de una población inicial de 100 focas de edad 0, de 60 de edad 1 y de 50 de edad 2, calcula el número de focas de edad 2 que habrá tras 2 períodos de observación.

    c) En una visita a la colonia se recuentan 85, 85 y 60 focas de edades respectivas 0, 1 y 2. ¿Qué distribución por edades se puede suponer que hubo en el período anterior?

1. Denotemos E^0, E^1 y E^2 a las tres clases de edad. Los datos que nos dan se reflejan en el siguiente esquema:



   Escribamos estas relaciones en forma de ecuaciones y en forma matricial:

$$\begin{aligned} E^0_{k+1} &= 0.8E^1_k + 0.5E^2_k \\ E^1_{k+1} &= 0.6E^0_k \\ E^2_{k+1} &= 0.85E^1_k \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} E^0_{k+1} \\ E^1_{k+1} \\ E^2_{k+1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} E^0_k \\ E^1_k \\ E^2_k \end{pmatrix}$$

2. Calculemos, según el modelo anterior, la distribución de la población en los instantes de tiempo $k = 1$ y $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} E^0_1 \\ E^1_1 \\ E^2_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^0_0 \\ E^1_0 \\ E^2_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 60 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E^0_2 \\ E^1_2 \\ E^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^0_1 \\ E^1_1 \\ E^2_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 73 \\ 60 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73.5 \\ 43.8 \\ 51 \end{pmatrix}$$

   $\boxed{\text{Tras 2 periodos de observación habrá 51 focas de edad 2}}$

3. Supongamos que la visita a la colonia se produce en el instante de tiempo k, es decir, que

$$\begin{pmatrix} E^0_k \\ E^1_k \\ E^2_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix}$$

   Siguiendo el modelo, se tiene la siguiente relación entre la distribución de la población en el instante k y en el instante $k - 1$:

$$\begin{pmatrix} E_k^0 \\ E_k^1 \\ E_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k-1}^0 \\ E_{k-1}^1 \\ E_{k-1}^2 \end{pmatrix}$$

Es decir, la distribución de edades del periodo anterior viene dada por la solución de este sistema lineal de ecuaciones. De la última ecuación se tiene

$$0.85E_{k-1}^1 = 60 \iff E_{k-1}^1 = \frac{60}{0.85} = \frac{6000}{85} = 70.5882$$

De la segundo ecuación:

$$0.6E_{k-1}^0 = 85 \iff E_{k-1}^0 = \frac{85}{0.6} = \frac{850}{6} = 141.6667$$

Y de la primera ecuación:

$$0.8E_{k-1}^1 + 0.5E_{k-1}^2 = 85 \iff 0.5E_{k-1}^2 = 85 - 0.8E_{k-1}^1 = 85 - 0.8 \times 70.5882 = 28.5294$$
$$\iff E_{k-1}^2 = \frac{28.5294}{0.5} = 57.0588$$

Así pues, en el periodo de tiempo anterior al recuento, según el modelo, la población estaba distribuída de la siguiente forma

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_{k-1}^0 \\ E_{k-1}^1 \\ E_{k-1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 141.6667 \\ 70.5882 \\ 57.0588 \end{pmatrix}}$$

17. Supongamos que en una cierta población, cuyos individuos se han clasificado en 3 grupos de edad, la matriz de Leslie es de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Interpretar cada elemento de esta matriz.

b) Determinar lo que sucede si se realiza un seguimiento de una población durante dos estaciones reproductivas, comenzando con 1000 individuos de edad 0, con 100 de edad 1 y con 50 de edad 2.

1. Denotemos E^0, E^1 y E^2 las tres clases de edad.
   - ▷ La primera fila de la matriz de Leslie da cuenta de la reproducción de la población:
     - Por cada individuo de la clase E^0 nacen, en promedio, 2 nuevos individuos en cada estación reproductiva.
     - Por cada individuo de la clase E^1 nacen, en promedio, 5 nuevos individuos en cada estación reproductiva.
     - Por cada individuo de la clase E^2 nace, en promedio, 1 nuevo individuo en cada estación reproductiva.
   - ▷ La subdiagonal da cuenta de la supervivencia. En este caso indica que un 40 % de los individuos de edad E^0 consigue sobrevivir hasta el periodo vital siguiente y que un 70 % de los individuos de edad E^1 sobrevive hasta el siguiente periodo reproductivo.

- ▷ El resto de elementos de la matriz, que son nulos, indican que no hay otras interrelaciones entre las clases de edad.

2. Calculemos cuál será la distribución de los individuos en clases de edad en los dos periodos reproductivos siguientes, si partimos de la distribución inicial:

$$\begin{pmatrix} E_0^0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1^0 \\ E_1^1 \\ E_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0^0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 400 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_2^0 \\ E_2^1 \\ E_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^0 \\ E_1^1 \\ E_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2550 \\ 400 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7170 \\ 1020 \\ 280 \end{pmatrix}$$

18. Tenemos una población (de hembras) dividida en dos clases de edad, llamadas E^1 y E^2 respectivamente, y cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

(b) Calcula el autovalor dominante (principal) y un autovector asociado.

(c) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de las clases de edad.

1. El modelo de Leslie asociado a esta matriz es:

$$\begin{pmatrix} E_{k+1}^1 \\ E_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k^1 \\ E_k^1 \end{pmatrix}$$

Interpretación:

- ▷ La primera fila de la matriz de Leslie da cuenta de la reproducción de la población:
  - Los individuos de la clase E^1 se reproducen a una tasa de $2 = \frac{200}{100} = 200\,\%$, es decir, por cada 100 individuos de la clase E^1 nacen, en promedio, 200 nuevos individuos en cada periodo de tiempo.
  - Los individuos de la clase E^2 se reproducen a una tasa de $4 = \frac{400}{100} = 400\,\%$, es decir, en promedio, por cada 100 individuos de la clase E^2 nacen 400.
- ▷ La subdiagonal da cuenta de la supervivencia. En este caso indica que un 75 % de los individuos de edad E^1 consigue sobrevivir hasta el periodo vital siguiente.
- ▷ El 0 del último elemento de la diagonal significa que ningún individuo de la clase E^2 sobrevive más de un periodo vital.

2. Los autovalores son las soluciones de la ecuación:

$$\det(L - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0.75 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Vemos que $\lambda_1 = 3$ es un autovalor dominante, ya que $|3| > |-1| = 1$ y además es positivo.

Calculamos ahora un autovector asociado al autovalor dominante $\lambda_1 = 3$, es decir, calculamos una solución del sistema lineal de ecuaciones

$$(L - 3I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0.75 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata (como ya sabemos, por ser λ_3 un autovalor) de un sistema compatible indeterminado: las dos ecuaciones del sistema son equivalentes. De una cualquiera de ellas se tiene:

$$-v_1 + 4v_2 = 0 \iff v_1 = 4v_2 \iff \begin{cases} v_1 = 4\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \quad \text{para cualquier } \alpha \in \mathbb{R}$$

Luego un autovector es, por ejemplo, (eligiendo $\alpha = 1$) $\boxed{v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. Por teoría sabemos que $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \lambda_1 = 3$ siendo T_k la población total en el instante k: $T_k = E_k^1 + E_k^2$. Esto significa que, asintóticamente, $T_{k+1} \approx 3T_k$, es decir que, a largo plazo, la población se multiplica por 3 en cada periodo de tiempo. En consecuencia, la población crece indefinidamente (porque $3 > 1$).

   Por otra parte, también sabemos por teoría que las proporciones de las clases de edad frente al total verifican

$$\frac{E_k^1}{T_k} = \frac{E_k^1}{E_k^1 + E_k^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{v_1}{v_1 + v_2} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \approx 0.8$$
$$\frac{E_k^2}{T_k} = \frac{E_k^2}{E_k^1 + E_k^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5} \approx 0.2$$

   Es decir, a largo plazo, la clase de edad E^1 será el 80 % de la población mientras que la clase de edad E^2 será el 20 %.

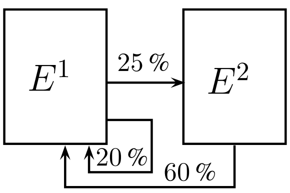
19. Tenemos una población dividida en dos clases de edad, llamadas E^1 y E^2 respectivamente. Se sabe que la cantidad de individuos nuevos en cada generación se obtiene a partir de un promedio de 0.2 veces el número de individuos de tipo E^1 y 0.6 veces el número de individuos de tipo E^2. Por otro lado, en el paso de una generación a otra, la probabilidad de supervivencia de la etapa E^1 hasta la etapa E^2 es del 25 %.

    (a) Construye la matriz de Leslie asociada al modelo.

    (b) Calcula el autovalor (dominante) principal y un autovector asociado.

    (c) Estudia el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de las clases de edad.

1. La información sobre la reproducción y la supervivencia que nos dan se reflejan en el siguiente esquema:



   Escribamos estas relaciones en forma de ecuaciones y en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_{k+1}^1 \\ E_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} E_k^1 \\ E_k^1 \end{pmatrix}$$

2. Los autovalores son las soluciones de la ecuación:

$$\det(L-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 0.2-\lambda & 0.6 \\ 0.25 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(0.2-\lambda) - 0.15 = \lambda^2 - 0.2\lambda - 0.15 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -0.3 \\ \lambda_2 = \quad 0.5 \end{cases}$$

Vemos que $\lambda_2 = 0.5$ es un autovalor dominante, ya que $0.5 > |-0.3| = 0.3$, y además es positivo.

