Tema 5

Ecuaciones diferenciales

Versión: 22 de septiembre de 2019

5.1 Introducción

Existen numerosos modelos matemáticos de diversa índole que se utilizan hoy en día para el estudio de problemas en Biología y otras ciencias experimentales; sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. La gran parte de tales modelos matemáticos se expresa mediante ecuaciones diferenciales.

El objetivo de este tema es describir brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrar técnicas elementales de su resolución, así como exponer ejemplos prácticos de aplicaciones.

Ecuación diferencial

Es una ecuación en que la **incógnita** es una función y que, además, involucra también las **derivadas** de la función hasta un cierto orden.

La incógnita no es el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la ecuación es **ordinaria**, debido a que la o las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias (por contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Por ejemplo,

$$y'(t) = -y(t) \tag{5.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la de primer orden. Aquí, t es la **variable independiente** e $y = y(t)$, que es una función desconocida que depende de t, es la **incógnita**. Si no resulta confuso se suele escribir también esta ecuación en la forma $y' = -y$, omitiendo la mención expresa a la dependencia de y respecto a la variable independiente t.

Naturalmente, la utilización de las letras t e y, aunque es la que se utiliza en estas notas, es arbitraria. Por ejemplo, la ecuación anterior se podría escribir también $A'(x) = -A(x)$, siendo aquí x la variable independiente y A la incógnita.

Lo que interesa, con respecto a la ecuación (5.1), es encontrar una o varias funciones $y = \varphi(t)$ que verifiquen la igualdad

$$\varphi'(t) = -\varphi(t) \quad \text{para todo } t \text{ perteneciente a un cierto intervalo } I$$

Una tal función se dice que es una **solución** de la ecuación (5.1) en el intervalo I.

Con carácter general, una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** se escribe:

$$y' = f(t, y) \tag{5.2}$$

y se dice que $y = \varphi(t)$ es **solución en el intervalo** I de esta ecuación si se verifica

$$\varphi'(t) \left(= \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall\, t \in I. \tag{5.3}$$

es decir, si cuando se sustituye en la ecuación y por su expresión e y' por la expresión de la derivada, lo que se obtiene es una identidad, algo que es cierto **para todo** $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$.

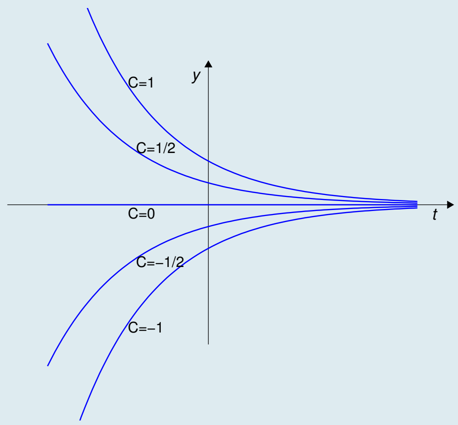
Ejemplo 5.1

La función $y = e^{-t}$ es solución de la ecuación $y' = -y$ en todo $\mathbb{R}$, ya que

$$y'(t) = -e^{-t} = -y(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Pero también es solución cualquier función de la forma $y = Ce^{-t}$ siendo C una constante arbitraria, puesto que

$$y'(t) = -Ce^{-t} = -y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Así pues, la ecuación del Ejemplo (5.1) tiene infinitas soluciones, lo que no es una particularidad de esta ecuación concreta. La ecuación diferencial ordinaria (5.2) posee, en general, una «familia» de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, a la que se llama **solución general** de (5.2). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una **solución particular**.

Se llama **resolver una ecuación diferencial** a encontrar su solución general. En realidad, esto sólo es posible para unas cuantas (pocas) ecuaciones sencillas. Para la inmensa mayoría de las ecuaciones diferenciales es necesario recurrir a **métodos numéricos** y calcular soluciones aproximadas con ayuda de un ordenador.

Con frecuencia lo que interesa en las aplicaciones es encontrar una solución particular que verifique alguna condición adicional. Por ejemplo, que toma un valor dado para un valor, también dado, de la variable independiente.

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases}$$

Este problema consiste en:

> Encontrar, de entre todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$, aquella que para $t = t_0$ toma el valor $y = y_0$ o, lo que es lo mismo, aquella que “pasa” por el punto (t_0, y_0).

El nombre proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.

En general, si se verifican ciertas condiciones razonables de regularidad de la función f, un problema de valor inicial tiene solución única.

Ejemplo 5.2

El problema de valor inicial, asociado a la ecuación (5.1),

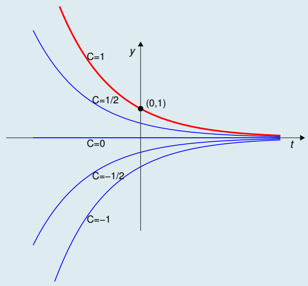
$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1\,, \end{cases} \tag{5.4}$$

tiene una única solución, $y = e^{-t}$, que se puede encontrar imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, a las funciones de la familia de soluciones, $y = Ce^{-t}$, y deduciendo para qué valor de la constante arbitraria C se cumple la condición inicial. Es decir:

$$y(0) = C \cdot e^0 = C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

La solución del problema de valor inicial es, pues,

$$y = e^{-t}$$



Ejemplo 5.3

Comprobar que, sea cual sea el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$, la función $y = 20 - 3e^{-kt}$ es solución de la ecuación $y' = k(20 - y)$.

Para comprobarlo se han de sustituir y e y' en la ecuación y verificar que el resultado es una **identidad** en t, es decir, que la igualdad es cierta para todos los valores posibles de t.
Se tiene:

$$\begin{cases} y' & = 3ke^{-kt} \\ k(20 - y) & = k\big(20 - (20 - 3e^{-kt})\big) = 3ke^{-kt} \end{cases} \tag{5.5}$$

luego, efectivamente, es solución.

A continuación se explica cómo se pueden resolver varios ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden sencillas.

5.2 Resolución de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = a(t)$

En muchas aplicaciones, la variable independiente t representa el tiempo. Si la velocidad de variación de una magnitud depende sólo del tiempo, la ecuación diferencial que verifica es de la forma

$$y' = a(t), \tag{5.6}$$

donde $a = a(t)$ es una función que depende sólo de la variable independiente t, definida en un intervalo I.