Calculamos ahora un autovector asociado al autovalor dominante $\lambda_2 = 0.5$, es decir, calculamos una solución del sistema lineal de ecuaciones

$$(L-0.5I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.6 \\ 0.25 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata (como ya sabemos, por ser λ_3 un autovalor) de un sistema compatible indeterminado: las dos ecuaciones del sistema son equivalentes. De una cualquiera de ellas se tiene:

$$-0.3v_1 + 0.6v_2 = 0 \iff v_1 = 2v_2 \iff \begin{cases} v_1 = 2\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \quad \text{para cualquier } \alpha \in \mathbb{R}$$

Luego un autovector es, por ejemplo, (eligiendo $\alpha = 1$) $\boxed{v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. Por teoría sabemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \lambda_2 = 0.5$ siendo T_k la población total en el instante k: $T_k = E_k^1 + E_k^2$. Esto significa que, asintóticamente, $T_{k+1} \to 0.5\,T_k$, es decir que, a largo plazo, la población se multiplica por 0.5 en cada periodo de tiempo. En consecuencia, la población decrece a cero (porque $0.5 < 1$), esto es, tiende a la extinción.

Por otra parte, también sabemos por teoría que las proporciones de las clases de edad frente al total verifican

$$\frac{E_k^1}{T_k} = \frac{E_k^1}{E_k^1+E_k^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{v_1}{v_1+v_2} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$
$$\frac{E_k^2}{T_k} = \frac{E_k^2}{E_k^1+E_k^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

Es decir, a largo plazo, la clase de edad E^1 será el 67 % de la población mientras que la clase de edad E^2 será el 33 %.

20. Para estudiar la dinámica de una población de roedores, cuya vida media es de 6 meses, se divide la misma en tres grupos según su edad, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ y $E^{(3)}$, y se obtienen los siguientes datos sobre su fertilidad y supervivencia: Sólo un 17 % de los individuos de edad $E^{(1)}$ llegan a la edad $E^{(2)}$ y sólo un 24 % de los de edad $E^{(2)}$ llegan a la edad $E^{(3)}$. Además, un 5 % de los roedores de edad $E^{(3)}$ consiguen sobrevivir un periodo extra. Por otra parte, en promedio, la fertilidad del grupo $E^{(2)}$ es de 6 crías por individuo, mientras que la de la edad $E^{(3)}$ es de 3.

   a) Escribe la matriz de Leslie asociada a estos datos.

   b) Un grupo formado por sólo 100 individuos de edad $E^{(2)}$ ocupa un espacio en el que no había ningún roedor previamente. Calcula el número de individuos de cada edad que habrá en dicho espacio tras dos periodos de observación.

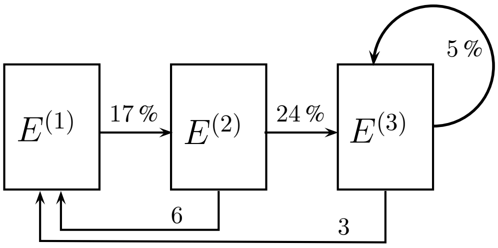
   c) En un recuento concreto, se observa que hay 900 roedores de edad $E^{(1)}$, 34 de edad $E^{(2)}$, y 29 de edad $E^{(3)}$. Calcula la distribución por edades que debió haber en el periodo anterior.

   d) Sabiendo que el autovalor principal, que es dominante, y un autovector principal de la matriz de Leslie son:

$$\lambda_p = 1.07, \qquad \overrightarrow{U_p} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0.16 \\ 0.04 \end{pmatrix},$$

calcula el comportamiento en el futuro de la población y la distribución estable de cada clase edad.

1.



$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

2. Los datos proporcionados corresponden a la condición inicial
$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Calculamos P_1 y P_2 aplicando dos veces la ecuación de recurrencia $P_k = LP_{k-1}$

Tiempo	Edad 1	Edad 2	Edad 3
k	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$E_k^{(3)}$
0	0	100	0
1	600	0	24
2	72	102	1.2

3. En este caso, en la relación de recurrencia entre P_k y P_{k-1}, $P_k = L\,P_{k-1}$, conocemos P_k y queremos calcular P_{k-1}. Para calcular el número de roedores en el período anterior, hay que resolver el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k-1}^{(1)} \\ E_{k-1}^{(2)} \\ E_{k-1}^{(3)} \end{pmatrix} = P_k = \begin{pmatrix} E_k^{(1)} \\ E_k^{(2)} \\ E_k^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 34 \\ 29 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6E_{k-1}^{(2)} + 3E_{k-1}^{(3)} & = 900 \\ 0.17E_{k-1}^{(1)} & = 34 \\ 0.24E_{k-1}^{(2)} + 0.05E_{k-1}^{(3)} & = 29 \end{cases}$$

De la segunda ecuación:
$$0.17\,E_{k-1}^{(1)} = 34 \Longrightarrow E_{k-1}^{(1)} = \frac{34}{0.17} = 200$$

De la primera ecuación:
$$6E_{k-1}^{(2)} + 3E_{k-1}^{(3)} = 900 \Longrightarrow E_{k-1}^{(3)} = \frac{900 - 6E_{k-1}^{(2)}}{3} = 300 - 2\,E_{k-1}^{(2)}$$

De la tercera, sustituyendo $E_{k-1}^{(3)}$:
$$\begin{aligned} 0.24\,E_{k-1}^{(2)} + 0.05\,E_{k-1}^{(3)} = 29 &\iff 0.24\,E_{k-1}^{(2)} + 0.05\big(300 - 2\,E_{k-1}^{(2)}\big) = 29 \\ &\iff 0.14\,E_{k-1}^{(2)} + 15 = 29 \\ &\iff E_{k-1}^{(2)} = 100 \end{aligned}$$

y, en consecuencia
$$E_{k-1}^{(3)} = 300 - 2\,E_{k-1}^{(2)} = 300 - 200 = 100$$

Luego, la generación anterior se componía de $\{200, 100, 100\}$ roedores respectivamente.

4. Como sabemos, por el Teorema 2.38, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_k}{T_{k-1}} = \lambda_p,$$

lo que significa que, para valores grandes de k, se tiene $T_k \approx \lambda_p T_{k-1}$; es decir, la población total, para tiempos grandes, se comporta según un modelo exponencial con constante de crecimiento $R = \lambda_p$. Como $\lambda_p > 1$, eso significa que la población total tiende a crecer indefinidamente.

El Teorema 2.38 también nos proporciona información sobre el comportamiento asintótico de las fracciones de las clases de edad con respecto al total. Concretamente:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E^{(1)}}{T_k} = \frac{0.99}{0.99 + 0.16 + 0.04} = 0.8319,$$

lo cual significa que, para tiempos suficientemente grandes, el grupo $E^{(1)}$ será el 83.19 % de la población total.

Análogamente, para los grupos $E^{(2)}$ y $E^{(3)}$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E^{(2)}}{T_k} = \frac{0.16}{0.99 + 0.16 + 0.04} = 0.1345,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E^{(3)}}{T_k} = \frac{0.04}{0.99 + 0.16 + 0.04} = 0.0336,$$

lo cual significa que, para tiempos suficientemente grandes, los grupos $E^{(2)}$ y $E^{(3)}$ constituirán, respectivamente, el 13.45 % y el 3.36 % de la población total.

21. Comprueba que (0,0) es un punto de equilibrio del modelo siguiente, y estudia su estabilidad:

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{y_{k-1}}{3(1+x_{k-1}^2)} \\ y_k = \dfrac{x_{k-1}}{1+y_{k-1}^2} \end{cases}, \quad k \geq 0.$$

Por definición, un punto de equilibrio es cualquier punto (x, y) que verifique:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{3(1+x^2)} = f(x,y) \\ y = \dfrac{x}{1+y^2} = g(x,y) \end{cases}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $x = 0$ e $y = 0$, resulta obvio que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.
Para analizar su estabilidad, debemos calcular los autovalores de la matriz jacobiana $J(0, 0)$.
Comenzamos por calcular las derivadas parciales de las funciones f y g:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-6xy}{9(1+x^2)^2} & \dfrac{1}{3(1+x^2)} \\ \dfrac{1}{1+y^2} & \dfrac{-2xy}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora los autovalores de $J(0, 0)$:

$$\det\big(J(0,0) - \lambda\, Id\big) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1/3 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1/3 = 0 \iff \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Puesto que ambos autovalores son, en módulo, menores que 1,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| < 1,$$

concluimos que el equilibrio nulo $(0,0)$ es estable.

22. Calcula los equilibrios biológicamente relevantes del modelo Nicholson-Bailey y analiza su estabilidad.

$$\begin{cases} x_k = 2\,x_{k-1}\,e^{-0.1y_{k-1}}, \\ y_k = 2\,x_{k-1}\left(1 - e^{-0.1y_{k-1}}\right). \end{cases}$$

Por definición, un punto de equilibrio es cualquier punto (x,y) que verifique:

$$\begin{cases} x = 2xe^{-0.1y} & = f(x,y) \\ y = 2x\left(1 - e^{-0.1y}\right) & = g(x,y) \end{cases}$$

Se trata de un sistema (no lineal) de dos ecuaciones con dos incógnitas. Vamos a resolverlo despejando alguna de las variables en una de las ecuaciones y sustituyendo en la otra.
De la primera de las ecuaciones:

$$x = 2xe^{-0.1y} \iff x(1-2e^{-0.1y}) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \quad \text{o bien} \\ 1 = 2e^{-0.1y} \iff \dfrac{1}{2} = e^{-0.1y} \iff y = -10\,\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 10\ln(2) \end{cases}$$

Vemos pues que la primera ecuación se verfica si $x = 0$, o bien si $y = 10\ln(2)$.

En el primer caso, de la segunda de las ecuaciones se tiene, sustituyendo $x = 0$:

$$y = 2x\left(1 - e^{-0.1y}\right) = 0.$$

Es decir, $\boxed{(x,y) = (0,0) \text{ es un equilibrio}}$. Este equilibrio (trivial) no tiene ningún interés (no es relevante).

Para explorar el otro caso, sustituimos $y = 10\ln(2)$ en la segunda de las ecuaciones del sistema:

$$y = 2x\left(1 - e^{-0.1y}\right) \iff 10\ln(2) = 2x\left(1 - \frac{1}{2}\right) = x$$

Luego, $\boxed{(x,y) = \Big(10\ln(2),\ 10\ln(2)\Big) \approx (6.93, 6.93) \text{ es otro equilibrio}}$.

Para analizar su estabilidad, debemos calcular los autovalores de la matriz jacobiana $J\big(10\ln(2), 10\ln(2)\big)$.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-0.1y} & -0.2xe^{-0.1y} \\ 2\left(1 - e^{-0.1y}\right) & 0.2xe^{-0.1y} \end{pmatrix},$$

luego,

$$J(10\ln(2), 10\ln(2)) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{1}{2} & -\ln(2) \\ 2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) & \ln(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\ln(2) \\ 1 & \ln(2) \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora los autovalores de $J(10\ln(2), 10\ln(2))$:

$$\begin{aligned}
\det\Big(J(10\ln(2), 10\ln(2)) - \lambda\, Id\Big) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\ln(2) \\ 1 & \ln(2)-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(\ln(2)-\lambda) + \ln(2) \\
&= \lambda^2 - (1+\ln(2))\lambda + 2\ln(2) = 0
\end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado son:

$$\lambda = \frac{(1+\ln(2)) \pm \sqrt{(1+\ln(2))^2 - 8\ln(2)}}{2} = \frac{(1+\ln(2)) \pm \sqrt{1+\ln^2(2) - 4\ln(2)}}{2} \approx \frac{1.69 \pm \sqrt{-1.29}}{2}.$$

Como vemos, los autovalores son complejos conjugados. Utilizando la Observación 2.57 se tiene, puesto que $\big|2\ln(2)\big| = 1.386 > 1$, que ambos autovalores tienen módulo mayor que 1.

Luego $\boxed{\text{el equilibrio no trivial } \Big(10\ln(2),\ 10\ln(2)\Big) \approx (6.93, 6.93) \text{ es inestable}}$.

Ejercicios del Tema 3: Cálculo integral

23. Calcular la siguiente integral indefinida
$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \left[\begin{array}{lcl} u = \ln(x) & \Rightarrow & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{1}{x^2} & \Rightarrow & v = -\dfrac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}\Big(\ln(x) + 1\Big) + C$$

24. Calcular la siguiente integral indefinida
$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

Se trata de una integral racional que se resuelve escribiendo el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(x+1) + Bx; \qquad \left\{\begin{array}{rcrl} x = & 0 & \Rightarrow & A = 1 \\ x = & -1 & \Rightarrow & B = -1 \end{array}\right.$$

luego,

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

25. Calcula la siguiente integral indefinida:
$$\int \frac{\cos(t)\, \mathrm{sen}(t)}{(2+\cos(t))^2}\, dt$$

Esta integral se calcula haciendo un cambio de variable:

$$\int \frac{\cos(t)\,\mathrm{sen}(t)}{(2+\cos(t))^2}\, dt = \left[\begin{array}{ll} u & = \cos(t) \\ du & = -\,\mathrm{sen}(t)\, dt \end{array}\right] = \int \frac{-u}{(2+u)^2}\, du \overset{(*)}{=} \int \left(\frac{-1}{2+u} + \frac{2}{(2+u)^2}\right) dt =$$

$$-\ln|2+u| - \frac{2}{2+u} + C = -\ln\left|\frac{1}{2+u}\right| - \frac{2}{2+u} + C = -\ln\left|\frac{1}{2+\cos(t)}\right| - \frac{2}{2+\cos(t)} + C$$

(*) Reducción a suma de fracciones simples:

$$\frac{-u}{(2+u)^2} = \frac{A}{2+u} + \frac{B}{(2+u)^2} \Leftrightarrow -u = A(2+u) + B \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \Rightarrow 2 = B \\ u = 0 \Rightarrow 0 = 2A + 2 \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

es decir,

$$\frac{-u}{(2+u)^2} = \frac{-1}{2+u} + \frac{2}{(2+u)^2}$$

26. Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\ln(3x)}{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{\ln(3x)}{x^3}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(3x); & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{1}{x^3}; & v = \dfrac{-1}{2x^2} \end{array}\right] = \frac{-1}{2x^2}\ln(3x) + \int \frac{1}{2x^3}\,dx =$$

$$\frac{-1}{2x^2}\ln(3x) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2x^2}\right) + C = \frac{-1}{2x^2}\ln(3x) - \frac{1}{4x^2} + C = \frac{-(2\ln(3x)+1)}{4x^2} + C$$

27. Calcular la siguiente integral:

$$\int \ln(1+x^2)\,dx$$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(1+x^2); & u' = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ v' = 1; & v = x \end{array}\right] = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$x\ln(1+x^2) - \int 2 - \frac{2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C$$

28. Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+3e^x}\,dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+3e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array}\right] \overset{(*)}{=} \int \frac{t}{1+3t}\,dt = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{1/3}{3t+1}\right) dt =$$

$$\frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{1}{3t+1}\right) dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{3}\ln|3t+1|\right) + C = \boxed{\frac{1}{3}\left(e^x - \frac{1}{3}\ln|3e^x+1|\right) + C}$$

$(*)$ Obsérvese que $e^{2x}\,dx = e^x\,e^x\,dx = t\,dt$.

29. Calcular la siguiente integral:

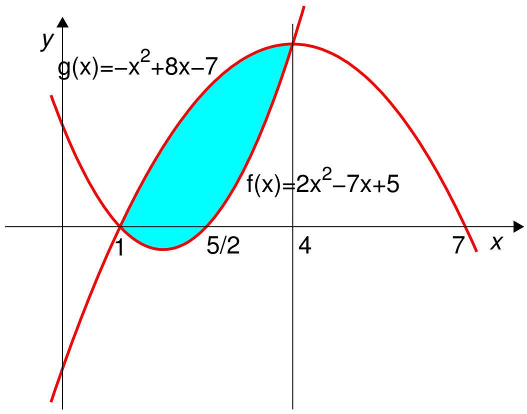
$$\int \frac{\ln x}{x(3+2\ln x)}\,dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x(3+2\ln x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\dfrac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int \frac{t}{3+2t}\,dt = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{3/2}{2t+3}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2t+3}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t-3\,\frac{1}{2}\,\ln|2t+3|\right)+C = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\,\ln|2\ln(x)+3|\right)+C}$$

30. Calcular el área encerrada por las gráficas de las parábolas

$$y = 2x^2-7x+5 \qquad \text{e} \qquad y=-x^2+8x-7$$



$y = 2x^2-7x+5 = f(x)$ es una parábola convexa. Sus puntos de corte con el eje OX son:

$$2x^2-7x+5=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=5/2 \end{array}\right.$$

$y=-x^2+8x-7=g(x)$ es una parábola cóncava. Sus puntos de corte con el eje OX son:

$$-x^2+8x-7=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Puntos de corte de las dos parábolas:

$$2x^2-7x+5=-x^2+8x-7 \;\Leftrightarrow\; 3x^2-15x+12=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

En consecuencia, al área que se pide será

$$A=\int_1^4 (g(x)-f(x))\,dx$$

Calculamos una primitiva de $g(x)-f(x)$:

$$\int (g(x)-f(x))\,dx = -\int (3x^2-15x+12)\,dx = -\left(x^3-\frac{15}{2}x^2+12x\right),$$

luego:

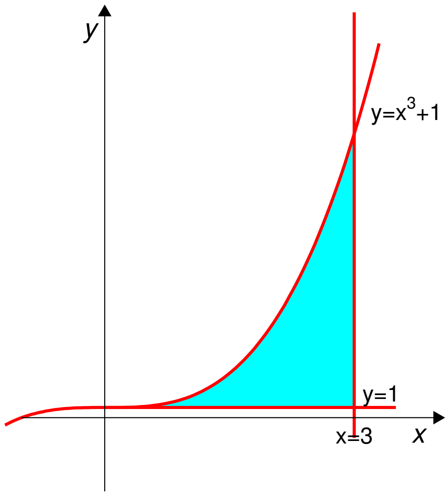
$$A=-\left[x^3-\frac{15}{2}x^2+12x\right]_1^4 = -\left[(64-120+48)-\left(1-\frac{15}{2}+12\right)\right] = -\left(-8-\frac{11}{2}\right)=\frac{27}{2}$$

Luego, finalmente,

$$\boxed{A=\frac{27}{2}}$$

31. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $y = x^3 + 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = 3$.

La curva $y = x^3 + 1$ corta a la recta $y = 1$ en un sólo punto: $(x, y) = (0, 1)$.



Además, en el intervalo $[0, 3]$, la curva $y = x^3 + 1$ está por encima de la recta $y = 1$ $(x^3 + 1 \geq 1 \ \forall \in [0, 3])$.