Resolución de $y' = a(t)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)$, y de aquí
$$dy = a(t)\, dt.$$
2. A continuación, se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int dy = \int a(t)\, dt.$$
3. Denotemos por $A(t)$ una primitiva (cualquiera, pero fija) de $a(t)$. Se tiene entonces, recordando que todas las demás primitivas de $a(t)$ se pueden obtener a partir de ésta sumándole una constante,
$$y = A(t) + C$$
siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, es la **solución general** de la ecuación.

Resolución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Ahora lo que se desea es averiguar cuál es la solución de la ecuación diferencial $y' = a(t)$ que verifica $y(t_0) = y_0$. Para ello el procedimiento a seguir es:

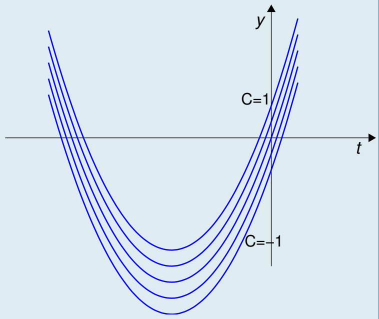
1. Calcular la solución general de la ecuación $y' = a(t)$ que, por lo visto antes, es $y = A(t) + C$ siendo $A(t)$ una primitiva de $a(t)$.
2. Para hallar cuál, entre todas las soluciones, es la que verifica $y(t_0) = y_0$, hay que averiguar para qué valor de C se tiene
$$y_0 = y(t_0) = A(t_0) + C \Longleftrightarrow C = y_0 - A(t_0)$$
3. Por lo tanto la solución del problema de valor inicial es
$$y = A(t) + y_0 - A(t_0)$$

Ejemplo 5.4
Calcular la solución general de $y' = 3 + t$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3 + t \iff \int dy = \int (3+t)\,dt$$
$$\iff y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$

La solución general de la ecuación es, pues,

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$



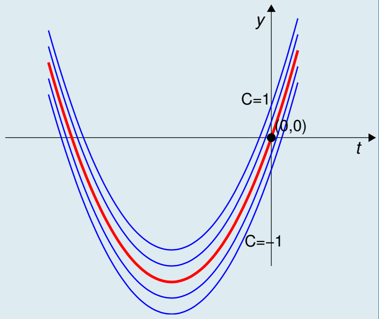
Ejemplo 5.5
Resolver el problema de valor inicial $\left\{ \begin{array}{l} y' = 3 + t \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$

Hay que hallar el valor de C que hace que $y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$ verifique $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = C \iff C = 0$$

La solución del problema de valor inicial es, por lo tanto

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2$$



Ejemplo 5.6
Resolver el problema de valor inicial: $\left\{ \begin{array}{l} y' = t^2 \\ y(0) = 1/2 \end{array} \right.$

Se calcula, en primer lugar, la solución general de $y' = t^2$:

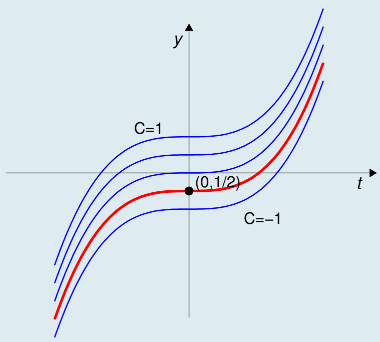
$$y' = \frac{dy}{dt} = t^2 \iff \int dy = \int t^2\,dt \iff y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Para obtener la solución particular que verifica $y(0) = 1/2$, se impone esta condición y se despeja C:

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{3}0^3 + C = C \iff C = \frac{1}{2}$$



Ejemplo 5.7
Resolver el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' = \frac{1}{1+t} \iff \int dy = \int \frac{1}{1+t}\,dt$$
$$\iff y = \ln|1+t| + C$$

La solución general de la ecuación es, pues,

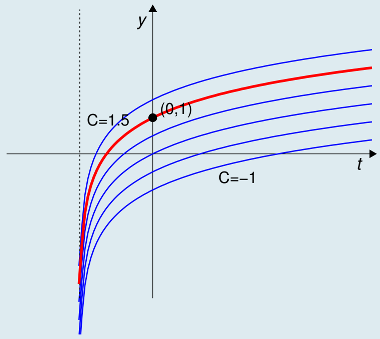
$$y = \ln|1+t| + C$$

Se impone ahora la condición inicial:

$$1 = y(0) = \ln(1+0) + C = C \iff C = 1$$

Luego la solución del problema es

$$y = \ln(1+t) + 1 \quad \forall t \in (-1, +\infty)$$



5.3 Ecuaciones diferenciales de variables separables $\mathbf{y' = a(t)\,g(y)}$

Son ecuaciones de la forma
$$y' = a(t)g(y),$$
donde $a(t)$ es una función, definida en un intervalo I, que depende sólo de la variable independiente, t, y $g(y)$ es una función que depende sólo de la variable dependiente, y.

Para resolverla se procede como sigue:

Resolución de $y' = a(t)g(y)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)\,g(y)$
2. A continuación, se "separan" las variables, de forma que a un lado del signo "=" esté sólo lo que depende de y y al otro lado esté sólo lo que depende de t: si $g(y) \neq 0$ se puede poner (en caso contrario, véase el punto 5):
$$\frac{1}{g(y)}\,dy = a(t)\,dt$$
3. Se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int a(t)\,dt$$
4. Sean
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy \qquad A(t) = \int a(t)\,dt$$
dos primitivas de $\dfrac{1}{g(t)}$ y $a(t)$ respectivamente. Entonces la solución general viene dada por
$$G(y) = A(t) + C$$
De esta expresión, si se puede, se despeja y. Si no se puede, se deja como está.
5. Si hay algún valor de y que anule la función g, por ejemplo, $g(\alpha) = 0$, entonces la ecuación $y' = a(t)g(y)$ tiene la solución constante $y = \alpha$, que puede estar, o no, incluida en la solución general $G(y) = A(t) + C$. Se debe comprobar esto.

Ejemplo 5.8
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = yt$

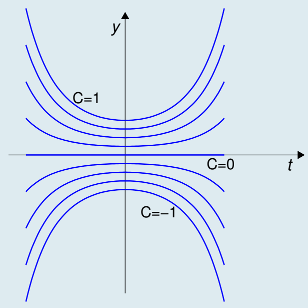
$$y' = yt \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int t\,dt \iff \ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\iff |y| = e^{t^2/2+C} = e^{t^2/2}\cdot e^C \iff y = \pm e^{t^2/2}\cdot e^C = e^{t^2/2}\cdot\left(\pm e^C\right)$$

Comentario importante: Puesto que C representa aquí un valor cualquiera, también $\pm e^C$ es un valor cualquiera. Por lo tanto, y con el fin de no complicar inútilmente la notación, seguiremos usando la letra C para designar el valor arbitrario $\pm e^C$.
Queda entonces

$$y = C\,e^{t^2/2}$$

La solución constante $y = 0$ que la ecuación, evidentemente, tiene, está incluida en esta última expresión para el valor de la constante $C = 0$.



La constante arbitraria en la resolución de ecuaciones diferenciales.

En la resolución de ecuaciones diferenciales se aplica de forma sistemática el comentario del Ejercicio 5.8: Debido a las operaciones que se realizan para expresar adecuadamente la solución, con frecuencia la constante aparece inmersa en alguna expresión.
Sin embargo, para no complicar sin necesidad la notación, se sigue denotando por C a dicha expresión.

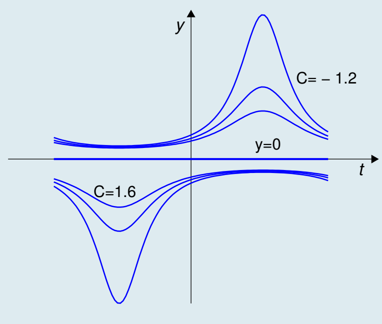
Ejemplo 5.9
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y^2\cos t$

$$y' = y^2\cos t \iff \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \cos t\,dt \iff -\frac{1}{y} = \operatorname{sen} t + C$$

$$\iff y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C}$$

La ecuación $y' = y^2\cos t$ tiene, además, la solución constante $y = 0$, que no está incluida en la familia de funciones anterior : no se obtiene de su expresión para ningún valor de la constante C.
Resumiendo, las soluciones de la ecuación son:

$$y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C} \quad \text{y además } y = 0$$

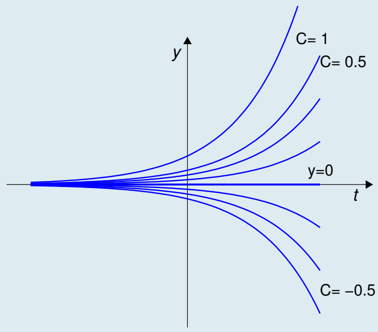


Ejemplo 5.10
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y$

$$y' = 2y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2t + C$$

Para despejar la incógnita, y, se toman exponenciales en ambos miembros de la igualdad anterior, y se obtiene

$$y = \pm\, e^{2t+C} = \pm e^{2t}\cdot e^{C} = e^{2t}\cdot(\pm e^{c})$$



Aquí, como en el Ejemplo (5.8), si C es una constante arbitraria, $\pm e^{C}$ también lo es, y la seguimos llamando C para no complicar la notación. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = C\,e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{arbitraria}$$

La solución constante $\quad y = 0 \quad$ está incluida para el valor $C = 0$.

Ejemplo 5.11
Hallar la solución del problema $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{t} \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$

$$y' = \frac{y^2-1}{t} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$$

La integral del primer miembro se calcula escribiendo el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\,\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = \ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = 2(\ln|t| + C) = 2\ln|t| + 2C = \ln t^2 + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\ln t^2 + C} = e^{\ln t^2}\,e^{C} = C\,t^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{y+1} = (\pm C)\,t^2 = C\,t^2$$

$$\Leftrightarrow\; y - 1 = C\,t^2(y+1) = Ct^2y + Ct^2 \;\Leftrightarrow\; y - Ct^2y = y(1-Ct^2) = 1 + Ct^2$$

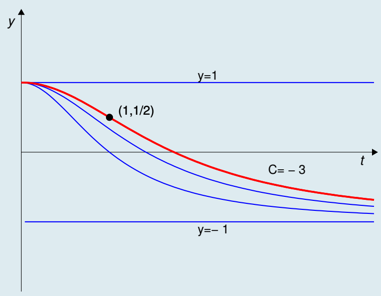
$$y = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2t^2}{C-t^2}$$

La ecuación tiene también las soluciones constantes $y = 1$ e $y = -1$, la segunda incluida para $C = 0$, la primera no.
Para hallar la solución que verifica $y(1) = 0.5$ imponemos esta condición en la solución general y despejamos C:

$$\frac{1}{2} = y(1) = 1 + \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} = \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; C = -3$$

Así pues, la solución del problema es

$$y = 1 + \frac{2t^2}{-3-t^2} = 1 - \frac{2t^2}{3+t^2}$$



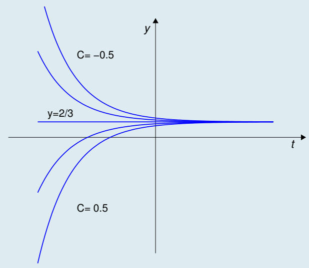
Ejemplo 5.12
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2 - 3y$
Se comienza dividiendo en ambos miembros por $2 - 3y$ (se debe recordar que luego hay que comprobar si la solución constante $y = 2/3$ está contenida en la solución general) y se integra en ambos miembros por separado (las integrales son inmediatas):

$$y' = 2 - 3y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{2-3y}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|2-3y| = t + C \;\Leftrightarrow\; \ln|2-3y| = -3(t+C) = -3t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$2 - 3y = e^{-3t+C} = e^{-3t}\,e^{C} = C\,e^{-3t} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}\left(2 - C\,e^{-3t}\right)$$

La solución constante $y = \dfrac{2}{3}$ está contenida en esta familia de funciones para el valor de $C = 0$.