En consecuencia, el área que se desea calcular es:

$$A = \int_0^3 \left(x^3 + 1 - 1\right)\, dt = \int_0^3 x^3\, dx.$$

Una primitiva de x^3 es

$$\int x^3\, dx = \frac{1}{4}\, x^4$$

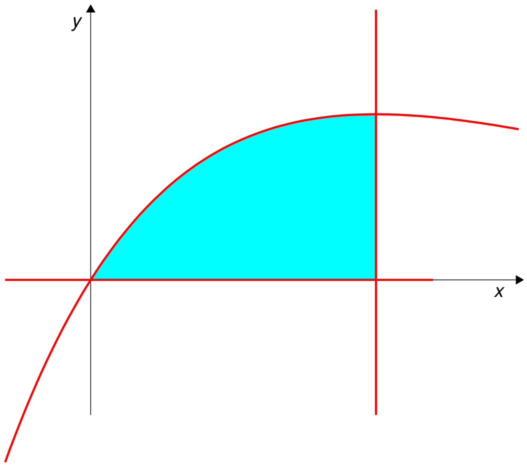
Por lo tanto,

$$A = \left[\frac{1}{4}\, x^4\right]_0^3 = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^3 = \frac{1}{4}\, 3^4 = \frac{81}{4} = 20.25$$

32. Calcula el área de la región limitada por la curva $y = x\, e^{-3x}$ y las rectas $x = \dfrac{1}{3}$ e $y = 0$.

La función $f(x) = xe^{-3x}$ es positiva en $(0, -\infty)$, negativa en $(-\infty, 0)$ y se anula en $x = 0$.
Luego la región delimitada es la mostrada en la figura y su área viene dada por:

$$A = \int_0^{1/3} xe^{-3x}\, dx$$



Calculamos en primer lugar una primitiva del integrando:

$$F(x) = \int xe^{-3x}\, dx$$

Esta integral indefinida se calcula por partes:

$$F(x) = \int xe^{-3x}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x; & u' = 1 \\ v' = e^{-3x}; & v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} \end{array}\right] = -\frac{1}{3}\, xe^{-3x} + \int \frac{1}{3}e^{-3x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\, xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} = -\frac{1}{3}\, e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Una vez calculada la primitiva, utilizamos la Regla de Barrow para calcular el valor de la integral definida:

$$A = \int_0^{1/3} xe^{-3x}\,dx = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \Big[F(x)\Big]_0^{1/3} = \left[-\frac{1}{3}\,e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]_0^{1/3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]_0^{1/3} = -\frac{1}{3}\left[e^{-1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) - e^0\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{9}\left[\frac{2}{e}-1\right] \approx 0.0294$$

33. Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las curvas:

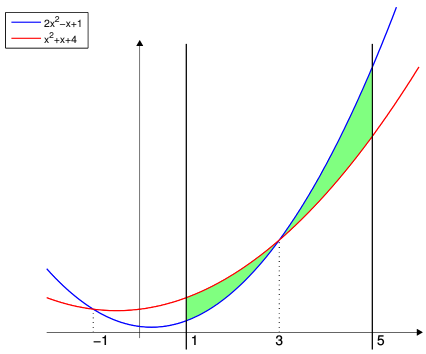
$$y = 2x^2 - x + 1, \quad y = x^2 + x + 4$$

y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 5$

Denotaremos $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + x + 4$
Se trata de dos parábolas convexas, ya que el coeficiente principal es, en ambos casos, positivo.
Para ver dónde se cortan planteamos la ecuación:

$$2x^2 - x + 1 = x^2 + x + 4 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

luego, en el intervalo $[1, 5]$, las dos parábolas se cortan en el punto de abscisa $x = 3$.
Es fácil ver que la situación es la que se refleja en la figura adjunta. En consecuencia,



$$A = \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx + \int_3^5 (f(x) - g(x))\,dx = A_1 + A_2$$

Calculamos una primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int \left(2x^2 - x + 1 - x^2 - x - 4\right)dx = \int \left(x^2 - 2x - 3\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

(Obviamente, una primitiva de $g(x) - f(x)$ es, entonces, $-F(x)$).

$$A_1 = \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx = \Big[-F(x)\Big]_1^3 = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \int_3^5 (f(x) - g(x))\,dx = \Big[F(x)\Big]_3^5 = \frac{32}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{48}{3} = \boxed{16}$$

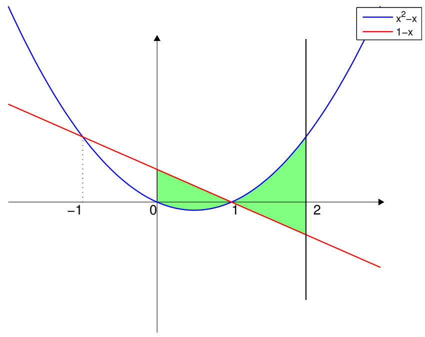
34. Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las curvas:

$$y = x^2 - x, \quad y = 1 - x$$

y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$

Denotaremos $f(x) = x^2 - x$, y $g(x) = 1 - x$.
Se trata, respectivamente, de una parábola convexa (ya que su coeficiente principal es positivo) y de una recta. Para ver dónde se cortan planteamos la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir,

$$x^2 - x = 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$



Luego, en el intervalo $[0, 2]$ ambas curvas sólo se cortan en el punto de abscisa $x = 1$, y es fácil ver que las gráficas son como en la figura adjunta. En consecuencia se tiene:

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = A_1 + A_2$$

Comenzamos por obtener una primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))dx = \int \left(x^2 - 1\right) dx = \frac{x^3}{3} - x$$

Obviamente, una primitiva de $g(x) - f(x)$ es, entonces, $-F(x)$. Se tiene, pues:

$$A_1 = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx = \Big[- F(x) \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = \Big[F(x) \Big]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{2}$$

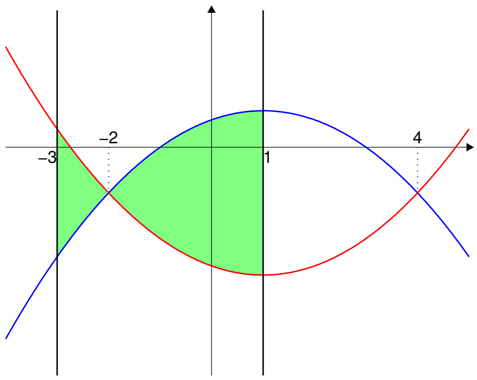
35. Calcula razonadamente el área de la figura plana limitada por las curvas

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 2x - 13$$

y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 1$.

La gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava (ya que su coeficiente principal es negativo) y la de $g(x)$, por el contrario es una parábola convexa. Para ver dónde se cortan planteamos la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x - 13 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$



Luego, en el intervalo $[-3, 1]$ ambas curvas sólo se cortan en el punto de abscisa $x = -2$, y es fácil ver que las gráficas son las de la figura. En consecuencia se tiene:

$$A = \int_{-3}^{-2} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = A_1 + A_2$$

Comenzamos por obtener una primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))dx = \int \left(-2x^2 + 4x + 16\right) dx = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 + 16x$$

Obviamente, una primitiva de $g(x) - f(x)$ es, entonces, $-F(x)$. Se tiene, pues:

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} (g(x) - f(x))dx = \Big[- F(x) \Big]_{-3}^{-2} = \frac{20}{3} \quad \text{y} \quad A_2 = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))dx = \Big[F(x) \Big]_{-2}^{1} = 36$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{20}{3} + 36 = \boxed{\frac{128}{3}}$$

36. Dada la función $\quad f(x) = x^2(e^x - 1)$

a) Estudiar su signo.

b) Calcular una primitiva.

c) Calcular, razonadamente, el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

a) Comenzamos por estudiar los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX. Para ello planteamos la ecuación:

$$x^2(e^x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \begin{cases} x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \\ \text{o bien} \\ e^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \end{cases}$$

Luego el único punto de corte es $x = 0$. Puesto que $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; e^x < 1 \;\Leftrightarrow\; x < 0 \\ f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; e^x > 1 \;\Leftrightarrow\; x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \\ f(x) > 0 \text{ en } (0, \infty) \end{cases}$$

b) Calculamos una primitiva de $f(x)$. Integramos por partes:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x^2(e^x - 1)\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2; & u' = 2x \\ v' = e^x - 1; & v = e^x - x \end{bmatrix} = x^2(e^x - x) - \int 2x(e^x - x)\,dx$$

La nueva integral que aparece también se calcula por partes:

$$\int 2x(e^x - x)\,dx = 2\int x(e^x - x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x; & u' = 1 \\ v' = e^x - x; & v = e^x - \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = 2\left[x\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) - \int \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) dx \right] =$$

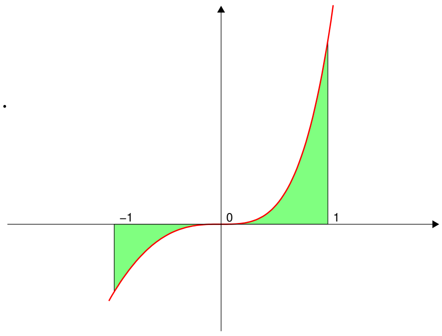
$$2x\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) - 2\int \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2x\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) - 2e^x + \frac{x^3}{3}$$

Luego, sustituyendo arriba se tiene:

$$F(x) = \int x^2(e^x - 1)\,dx = x^2(e^x - x) - \left[2x\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) - 2e^x + \frac{x^3}{3} \right] = x^2e^x - x^3 - 2xe^x + x^3 + 2e^x - \frac{x^3}{3} =$$

$$= \boxed{e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{x^3}{3}}$$

c) Del apartado a) se deduce que la región cuya área hay que calcular es la de la figura adjunta, y que por lo tanto su área es:



$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = -\Big[F(x)\Big]_{-1}^{0} + \Big[F(x)\Big]_{0}^{1} = A_1 + A_2.$$

$$A_1 = -\Big[F(x)\Big]_{-1}^{0} = -\left[F(0) - F(-1)\right] = F(-1) - F(0) = \frac{5}{e} - \frac{5}{3}$$

$$A_2 = \Big[F(x)\Big]_{0}^{1} = F(1) - F(0) = e - \frac{7}{3}$$

Luego finalmente,

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{e} - \frac{5}{3} + e - \frac{7}{3} = \boxed{\frac{5}{e} + e - 4 \approx 0.5577}$$

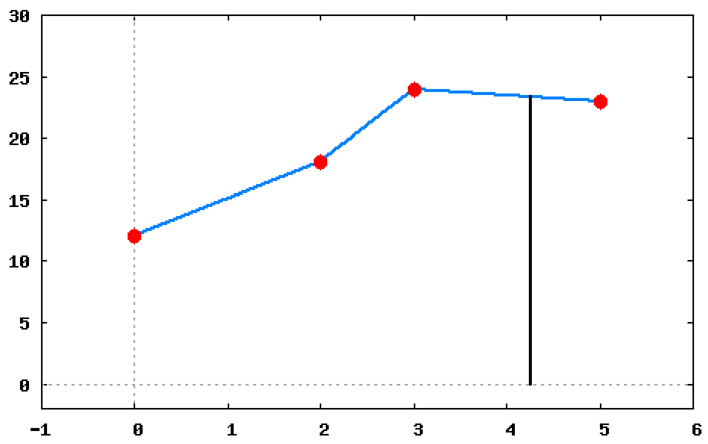
Ejercicios del Tema 4: Métodos numéricos

37. La medición de la temperatura de una habitación en un día proporcionó la siguiente tabla de valores:

Tiempo (horas)	x	0	2	3	5
Temperatura (Celsius)	y	12	18	24	23

Aproxima mediante interpolación lineal a trozos los datos anteriores, calculando la aproximación de la temperatura de la habitación a las 4 horas 15 minutos.

Puesto que la variable independiente x se mide en horas, tenemos que pasar el dato 4 horas 15 minutos a horas: $x = 4.25$ horas (15 minutos es la cuarta parte de una hora).
La interpolación lineal a trozos consiste en interpolar mediante la función polinómica obtenida al unir cada dos puntos consecutivos mediante una linea recta.
Para calcular el valor de esta función en $x = 4.25$ hay que comenzar determinando entre qué dos valores de x se encuentra: en este caso entre $x = 3$ y $x = 5$.



Ahora hay que calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, 24)$ y $(5, 23)$:

$$y = 24 + \frac{23-24}{5-3}(x-3) = 24 + \frac{-1}{2}(x-3) = 24 - \frac{x-3}{2}; \qquad \text{es decir: } y = 24 - \frac{x-3}{2}$$

La aproximación buscada es el valor de esta función en $x = 4.25$:

$$y(4.25) = 24 - \frac{4.25-3}{2} = 24 - \frac{1.25}{2} = \boxed{23.375}$$

38. Tras ser administrado, se ha medido la concentración en plasma de un fármaco en intervalos de cuatro horas, obteniéndose:

Tiempo	t	0	4	8	12	16	20	24
Concentración	C	0	18	32	23	10	4	0

Calcula una aproximación (mediante el método de los trapecios) de la cantidad total de fármaco absorbido por el organismo, es decir,

$$\int_0^{24} C(t)dt.$$

La fórmula de los trapecios para aproximar una integral definida es:

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2n}\Big[f(t_1)+2\sum_{k=2}^{n} f(t_k)+f(t_{n+1})\Big]$$

donde t_1, t_2, $\ldots t_{n+1}$ son $n+1$ puntos regularmente espaciados del intervalo $[a,b]$.
En este caso el intervalo es $[0,24]$ y $n=6$, ya que los 7 puntos dados forman 6 subintervalos de igual longitud $h=4$:

Tiempo	t	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
		0	4	8	12	16	20	24
Concentración	C	0	18	32	23	10	4	0

Luego se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} C(t)\,dt &\approx \frac{24-0}{2\times 6}\Big[C(t_1)+2\sum_{k=2}^{6} C(t_k)+C(t_{n+1})\Big]\\ &=\frac{24}{12}\Big[C(0)+2\Big(C(4)+C(8)+C(12)+C(16)+C(20)\Big)+C(24)\Big]\\ &=2\Big[0+2\Big(18+32+23+10+4\Big)+0\Big]=4\times 87=\boxed{348}\end{aligned}$$

39. La medición de la temperatura de una habitación en un día proporcionó la siguiente tabla de valores:

Tiempo (horas)	x	0	2	4	6
Temperatura (°C)	y	16	19	25	21

a) Utilizando interpolación lineal a trozos, calcula una aproximación de la temperatura de la habitación a las 3:30 horas.

b) Calcula una aproximación de la temperatura media (promedio integral) de la habitación en el intervalo de tiempo $[0,6]$, utilizando la fórmula de los trapecios.

a) Puesto que la variable independiente x se mide en horas, tenemos que pasar el dato 3 horas 30 minutos a horas: $x=3.50$ horas.

La interpolación lineal a trozos consiste en interpolar mediante la función polinómica obtenida al unir cada dos puntos consecutivos mediante una linea recta.

Para calcular el valor de esta función en $x=3.50$ hay que comenzar determinando entre qué dos valores de x se encuentra: en este caso entre $x=2$ y $x=4$.

Ahora hay que determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,19)$ y $(4,25)$:

$$y=19+\frac{25-19}{4-2}(x-2)=19+3(x-2)$$

La aproximación que buscamos es el valor de esta función en $x = 3.50$:

$$y = 19 + 3(3.50 - 2) = 19 + 3 \times 1.50 = 19 + 4.50 = \boxed{23.50}$$

b) El promedio integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

En este caso se quiere calcular

$$\bar{f} = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^6 f(x)\,dx$$

Aproximamos el valor de la integral en la fórmula anterior mediante la fórmula de los trapecios ($[a, b] = [0, 6]$, $n = 3$):

$$\int_0^6 f(x)\,dx \approx \frac{6-0}{2 \times 3}\Big(16 + 2 \times 19 + 2 \times 25 + 21\Big) = 125$$

de donde

$$\bar{f} \approx \frac{125}{6} = \boxed{20.8333}$$

40. La evolución en tiempo del número de individuos de cierta especie (medido en miles) sigue la ley $P_1(t) = t$, donde t es el tiempo (medido en años). La población de una especie competidora sigue la ley $P_2(t) = 2 - e^t$. Se considera que ambas especies tienen su supervivencia asegurada cuando coinciden en número.

    a) Mostrar razonadamente que el instante en que las especies coinciden en número tiene lugar entre $t = 0$ y $t = 1$.

    b) Aplicar el método de bisección para calcular aproximadamente el instante de coincidencia con un error menor que una décima.

a) El instante en que ambas especies coinciden corresponde al valor de t para el que se tiene

$$P_1(t) = P_2(t) \iff t = 2 - e^t \iff f(t) = t - 2 + e^t = 0$$

Se tiene:

$$f(0) = -2 + 1 = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1 - 2 + e = e - 1 > 0$$

lo que implica, por el Teorema de Bolzano, que f tiene al menos un cero en el intervalo $[0, 1]$.

Además, puesto que $f'(t) = 1 + e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la función f es monótona creciente, y en consecuencia, no puede tener más de un cero en dicho intervalo.

En resumen: $\boxed{\text{existe un único punto en el intervalo } [0,1] \text{ en el que coinciden } P_1 \text{ y } P_2}$.

b) Aplicamos el método de bisección en el intervalo $[0, 1]$ para aproximar el cero de la función $f(t)$:

a	b	$f(a)$	$f(b)$	t_m	$f(t_m)$
0	1	-1	1.7183	0.5	0.1487
0	0.5		0.1487	0.25	-0.4660
0.25	0.5	-0.4660		0.375	-0.1700
0.375	0.5	-0.1700		0.4375	

El último intervalo, $[0.375, 0.5]$, tiene longitud$= 0.5 - 0.375 = 0.125$. Luego, dando como aproximación su punto medio, $t_3 = 0.4375$, cometemos un error menor que $\dfrac{0.125}{2} = 0.0625 < 0.1$.

Podríamos haber decidido a priori el número n de iteraciones a realizar utilizando la fórmula que nos dice que para conseguir un error menor que ε, debe ser:

$$n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

que, en este caso indica:

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{0.1}\right)}{\ln(2)} - 1 = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \approx 2.3,$$

que confirma lo dicho antes.

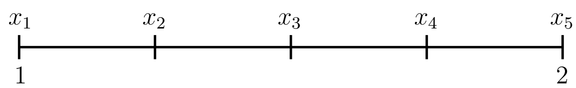
41. Se desea calcular

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

a) Calcula una aproximación del valor de esta integral mediante la fórmula de los rectángulos (extremo izquierdo) utilizando 4 subintervalos.

b) Calcula también una aproximación mediante la fórmula de los trapecios, asimismo con 4 subintervalos.