Ejemplo 5.13
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y - 2y^2$
El segundo miembro, que se puede factorizar en la forma $y - 2y^2 = y(1-2y)$, se anula claramente para $y = 0$ y para $y = 1/2$ que son soluciones constantes de la ecuación.
Para resolverla se pasa $y(1-2y)$ al primer miembro dividiendo y se integra en ambos lados. La integral del primer miembro se hace por descomposición en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{y(1-2y)}\,y' = 1 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y(1-2y)}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}\right) dy = \int dt$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|y| - \ln|1-2y| = \ln\left|\frac{y}{1-2y}\right| = t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros de la última igualdad se tiene

$$\frac{y}{1-2y} = C\,e^{t} \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{t}(1-2y) = Ce^{t} - 2Ce^{t}y \;\Leftrightarrow\; y + 2Ce^{t}y = y(1+2Ce^{t}) = Ce^{t}$$

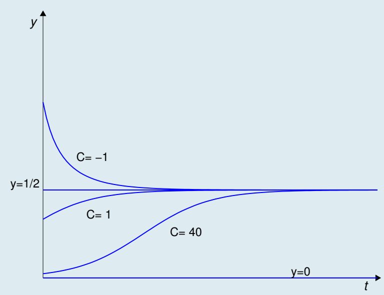
y, finalmente, despejando aquí la incógnita

$$y = \frac{Ce^{t}}{1+2Ce^{t}}$$

que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^{t}:

$$y = \frac{1}{\dfrac{1}{Ce^{t}} + 2} = \frac{1}{Ce^{-t} + 2}$$

La solución constante $y = 0$ no está incluida en esta expresión. En cambio, sí lo está la solución $y = 1/2$ (para $C = 0$).



5.4 Ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y' = a(t)\, y + b(t)}$

Son las ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{5.7}$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones que dependen de la variable independiente t.

Cuando $b(t) \equiv 0$ se dice que la ecuación (5.7) es **lineal homogénea**:

Dada la ecuación no homogénea (5.7), se denomina **ecuación homogénea asociada** a la ecuación que se obtiene eliminando el término no homogéneo, es decir

$$y' = a(t)y. \tag{5.8}$$

El método de resolución de estas ecuaciones está basado en la siguiente propiedad fundamental de sus soluciones:

Solución general de una ecuación lineal.
La solución general de la ecuación diferencial lineal (5.7) se puede escribir como la suma de la solución general de su ecuación homogénea asociada, (5.8), y una solución particular cualquiera de la ecuación completa (5.7):

$$y = y_h(t) + y_p(t),$$

donde

$y_h(t)$ es la solución general de $y' = a(t)\,y$

$y_p(t)$ es una solución particular cualquiera de $y' = a(t)\,y + b(t)$

En consecuencia, la resolución de la ecuación (5.7) se lleva a cabo en dos etapas:

1. Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada (5.8).
2. Se calcula **una** solución particular (cualquiera) de la ecuación completa (5.7).

Se explica a continuación, con más detalle, cómo se ponen en práctica estas etapas.

1. La ecuación homogénea asociada
$$y' = a(t)y$$
es una ecuación de variables separables. Procediendo a separar las variables, e integrando en ambos miembros, se tiene
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a(t)\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = A(t) + C \;\Leftrightarrow\; y = \pm e^{A(t)+C} = C\,e^{A(t)}$$
donde $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$. Así, la solución general de la ecuación homogénea (5.8) es
$$y_h(t) = C\,e^{A(t)}$$
Denotemos $G(t) = e^{A(t)}$.

2. La solución general de la ecuación homogénea asociada siempre es de la forma
$$y_h(t) = C\,G(t), \qquad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$
donde $G(t) = e^{A(t)}$ y por tanto verifica $G'(t) = A'(t)\,e^{A(t)} = a(t)\,e^{A(t)}$, puesto que $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$.

El cálculo de **una** solución particular de la ecuación (5.7) se puede llevar a cabo por el **método de Lagrange de variación de la constante**, que consiste en "buscar" dicha solución sabiendo que es de la forma:

$$y_p(t) = K(t)\, G(t). \tag{5.9}$$

Para encontrar la función $K(t)$ adecuada, se sustituye en la ecuación (5.7), y así se encontrará la condición que debe verificar $K(t)$ para que $y_p(t)$ sea solución, es decir, que verifique $y_p'(t) = a(t)\, y_p(t) + b(t)$:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= K'(t)G(t) + K(t)G'(t) = K'(t)G(t) + K(t)a(t)G(t) \\ a(t)y_p(t) + b(t) &= a(t)K(t)G(t) + b(t) \end{aligned}$$

$$y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t)G(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t) = b(t)\,\frac{1}{G(t)}$$

luego, para que (5.9) sea solución de (5.7), tiene que ser

$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\, dt.$$

de donde la solución particular de (5.7) que se busca es

$$y_p(t) = G(t) \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\, dt.$$

Finalmente, según la propiedad antes explicada, la solución general de la ecuación lineal es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, G(t) + G(t) \int b(t)\frac{1}{G(t)}\, dt = \left(\int b(t)\frac{1}{G(t)}\, dt + C \right) G(t).$$

El resumen de este proceso es, pues, el siguiente

Cálculo de la solución general de la ecuación diferencial lineal $\mathbf{y' = a(t)y + b(t)}$.

1. Calcular y_h, la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$, que será de la forma
$$y_h(t) = C\, G(t)$$
2. Calcular
$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\, dt$$
3. La solución general es
$$y(t) = (\, K(t) + C\,)\; G(t), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

Ejemplo 5.14
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y + t$

En primer lugar se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada, $y' = 2y$, que es de variables separables:

$$\frac{1}{y}y' = 2 \iff \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int dt \iff \ln|y| = 2t + C \iff y = C\,e^{2t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(t) = C\,e^{2t}$. Ponemos ahora $G(t) = e^{2t}$ y calculamos

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\frac{1}{e^{2t}}\,dt = \int te^{-2t}\,dt$$

Esta última integral se hace por partes:

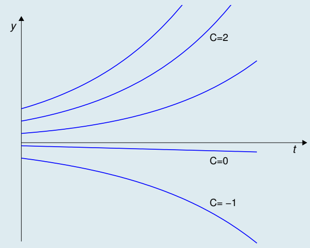
$$\int te^{-2t}\,dt = \begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-2t} & v = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Con esto ya se tiene la solución particular buscada:

$$y_p(t) = K(t)\,G(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t + \frac{1}{2}\right)\cdot e^{2t} = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

y, por tanto, también la solución general:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 5.15
Hallar la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 2y + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$