Dividimos el intervalo $[1, 2]$ en 4 subintervalos de igual longitud $h = \dfrac{1}{4} = 0.25$:



Calculamos los puntos y los valores de f en ellos:

k	x_k	$f(x_k)$
1	1	0
2	1.25	0.2789
3	1.5	0.6082
4	1.75	0.9793
5	2	1.3863

a) La fórmula de los rectángulos:

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\ln(x)\,dx &\approx h\Big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\Big)\\ &= 0.25\Big(0 + 0.2789 + 0.6082 + 0.9793\Big)\\ &= \boxed{0.4666}\end{aligned}$$

b) La fórmula de los trapecios:

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\ln(x)\,dx &\approx \frac{2-1}{2\times 4}\Big(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\Big)\\ &= \frac{1}{8}\Big(0 + 2\times 0.2789 + 2\times 0.6082 + 2\times 0.9793 + 1.3863\Big)\\ &= \boxed{0.6399}\end{aligned}$$

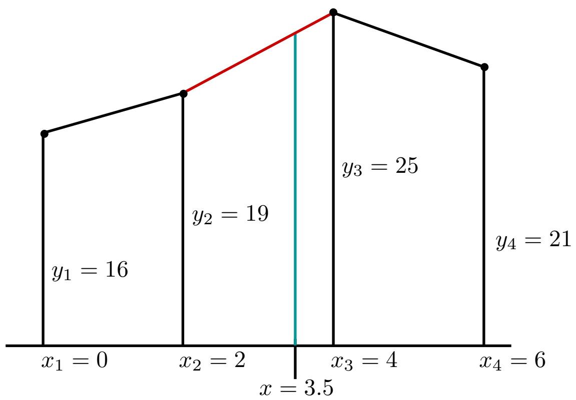
42. La medición de la temperatura de una habitación en un día proporcionó la siguiente tabla de valores:

Tiempo (horas)	x	0	2	4	6
Temperatura (°C)	y	16	19	25	21

a) Utilizando interpolación lineal a trozos, calcula una aproximación de la temperatura de la habitación a las 3:30 horas.

b) Calcula una aproximación de la temperatura media (promedio integral) de la habitación en el intervalo de tiempo $[0, 6]$, utilizando la fórmula de los trapecios.

a) La interpolante lineal a trozos de los datos contenidos en la tabla tendrá la gráfica reflejada en la figura.



Para calcular su valor en un punto x hay que:
(1) Identificar el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ en el que está el punto.
(2) Evaluar en x la función lineal que interpola los valores (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}).

En este caso, queremos evaluar la temperatura a las 3:30 horas, es decir, en $x = 3.5$. Este punto pertenece al intervalo $[x_2, x_3] = [2, 4]$.

Calculamos ahora la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 19)$ y $(4, 25)$:

$$\frac{y - 19}{25 - 19} = \frac{x - 2}{4 - 2} \iff y = 3x + 12$$

Evaluamos $y = 3x + 12$ en $x = 3.5$: $y = 3 \times 3.5 + 12 = 22.5$.

Luego, $\boxed{\text{el valor estimado para la temperatura a las 3:30 horas es } y = 22.5°\text{C}}$.

b) Por definición, el promedio integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

En este caso, $[a, b] = [0, 6]$ y $b - a = 6$, luego:

$$\bar{f} = \frac{1}{6} \int_a^b f(x)\, dx$$

Utilizando la fórmula de los trapecios con 3 subintervalos, podemos aproximar la integral entre 0 y 6 de la temperatura:

$$\int_0^6 f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\Big)$$

donde $h = \dfrac{b-a}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Tenemos, por tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)\,dx &\approx 16 + 2\times 19 + 2\times 25 + 21 \\ &= 16 + 38 + 50 + 21 = 125\end{aligned}$$

Luego, finalmente, tenemos, para la temperatura media en el intervalo de tiempo $[0,6]$ el siguiente valor:

$$\bar{f} = \frac{1}{6}125 \approx 20.83$$

43. La evolución en tiempo del número de individuos de cierta especie (medido en miles) sigue la ley $P_1(t) = t$, donde t es el tiempo (medido en años). La población de una especie competidora sigue la ley $P_2(t) = 2 - e^t$. Se considera que ambas especies tienen su supervivencia asegurada cuando coinciden en número.

   a) Mostrar razonadamente que el instante en que las especies coinciden en número tiene lugar entre $t = 0$ y $t = 1$.

   b) Aplicar el método de bisección para calcular aproximadamente el instante de coincidencia con un error menor que una décima.

a) Queremos justificar que existe algún punto entre $t = 0$ y $t = 1$, es decir, en el intervalo $[0,1]$, en el que ambas funciones coinciden:

$$P_1(t) = P_2(t), \quad \text{i.e.} \quad t = 2 - e^t.$$

O, lo que es lo mismo, queremos justificar que la ecuación

$$t = 2 - e^t \iff t - 2 + e^t = 0$$

tiene alguna solución en el intervalo $[0,1]$.

Para ello utilizamos el Teorema de Bolzano. Denotamos $f(t) = t - 2 + e^t$. Esta función verifica:

$$f(0) = -2 + 1 = -1 < 0, \qquad f(1) = 1 - 2 + e = e - 1 > 0.$$

Es decir, f cambia de signo en $[0,1]$, en consecuencia, tiene al menos un cero en dicho intervalo.

b) Utilizamos ahora el método de bisección para aproximar dicho cero: en cada iteración, dividimos en dos partes iguales el intervalo correspondiente, quedándonos con la parte en que se produce el cambio de signo. Para asegurar un error menor que una décima (0.1), detendremos este proceso cuendo tengamos el cero localizado en un intervalo de amplitud menor que 0.2, y tomaremos como aproximación el punto medio de ese intervalo.

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$b-a$	t_m	$f(t_m)$
0	1	$-1 < 0$	$1.7183 > 0$	1	0.5	$1.1487 > 0$
0	0.5	< 0	> 0	0.5	0.25	$-0.466 < 0$
0.25	0.5	< 0	> 0	0.25	0.375	$-0.17 < 0$
0.375	0.5	< 0	> 0	$\boxed{0.125}$	$\boxed{0.4375}$	

Observamos que el último intervalo $[0.375, 0.5]$ tiene amplitud $= 0.125 < 0.2$. En consecuencia, su punto medio, $t_m = 0.4375$ proporciona una aproximación del cero de $f(t)$ con un error $< \dfrac{0.125}{2} = 0.0625 < 0.1$, como nos piden.

Ejercicios del Tema 5: Ecuaciones diferenciales

44. Para la ecuación diferencial
$$2yy' = \frac{y^2+1}{x(x-1)},$$
se pide:

   a) Obtener la solución general.
   b) Determinar la solución que verifica $y(3) = 2$.

a) Esta ecuación es de variables separables:
$$2yy' = \frac{y^2+1}{x(x-1)} \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2+1}\,y' = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$
La integral del segundo miembro se calcula escribiendo el integrando como suma de fracciones simples:
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array} \right.$$
En consecuencia
$$\ln\left|y^2+1\right| = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$
De aquí, tomando exponenciales en ambos miembros, se tiene
$$y^2+1 = e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C} = e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} \cdot e^C = C\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ y^2 = C\left(\frac{x-1}{x}\right) - 1 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{C\left(\frac{x-1}{x}\right) - 1}$$

b) Veamos ahora para qué valor de C se tiene $y(3) = 2$. Lo primero que se observa es que, puesto que 2 es positivo, hay que tomar el signo positivo de la raíz cuadrada:
$$2 = +\sqrt{C\frac{2}{3} - 1} = +\sqrt{\frac{2C-3}{3}} \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{2C-3}{3} \Leftrightarrow 12 + 3 = 2C \Leftrightarrow C = \frac{15}{2}$$
Así pues, la solución buscada es:
$$y = +\sqrt{\frac{15(x-1)}{2x} - 1}$$

45. Para la ecuación diferencial
$$2yy' = (y^2+1)x\cos(x),$$
se pide:

a) Obtener la solución general.

b) Determinar la solución que verifica $y(0)=1$.

a) Esta ecuación es de variables separables:
$$2yy' = (y^2+1)x\cos(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{2y}{y^2+1}\,y' = x\cos(x) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \int x\cos(x)\,dx$$
La integral del segundo miembro se calcula utilizando la fórmula de integración por partes:
$$\int x\cos(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos(x) & \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x) \end{bmatrix} = x\,\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = x\,\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$
En consecuencia se tiene
$$\ln\left|y^2+1\right| = x\,\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$
De aquí, tomando exponenciales en ambos miembros, se tiene
$$y^2+1 = e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+C} = e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,e^C = C\,e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$$
$$\Leftrightarrow\; y^2 = C\,e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} - 1 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{C\,e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} - 1}$$

b) Veamos ahora para qué valor de C se tiene $y(0)=1$. Lo primero que se observa es que, puesto que 1 es positivo, hay que tomar el signo positivo de la raíz cuadrada:
$$1 = +\sqrt{C\,e^{0\,\operatorname{sen}(0)+\cos(0)} - 1} = +\sqrt{Ce-1} \quad\Rightarrow\quad 1 = Ce-1 \;\Leftrightarrow\; 2 = Ce \;\Leftrightarrow\; C = \frac{2}{e}$$
Así pues, la solución buscada es:
$$y = +\sqrt{\frac{2}{e}\,e^{x\,\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} - 1}$$