La solución general de la ecuación $y' = 2y + t$ ya se ha calculado en el Ejemplo anterior y es

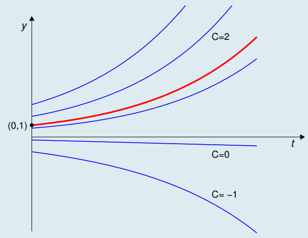
$$y = C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Para hallar la solución del problema de valor inicial, sólo hay que imponer la condición inicial y deducir para qué valor de C se cumple:

$$1 = y(0) = Ce^{0} - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = C - \frac{1}{4} \iff C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego la solución buscada es:

$$y = \frac{5}{4}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

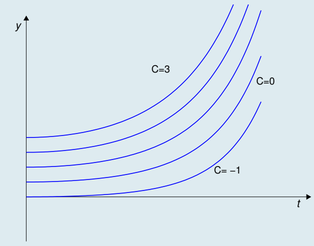


Ejemplo 5.16
Calcular la solución general de $y' = ty + te^{t^2}$
Se calcula en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = ty \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int t dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}\,t^2 + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{t^2/2}$$

Así pues, la solución general de la homogénea es $y_h(t) = C\,e^{t^2/2}$. Ponemos $G(t) = e^{t^2/2}$.
Ahora, para hallar una solución particular de la ecuación completa, se calcula

$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,\frac{1}{e^{t^2/2}}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,e^{-t^2/2}\,dt = \int t\,e^{t^2/2}\,dt = e^{t^2/2}$$



En consecuencia, la solución particular buscada es

$$y_p(t) = e^{t^2/2}e^{t^2/2} = e^{t^2}$$

y la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,e^{t^2/2} + e^{t^2}$$

Ejemplo 5.17
Calcular la solución general de $ty' - y = t$

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello dividimos toda la ecuación por t y pasamos el término en y al segundo miembro:

$$ty' - y = t \quad\Rightarrow\quad y' - \frac{1}{t}y = 1 \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{1}{t}y + 1$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C\,t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \Rightarrow y_p(t) = t\,\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + t\,\ln|t|, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 5.18
Calcular la solución general de $y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}$

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello pasamos el término en y al segundo miembro:

$$y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \Rightarrow \quad y' = -y\cos(t) + e^{-\operatorname{sen}(t)}$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = -\cos(t)\, y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \cos(t)\, dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = -\operatorname{sen}(t) + C \;\Leftrightarrow$$

$$y_h = C\, e^{-\operatorname{sen}(t)} \Rightarrow G(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\, dt = \int e^{-\operatorname{sen}(t)} e^{\operatorname{sen}(t)}\, dt = \int dt = t \Rightarrow y_p = t\, e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, e^{-\operatorname{sen}(t)} + t\, e^{-\operatorname{sen}(t)} = (C + t)\, e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 5.19
Calcular la solución general de $y' = \frac{1}{t}y + 2t + 1$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}\, y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y = C\, t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\, dt = \int \frac{2t+1}{t}\, dt = \int \left(2 + \frac{1}{t}\right) dt = 2t + \ln|t|$$

$$\Rightarrow y_p = K(t)G(t) = (2t + \ln|t|)\, t = 2t^2 + t\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, t + 2t^2 + t\ln|t| \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

5.5 Equilibrio y estabilidad

Ecuaciones diferenciales autónomas

En muchas ocasiones, un sistema (físico, biológico,...), se representa mediante una ecuación de la forma:

$$y' = f(y) \tag{5.10}$$

donde f es una función dada que sólo depende de y, es decir, **en la que no aparece explícitamente la variable independiente t**. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales autónomas**.

Para entender lo que significa que una ecuación sea autónoma, supongamos un modelo simple de crecimiento: supongamos que el número de bacterias en un cultivo viene dado por una solución de la ecuación:

$$y' = 2y \tag{5.11}$$

siendo y una función que depende de la variable independiente t (que no aparece explícitamente), que representa el tiempo medido en horas. La solución general de esta ecuación es

$$y(t) = C\,e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{5.12}$$

y la constante C se podrá determinar si se conoce el tamaño de la población de bacterias en algún instante t.

Supongamos que se realiza un experimento comenzando con una población de 100 bacterias en el instante $t = 0$. Entonces la solución que nos interesa es la que cumple la condición inicial $y(0) = 100$. Para obtener su expresión, sustituimos en la solución general y hallamos el valor adecuado de la constante arbitraria C:

$$100 = y(0) = Ce^0 \;\Leftrightarrow\; C = 100, \qquad \text{de donde la solución es} \quad y(t) = 100\,e^{2t}$$

Esta solución nos dice que, por ejemplo, 4 horas después de comenzar el experimento, el número de bacterias presentes en el cultivo habrá aumentado hasta

$$y(4) = 100\,e^8 \approx 298100$$

Supongamos ahora que repetimos el mismo experimento, pero 10 horas después, de manera que ahora la condición inicial será $y(10) = 100$. Sustituyendo en la solución general encontraremos:

$$100 = y(10) = Ce^{20} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{100}{e^{20}} \approx 0.20612 \times 10^{-6} = 0.00000020612,$$

de donde la solución es

$$y(t) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2t}$$

El número de bacterias presentes en el cultivo 4 horas después de empezar este segundo experimento será:

$$y(10+4) = y(14) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2\times 14} = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{28} \approx 298100$$

es decir, la misma cantidad que en el caso del primer experimento.

Esto significa que la evolución del sistema que se estudia no depende del momento en que se realiza el experimento. Sólo depende del número de bacterias inicialmente existentes.

Lógicamente, si la forma de evolucionar de un sistema dependiera del tiempo en que se desarrolla, no se podría modelar mediante una ecuación diferencial autónoma. Sería necesaria una dependencia temporal explícita en la ecuación.

Soluciones de equilibrio o puntos fijos

Solución de equilibrio o punto fijo.
Se llaman **soluciones de equilibrio** o también **puntos fijos** de la ecuación

$$y' = f(y)$$

a sus **soluciones constantes**.

Ejemplo 5.20

La ecuación $y' = ky$ tiene la solución de equilibrio $y = 0$.
La ecuación $y = y - 2y^2$ tiene las soluciones de equilibrio $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{2}$.