46. Resuelve el siguiente problema de valores iniciales
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x+1} + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal. Calculamos en primer lugar la solución general de la ec. homogénea asociada:
$$y' = \frac{y}{x+1} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|x+1| + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C(x+1)$$
Para obtener una solución particular de la ecuación dada, calculamos ahora
$$K(x) = \int b(x)\frac{1}{G(x)}\,dx = \int x\,\frac{1}{x+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1|,$$

de modo que la solución particular buscada es

$$y_p(x) = K(x)G(x) = \Big(x - \ln|x+1|\Big)(x+1)$$

y la solución general de la ecuación lineal es, finalmente,

$$y = C(x+1) + \Big(x - \ln|x+1|\Big)(x+1) = \Big(C + x - \ln|x+1|\Big)(x+1)$$

Para hallar la solución del problema de valor inicial, imponemos la condición inicial:

$$1 = y(0) = \Big(C + 0 - \ln|0+1|\Big)(0+1) = C - \ln(1) = C$$

Luego la solución pedida es:

$$y = \Big(1 + x - \ln|x+1|\Big)(x+1)$$

47. Resuelve el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x+2} + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal. Calculamos en primer lugar la solución general de la ec. homogénea asociada:

$$y' = \frac{y}{x+2} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x+2}\,dx \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|x+2| + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C(x+2)$$

Para obtener una solución particular de la ecuación dada, calculamos ahora

$$K(x) = \int b(x)\frac{1}{G(x)}\,dx = \int x\,\frac{1}{x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = x - 2\ln|x+2| = x + \ln\frac{1}{(x+2)^2}$$

de modo que la solución particular buscada es

$$y_p(x) = K(x)G(x) = \Big(x - 2\ln|x+2|\Big)(x+2) = \left(x + \ln\frac{1}{(x+2)^2}\right)(x+2)$$

y la solución general de la ecuación lineal es, finalmente,

$$y = C(x+2) + \Big(x - 2\ln|x+2|\Big)(x+2) = \Big(C + x - 2\ln|x+2|\Big)(x+2) = \left(C + x + \ln\frac{1}{(x+2)^2}\right)(x+2)$$

Para hallar la solución del problema de valor inicial, imponemos la condición inicial:

$$1 = y(-1) = C - 1 \;\Leftrightarrow\; C = 2$$

Luego la solución pedida es:

$$y = \Big(2 + x - 2\ln|x+2|\Big)(x+2) = \left(2 + x + \ln\frac{1}{(x+2)^2}\right)(x+2)$$

48. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' + 2\,\mathrm{tg}(t) y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

- $y' = -2\,\mathrm{tg}(t) y \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \mathrm{tg}\, t\, dt \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|\cos t| + C = \ln\cos^2 t + C \Leftrightarrow y_h(t) = C\,\cos^2 t$
- $K = \displaystyle\int \operatorname{sen} t\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{\cos t} \Longrightarrow y_p(t) = \frac{1}{\cos t}\,\cos^2 t = \cos t$
- $\boxed{y(t) = C\,\cos^2 t + \cos t}$
- $4 = y(0) = C\cos^2 0 + \cos 0 = C + 1 \iff C = 3.$ Luego la solución es $\boxed{y = 3\,\cos^2 t + \cos t}$

49. *a*) Calcular la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + y = \dfrac{e^{-t}}{4 - t^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

b) Estudiar el comportamiento de la solución del problema anterior cuando $t \to +\infty$.

Se trata de una ecuación lineal:

$$y' + y = \frac{e^{-t}}{4 - t^2} \;\Leftrightarrow\; y' = -y + \frac{e^{-t}}{4 - t^2}$$

Ec. homogénea:

$$y' = -y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}dy = -\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln y = -t + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C\,e^{-t}$$

Solución particular de la completa: $y_p = K(t)e^{-t}$ con

$$K(t) = \int \frac{e^{-t}}{4 - t^2}\,\frac{1}{e^{-t}}\,dt = \int \frac{1}{4 - t^2}\,dt$$

Para calcular la integral hay que escribir la fracción como suma de fracciones simples. Para ello, se comienza por factorizar el denominador: $4 - t^2 = (2 - t)(2 + t)$. Puesto que se descompone en dos factores simples distintos, la descomposición que necesitamos será de la forma:

$$\frac{1}{4 - t^2} = \frac{1}{(2 - t)(2 + t)} = \frac{A}{2 - t} + \frac{B}{2 + t}$$

Multiplicamos en ambos miembros por $4 - t^2$ o, lo que es lo mismo, por $(2 - t)(2 + t)$, y obtenemos:

$$1 = A(2 + t) + B(2 - t)$$

Necesitamos encontrar A y B para que la anterior igualdad sea cierta $\forall t \in \mathbb{R}$. En particular dando valores a t se tiene:

$$\begin{cases} t = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4A \quad \Rightarrow \quad A = 1/4 \\ t = -2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = 1/4 \end{cases}$$

Luego, se tiene finalmente, para la integral:

$$\int \frac{1}{4 - t^2}\,dt = \int \Big(\frac{1/4}{2 - t} + \frac{1/4}{2 + t}\Big)\,dt = \frac{1}{4}\Big(-\ln|2 - t| + \ln|2 + t|\Big) = \frac{1}{4}\ln\Big|\frac{2 + t}{2 - t}\Big|$$

Luego la solución particular buscada es::

$$y_p = K(t)e^{-t} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|e^{-t}$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|e^{-t} + C\,e^{-t}$$

Esto es la solución general de la ecuación diferencial. Debemos ahora calcular la solución particular que verifica la condición inicial dada:

$$y(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+0}{2-0}\right|e^{-0} + C\,e^{-0} = \frac{1}{4}\ln(1)\cdot 1 + C\cdot 1 = C$$

Luego la solución del problema de valor inicial dado es:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|e^{-t}}$$

Por último, el comportamiento de la solución cuando $t\to+\infty$ se estudia calculando su límite cuando $t\to+\infty$. Se tiene

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = 0$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$$

En consecuencia

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|e^{-t} = 0}$$

50. Debido a un vertido tóxico, las aguas de un lago, que inicialmente estaban limpias, comienzan a ser contaminadas. Sea $y(t)$ la cantidad de contaminante (gramos) por m^3 en el instante de tiempo t (medido en días). Se sabe que $y(t)$ sigue la ley

$$y' = \frac{1}{2}(k-y)$$

donde k es una constante desconocida. Pasados 4 días tras el vertido, la contaminación es de 86.5 $\mathrm{gr/m}^3$.

a) Calcular la función $y(t)$ y el valor de la constante k.

b) Calcular la cantidad de contaminante por m^3 que tendrán las aguas del lago 10 días después del vertido.

a) La solución general de la ecuación diferencial es $y = k - Ce^{-t/2}$:

$$\int\frac{1}{k-y}dy = \int\frac{1}{2}dt \Leftrightarrow -\ln|k-y| = \ln\left|\frac{1}{k-y}\right| = \frac{t}{2} + C \Leftrightarrow \frac{1}{k-y} = Ce^{t/2} \Leftrightarrow y = k - Ce^{-t/2}$$

Puesto que, inicialmente, no había contaminación, debe ser: $0 = y(0) = k - C \quad\Rightarrow\quad C = k.$

Puesto que 4 días más tarde era $y = 86.5$, debe ser:

$86.5 = y(4) = k - ke^{-4/2} = k(1-e^{-2}) \quad\Rightarrow\quad k = C = \dfrac{86.5}{1-e^{-2}} \approx 100.$

Así pues la función que da la concentración de contaminante t días después del vertido es:

$$y(t) = 100(1-e^{-t/2})$$

b) Conocida $y(t)$, se puede calcular la cantidad de contaminante que habrá en el lago 10 días después del vertido:

$$y(10) = 100(1-e^{-10/2}) = 100(1-e^{-5}) \approx 99.32$$

51. Una determinada especie ha sufrido una epidemia, con lo que la tasa de mortalidad ha superado la tasa de natalidad. Se sabe que $y(t)$, el número de individuos vivos de la especie en el instante de tiempo t, es la solución del siguiente problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} y' = -ay - y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde $a > 0$ es un parámetro e $y_0 > 0$ es el número de individuos de la especia presentes al comienzo del periodo de observación.

a) Determinar la solución al problema anterior para $a = 1, y_0 = 10$.

b) Probar que, para tiempos grandes, la especie tiende a la extinción.

a) Debemos resolver la ecuación diferencial: $y' = -y - y^2 = -y(1-y)$ que claramente tiene las soluciones triviales constantes $y = 0$ e $y = -1$

Se trata de una ecuación logística, que re-escribimos de la forma (para $y \neq 0$ e $y \neq -1$):

$$\frac{dy}{dt} = -y(1+y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y(1+y)} = -dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(1+y)} = -\int dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{y+y^2} = \dfrac{1}{y(1+y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma :

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} \Leftrightarrow 1 = A(1+y) + By \quad \begin{cases} y = 0 & \Rightarrow \quad 1 = A \\ y = -1 & \Rightarrow \quad 1 = -B \end{cases}$$

Se tiene, pues

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = -\int dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| - \ln|1+y| = \ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = -t + C$$

Despejamos la y:

$$\frac{y}{1+y} = C\,e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad y = C\,e^{-t}\,(1+y) = C\,e^{-t} + C\,e^{-t}y \quad \Leftrightarrow \quad (1 - C\,e^{-t})y = C\,e^{-t}$$

luego

$$y = \frac{C\,e^{-t}}{1 - Ce^{-t}} \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad \boxed{y = \frac{1}{Ce^t - 1} \qquad C \in \mathbb{R}}$$

Sustituyendo $y(0) = 10$, obtenemos:

$$y_0 = 10 = y(0) = \frac{1}{Ce^0 - 1} = \frac{1}{C-1} \quad \Rightarrow \quad C - 1 = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{10} + 1 = \frac{1+10}{10} = \frac{11}{10}$$

luego la solución del problema de valor inicial es:

$$y = \frac{1}{Ce^t - 1} = \frac{1}{\frac{11}{10}e^t - 1} = \frac{10}{11e^t - 10}$$

b) El comportamiento de $y(t)$ para tiempos grandes se obtiene calculando el siguiente límite:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{10}{11e^t - 10} = 0$$

lo que significa que la especie tiende a la extinción.