El estudio de las soluciones de equilibrio de una ecuación diferencial tiene interés porque son soluciones "de referencia" para averiguar el comportamiento de las demás soluciones de la ecuación diferencial.

La propiedad básica de las soluciones de equilibrio es que si, inicialmente, el sistema está en un estado de equilibrio, permanecerá en dicho estado en todos los instantes posteriores (a menos que alguna fuerza externa perturbe el sistema). Por ejemplo, si inicialmente $y(0) = K$ y K es una solución de equilibrio, entonces $y(t) = K$ para todo t.

Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial de $y' = f(y)$ son las funciones constantes $y = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha) = 0.$$

Ejemplo 5.21
Calcular los puntos fijos de la ecuación $y' = 2y - y^3$

Se tiene que $f(y) = 2y - y^3 = y(2 - y^2)$. Luego

$$f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2 - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego los puntos fijos o soluciones de equilibrio son $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$.

Estabilidad de soluciones de equilibrio

La **estabilidad** de las soluciones de equilibrio es de gran interés, ya que permite conocer el comportamiento de las soluciones «cercanas» a las de equilibrio.

Solución estable
Se dice que la solución de equilibrio $y = \alpha$ de la ecuación diferencial $y' = f(y)$ es **localmente estable** si las soluciones de la ecuación que parten de condiciones iniciales *ligeramente* distintas del equilibrio tienden a *acercarse* a la solución de equilibrio.
En caso contrario se dice que la solución de equilibrio es **inestable**.

Este concepto se entiende claramente con los dos ejemplos de la Figura 5.1.

El término **localmente** se refiere al comportamiento cuando se producen **pequeñas** perturbaciones, pero no se presupone nada de lo que sucede cuando se producen grandes perturbaciones.

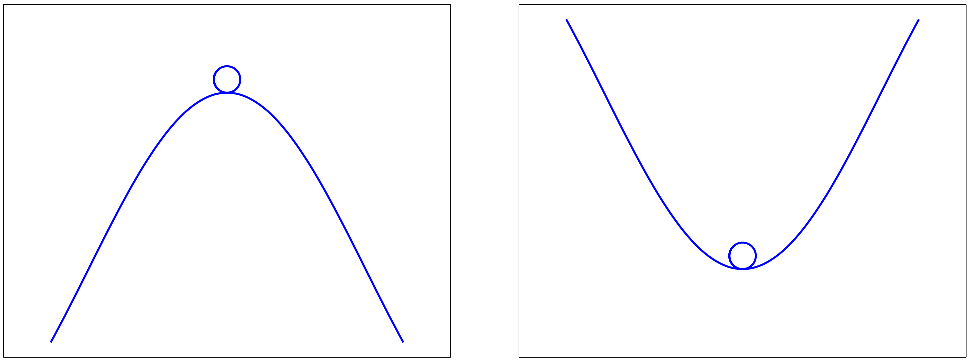


Figura 5.1: Ilustración de los dos tipos de estabilidad mediante el ejemplo de una bola en la cima de una colina y una bola en el fondo de un valle. Ambos son estados de equilibrio: la bola está en reposo. Sin embargo en el caso del valle su situación es estable, ya que una pequeña perturbación de su posición sería momentánea y la bola volvería a su posición inicial. Mientras que en el caso de la colina, la situación de la bola es inestable, ya que una pequeña perturbación de su posición haría que la bola rodase por la ladera de la colina, y sería imposible volver a la cima.

Damos, sin justificación, el siguiente criterio analítico para identificar cuándo una solución de equilibrio es localmente estable o inestable.

Criterio de estabilidad
Se considera la ecuación diferencial

$$y' = f(y),$$

donde f es una función derivable. Supongamos que $y = \alpha$ es una solución de equilibrio, es decir que $f(\alpha) = 0$. Entonces

- La solución $y = \alpha$ es **localmente estable** si $f'(\alpha) < 0$
- La solución $y = \alpha$ es **inestable** si $f'(\alpha) > 0$

En el caso en que $f'(\alpha) = 0$ no se puede sacar ninguna conclusión.

Ejemplo 5.22
Estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $y' = 2y - y^3$.

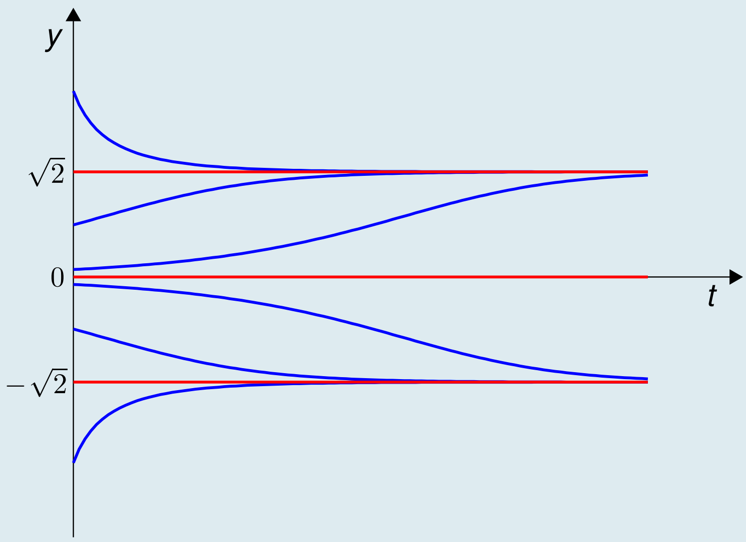
Hemos visto en un ejemplo anterior que $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ son soluciones de equilibrio de esta ecuación. Para ver si son localmente estables o no aplicamos el criterio de estabilidad. Se tiene que

$$f'(y) = 2 - 3y^2.$$

Luego

- $f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow y = 0$ es una solución de equilibrio inestable.
- $f'(\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ es localmente estable.
- $f'(-\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ es localmente estable.

En la Figura se puede comprobar el comportamiento de las demás soluciones de esta ecuación diferencial con respecto a las soluciones de equilibrio: vemos que las soluciones $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ (estables) "atraen" a otras soluciones, mientras que la solución $y = 0$ (inestable) "repele" a las otras soluciones.