52. Las aguas de un estanque de regadío se encuentran contaminadas, debido a los plaguicidas. El estanque contiene 3000 m^3 de agua con una concentración de 2 $\mathrm{g/m}^3$ de DDT. Para purificar el estanque, se comienza a introducir agua limpia a razón de 42 m^3/h. Simultáneamente, el agua, que se supone mezclada de forma instantánea, se vacía a la misma velocidad.

    Para controlar la operación, se necesita conocer la función que proporciona la cantidad de DDT que hay presente en el estanque en cada instante del proceso.

    a) Determina la ecuación diferencial que verifica dicha función. Determina también la condición inicial que hay que imponer para calcularla.

    b) Resuelve el problema de valor inicial planteado en el apartado anterior.

    c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la concentración de DDT en el estanque descienda hasta 0.5 $\mathrm{g/m}^3$?

Utilizaremos las siguientes unidades:
Volumen: metros cúbicos (m^3)
Cantidad de contaminante: gramos (g)
Tiempo: horas (h)

a) Puesto que entra agua al estanque a la misma velocidad a la que sale, en el estanque hay siempre el mismo volumen de agua:

$$V = 3000 \text{ m}^3$$

Si $y(t)$ es la cantidad total de DDT que hay en el estanque en el instante t, entonces, puesto que y' es la variación de y por unidad de tiempo, se tendrá:

$$y'(t) = \text{cantidad que entra/hora} - \text{cantidad que sale/hora}$$

Cantidad que entra por hora: el agua que entra en el estanque está limpia. Por tanto, entran en el estanque 0 g de DDT por hora.

Concentración de contaminante en el estanque en el instante t: será igual a la cantidad total de DDT que hay en el estanque en el instante t, es decir, $y(t)$, dividido por el volumen total de agua que hay en el estanque en el instante t, que en este caso se mantiene constante e igual a 3000 m^3, como hemos visto antes. Es decir, la concentración en el instante t es $\dfrac{y(t)}{3000}$ g por cada m^3.

Cantidad que sale por día: salen igualmente 42 m^3/h, con una concentración de contaminante igual, por lo dicho antes, a $\dfrac{y(t)}{3000}$ $\mathrm{g/m}^3$. En consecuencia, salen de la piscina $\dfrac{42\,y(t)}{3000}$ g por hora.

Por lo tanto, ya se puede establecer la ecuación diferencial que verifica $y(t)$:

$$y' = 0 - \frac{42\,y}{3000} = -\frac{14}{1000}\,y$$

La condición inical será la que indique la cantidad inicial de DDT en el estanque. Puesto que inicialmente hay 3000 m^3de agua con una concentración de 2 $\mathrm{g/m}^3$, la cantidad inicial será

$$y(0) = y_0 = 2 \times 3000 = 6000 \text{ (g)}$$

b) Resolvamos, en primer lugar, la anterior ecuación diferencial, que es de variables separables:

$$y' = -\frac{14}{1000}\,y \iff \int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{14}{1000}\int dt \iff \ln|y| = -\frac{14}{1000}t + C \iff y = C\,e^{-14t/1000}$$

La condición inicial:

$$y(0) = 6000$$

Sustituyendo en la expresión de la solución general obtendremos el valor adecuado de C y, con éste, la solución particular que verifica la condición inicial:

$$6000 = y(0) = C$$

Luego la función buscada es

$$\boxed{y = 6000\, e^{-14t/1000}}$$

c) La función $y(t)$ calculada en el apartado anterior nos da la cantidad total de DDT que queda en el estanque en el instante t. Puesto que el volumen total de agua en el estanque es 3000 m^3, tenemos que la concentración de DDT en el estanque en el instante t es:

$$c(t) = \frac{y(t)}{3000} = \frac{6000\, e^{-14t/1000}}{3000} = 2\, e^{-14t/1000}$$

Tenemos que calcular el valor de t para el que se tiene

$$c(t) = 0.5$$

es decir,

$$0.5 = 2\, e^{-14t/1000} \iff e^{-14t/1000} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \iff -\frac{14\, t}{1000} = \ln(0.25)$$
$$\iff t = -\frac{1000}{14}\ln(0.25) \approx \boxed{99 \text{ horas}}$$

53. Se considera una población que evoluciona según una ecuación logística pero que, además, está sometida a una depredación que reduce el tamaño de la población en 10 individuos en cada tiempo t. Este comportamiento hace que la velocidad de cambio de la población se exprese de la siguiente forma:

$$y' = y(1 - \frac{y}{40}) - 10,$$

donde $y(t)$ representa el número de individuos en el tiempo t, $y(1 - y/40)$ expresa el término logístico y el segundo término expresa la depredación.

a) Si inicialmente hay 100 individuos, ¿cuántos individuos habrá en cada tiempo t?

b) ¿Se extinguirá la población?

a) El problema de valor inicial que hay que resolver es:

$$\begin{cases} y' = y(1 - \frac{y}{40}) - 10 \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

Calculamos en primer lugar la solución general de la ecuación. Comenzamos por factorizar el segundo miembro:

$$y(1 - \frac{y}{40}) - 10 = \frac{1}{40}\Big(y(40-y) - 400\Big) = \frac{-1}{40}\Big(y^2 - 40y + 400\Big) = \frac{-1}{40}(y-20)^2$$

Luego

$$y' = \frac{-1}{40}(y-20)^2 \iff \int \frac{1}{(y-20)^2}\, dy = \int \frac{-1}{40}\, dt$$
$$\iff \frac{-1}{y-20} = \frac{-t}{40} + C \iff \frac{1}{y-20} = \frac{t}{40} + C = \frac{t+C}{40}$$
$$\iff \frac{40}{t+C} = y - 20 \iff \boxed{y = 20 + \frac{40}{t+C}}$$

Imponemos ahora la condición inicial

$$y(0) = 100 = 20 + \frac{40}{C} \iff 80 = \frac{40}{C} \iff C = \frac{40}{80} \iff C = \frac{1}{2}$$

Luego la solución del problema de valor incial es:

$$y = 20 + \frac{40}{t + \frac{1}{2}} = 20 + \frac{80}{2t+1}$$

$$\boxed{\text{El número de individuos de esta población en el instante } t \text{ es } y = 20 + \frac{80}{2t+1}}$$

b) Para analizar si la población se extingue observamos en primer lugar que la función $y = 20 + \dfrac{80}{2t+1}$ es decreciente, lo que significa que la población disminuye con el paso del tiempo. Calculemos su límite cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} 20 + \frac{80}{2t+1} = 20 + \lim_{t\to\infty} \frac{80}{2t+1} = 20$$

Es decir, la población disminuye de tamaño pero no se extingue, ya que el número de individuos tiende asintóticamente a 20.

54. El Bario 133 (^{133}Ba) es una sustancia radioactiva y se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente. La vida media (tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de cualquier cantidad inicial) es de 10.53 años.

a) Determina la ecuación diferencial que modeliza la evolución temporal de la cantidad de ^{133}Ba.

b) Calcula la constante de desintegración del ^{133}Ba.

c) Averigua el tiempo que tarda 1 kg de ^{133}Ba en reducirse a 1 g.

a) La ecuación diferencial que modela la desintegración radiactiva y expresa que la desintegración se produce a una velocidad proporcional a la cantidad existente es:

$$y' = -\lambda\, y$$

donde $y(t)$ es la cantidad de ^{133}Ba presente en el instante t (tiempo, medido en años) y $\lambda > 0$ es la constante de desintegración o decaimiento del ^{133}Ba. Las soluciones de esta ecuación son de la forma:

$$y = C\, e^{-\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) La constante de desintegración se calcula a partir de la vida media. Supongamos que inicialmente hay una cantidad y_0 de ^{133}Ba: $y(0) = y_0$. Puesto que la vida media es V_m es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad, se tendrá $y(V_m) = \dfrac{y_0}{2}$. De estas dos ecuaciones se puede despejar λ en función de la vida media:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 = C\, e^{-\lambda\, t} \iff C = y_0, \quad \text{esto es} \quad y = y_0\, e^{-\lambda\, t} \\ y(V_m) = \dfrac{y_0}{2} = y_0\, e^{-\lambda\, V_m} \iff \dfrac{1}{2} = e^{-\lambda\, V_m} \iff -\lambda V_m = -\ln(2) \iff \boxed{\lambda = \dfrac{\ln(2)}{V_m}} \end{cases}$$

Esta es la relación entre la vida media y la constante de desintegración de cualquier sustancia radiactiva.

En este caso, pues, se tiene que la constante de desintegración del ^{133}Ba es

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{10.53} \approx \boxed{0.0658}$$

c) De los apartados anteriores se tiene que la función que nos da la cantidad de ^{133}Ba presente en el instante t, si se ha comenzado con una cantidad y_0 es:

$$y = y_0 \, e^{-0.0658\, t}$$

Queremos calcular para qué valor de t se tiene

$$y(t) = 1000\, e^{-0.0658\, t} = 1 \iff e^{-0.0658\, t} = \frac{1}{1000} \iff -0.0658\, t = \ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$
$$\iff t = \frac{-1}{0.0658} \ln\left(\frac{1}{1000}\right) \approx \boxed{105 \text{ años}}$$