5.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales, debido a que relacionan los valores de una función con los de su(s) derivada(s), son una herramienta fundamental en el tratamiento matemático de cualquier fenómeno dinámico, es decir, que involucre magnitudes que cambian con el tiempo (o con cualquier otra magnitud). Por ello, sus campos de aplicación son numerosos en física, química, biología, economía, ... Se presentan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 5.23

En 1990 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de cierta especie de peces, de la que previamente no había ninguno. En 1997 se estimó que la cantidad de peces de esa especie que había en el lago en aquel momento era de 3000. Suponiendo que la velocidad de crecimiento de la población de peces es constante, calcular la cantidad de peces en los años 2000 y 2010.

Que la velocidad de crecimiento de la población sea constante significa que, si llamamos

$$p(t) \quad \equiv \quad \text{número de peces en el instante } t$$

se tiene que

$$p'(t) = k \qquad \text{(constante)} \tag{5.13}$$

El valor de esta constante, k, no lo conocemos, de momento, pero veremos cómo se puede deducir utilizando adecuadamente el resto de la información de que disponemos.
La ecuación (5.13) se puede resolver (dejando la constante k como un parámetro) y se tiene

$$p(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{5.14}$$

Ahora tenemos dos constantes "desconocidas": k y C. Pero también tenemos dos informaciones que utilizar: sabemos que

1. $p(0) = 1000$ (inicialmente había 1000 peces)
2. $p(7) = 3000$ (7 años después había 3000 peces)

Sustituyendo estos valores en (5.14) se tiene:

$$\begin{cases} 1000 = p(0) = k \cdot 0 + C = C \Leftrightarrow C = 1000 \\ 3000 = p(7) = k \cdot 7 + C = 7k + 1000 \Leftrightarrow 7k = 2000 \Leftrightarrow k = \dfrac{2000}{7} \end{cases}$$

Con esto ya se tiene la expresión exacta de la función que nos da el número de peces que hay en el lago en cualquier instante t:

$$p(t) = \frac{2000}{7}\, t + 1000$$

y, con ella, ya se puede calcular lo que nos piden:

$$p(10) = \frac{2000}{7} \cdot 10 + 1000 = \frac{27000}{7} \approx 3857$$

$$p(20) = \frac{2000}{7} \cdot 20 + 1000 = \frac{47000}{7} \approx 6714$$

Así pues, la solución es

$$\boxed{\text{En el año 2000 había 3857 peces.}}$$

$$\boxed{\text{En el año 2010 había 6714 peces.}}$$

Ejemplo 5.24
Si el número de bacterias contenidas en 1 litro de leche se duplica en 4 horas y suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor.

Sea $y(t)$ el número de bacterias en el instante t.
Suponer que la tasa de multiplicación de la población de bacterias es constante consiste en suponer que

$$y'(t) = k \qquad k = \text{constante} \tag{5.15}$$

El valor de la constante k, que de momento es desconocido, se puede deducir a partir de la información adicional que tenemos.
Comenzamos por resolver la ecuación diferencial (5.15):

$$y(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{5.16}$$

La información de que disponemos es

$$\begin{cases} y(0) = y_0 & \text{número inicial de bacterias} \\ y(4) = 2y_0 & \text{el número de bacterias se duplica en 4 horas} \end{cases}$$

Sustituimos estos datos en (5.16)

$$y_0 = y(0) = k \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = y_0$$

$$2y_0 = y(4) = k \cdot 4 + C = 4k + y_0 \Leftrightarrow y_0 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{y_0}{4}$$

En consecuencia la función que nos da el número de bacterias en cualquier instante t es

$$y(t) = \frac{y_0}{4}\,t + y_0 = \frac{y_0}{4}(t+4)$$

siendo y_0 = número inicial de bacterias.
Lo que se desea saber es en qué instante, t, el número de bacterias será igual a 25 veces el número que había inicialmente.

$$25\,y_0 = y(t) = \frac{y_0}{4}(t+4) \Leftrightarrow 100 = t + 4 \Leftrightarrow t = 100 - 4 = 96$$

Así pues, la solución es $\boxed{\text{96 horas}}$.

5.6.1 Dinámica de poblaciones: modelo de Malthus o exponencial

El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales y constituye, de hecho, uno de los principales campos de aplicación de las Matemáticas a la Biología.

Cuando una población no está sujeta a condicionantes externos (falta de alimentos, competencia por el espacio, por los recursos, ...) su ritmo de crecimiento o decrecimiento es debido únicamente al equilibrio entre su tasa de natalidad y su tasa de mortandad: la velocidad de crecimiento de la población (o de decrecimiento, si nacen menos individuos de los que mueren) es proporcional al número de individuos que la componen.

Para expresar esto matemáticamente, denotemos

$$N = N(t) \quad \text{número de habitantes en el instante } t.$$

Entonces, la velocidad de crecimiento de la población, N'(t), verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = r\,N, \tag{5.17}$$

donde r es una constante, que caracteriza la tasa de crecimiento de la población, y que usualmente se determina experimentalmente.

Si $r > 0$ la población aumentará de tamaño, por ser la velocidad de crecimiento positiva, mientras que si $r < 0$ la población disminuirá de tamaño.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $N(0) = N_0$, entonces $N(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} N' = r\,N \quad t \geq 0 \\ N(0) = N_0\,. \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente, ya que es de variables separables (ver la Sección 5.3):

$$\int \frac{1}{N}\,dN = \int r\,dt$$

$$\ln |N| = rt + C$$

$$N = C\,e^{r\,t}$$

e, imponiendo la condición inicial $N(0) = N_0$, se obtiene

$$N = N_0\,e^{r\,t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de r, se representa en la Figura 5.2.

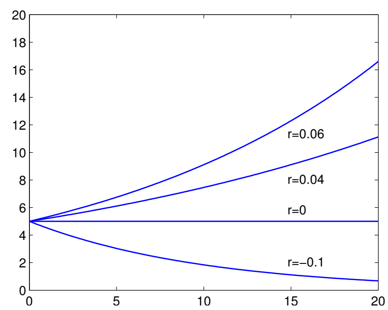


Figura 5.2: Representación gráfica de la función $N = 5\,e^{rt}$, solución de (5.18) con $N_0 = 5$, para varios valores de r.

Obsérvese que cuanto mas grande sea r, mas rápido es el crecimiento de la población, y que cuando $r < 0$ la población decrece. Para $r = 0$ el tamaño de la población permanece constante.

Este modelo de crecimiento de poblaciones recibe su nombre de Thomas Malthus (1766-1843), un clérigo y economista británico considerado el padre de la demografía. Basándose en este modelo, él dedujo que el crecimiento (exponencial) del número de seres humanos sobre la Tierra conduciría a épocas de grandes hambrunas, ya que la cantidad disponible de alimentos no aumentaría en la misma proporción que la población humana.

Este modelo de crecimiento de poblaciones es, como resulta obvio, excesivamente simple para reflejar situaciones tan complejas como la de la población humana sobre la tierra. Sin embargo, resulta útil para modelizar matemáticamente algunos experimentos controlados en laboratorio con determinadas especies de microorganismos, en sus etapas iniciales de desarrollo. Por ejemplo, si se inicia el cultivo de una pequeña colonia de bacterias sobre un sustrato rico en nutrientes, entonces las bacterias pueden crecer y reproducirse sin restricciones, al menos durante un cierto periodo de tiempo. (Un modelo más elaborado de dinámica de poblaciones, en el que se imponen restricciones al crecimiento de la población, teniendo en cuenta otros aspectos vitales, se expone en la Sección 5.6.6).

Ejemplo 5.25
(*Cultivo de bacterias en laboratorio*) Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se duplica cada 3 horas. Calcular la población existente al cabo de 11 horas.

Denotemos por $P(t)$ al número de bacterias (en millones) que forman la población en el instante de tiempo t. Se comienza a medir el tiempo ($t = 0$) en el instante en que se inicia el cultivo en el laboratorio.
Según se indica en el enunciado, la tasa de crecimiento de la población (velocidad a la que crece), $P'(t)$, es directamente proporcional al número de bacterias de la población, es decir a $P(t)$, lo que significa que es de la forma $kP(t)$ para alguna constante k que, de momento, no conocemos.

Esto significa que la población considerada sigue la ley (de Malthus):

$$P' = kP \quad \text{ecuación diferencial cuyas soluciones son} \quad P(t) = C\, e^{kt}$$

Para determinar las dos constantes C y k hay que utilizar las dos informaciones dadas:

$$\begin{cases} P(0) = 2.5 \text{ (millones de bacterias)} \\ P(3) = 2 \times 2.5 = 5 \text{ (millones de bacterias)} \end{cases}$$

De la primera de ellas se tiene

$$2.5 = P(0) = C \;\Leftrightarrow\; P(t) = 2.5\, e^{kt}$$

y de la segunda

$$5 = P(3) = 2.5\, e^{3k} \;\Leftrightarrow\; e^{3k} = \frac{5}{2.5} = 2 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0.231.$$

Luego, finalmente, la ley seguida por la población de bacterias es

$$P(t) = 2.5\, e^{0.231\, t}.$$

El conocimiento de esta función nos permite conocer el número de bacterias que habrá en el cultivo en cualquier instante (siempre y cuando, naturalmente, el modelo siga siendo válido). Por ejemplo, para saber cuántas bacterias habrá 11 horas después de iniciar el experimento, bastará calcular

$$P(11) = 2.5\, e^{0.231 \times 11} \approx 31.75.$$

$$\boxed{\text{Al cabo de 11 horas habrá aproximadamente 31.75 millones de bacterias}}$$

Ejemplo 5.26
(Población mundial). **La población mundial en el año 1985 era de aproximadamente 4830 millones de personas y, en aquel momento, crecía a un ritmo de un $1.73\,\%$ por año. Suponiendo que el crecimiento de la población se rigiera por el modelo exponencial, calcular el valor estimado de la población mundial en el año 2010.**

La ley de Malthus (o de crecimiento exponencial) dice que el número de individuos de la población en el instante t, $P(t)$, verifica la ecuación diferencial:

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{cuya solución general es} \quad P(t) = C\,e^{kt}$$

En esta expresión hay dos constantes que no se conocen (de momento): k y C. Para determinar su valor utilizaremos el resto de la información:

1. $P(1985) = 4830$ millones.
2. La población crece un $1.73\,\%$ cada año, de donde, por ejemplo, en el año 1986, la población se habría incrementado en un $1.73\,\%$ de 4830 millones, es decir

$$P(1986) = 4830 + \frac{1.73}{100}\,4830 = \left(1 + \frac{1.73}{100}\right) 4830 = 4913 \text{ millones.}$$

De ambos datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 4830 = P(1985) = C\,e^{1985\,k} \\ 4913 = P(1986) = C\,e^{1986\,k} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4830}{4913} = \frac{C\,e^{1985\,k}}{C\,e^{1986\,k}} = \frac{e^{1985\,k}}{e^{1986\,k}} = e^{1985\,k}\cdot e^{-1986\,k} = e^{-k},$$

y de aquí

$$\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) = -k \;\Leftrightarrow\; k = -\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) \approx 0.0170$$

Ahora, una vez conocido el valor de k, se tiene:

$$4830 = P(1985) = C\,e^{0.0170\times 1985} = C\,e^{33.7450} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{4830}{e^{33.7450}} \approx 1.0683\times 10^{-11}$$

Así, gracias a la información proporcionada se tienen ya los valores de las constantes C y k y por tanto la expresión de $P(t)$:

$$P(t) = 1.0683\times 10^{-11}\,e^{0.0170\,t}$$

Utilizando esta expresión se deduciría que el número de seres humanos en la tierra en el año 2010 sería:

$$P(2010) = 1.0683\times 10^{-11}\,e^{0.0170\times 2010} \approx 7388 \text{ millones de personas}$$

(la población real en el año 2010 era de 6972 millones de personas).

Observación: este ejercicio también se puede hacer (y, de hecho, los cálculos son más fáciles) situando el origen, $t=0$, de la variable independiente en el año 1985, de modo que el año 1986 correspondería a $t=1$ y el año 2010 correspondería a $t=25$. Entonces tendríamos la información $P(0)=4830$ y $P(1)=4913$ y lo que se desea es calcular $P(25)$.

5.6.2 Ley de enfriamiento de Newton

En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del ambiente que lo rodea y su propia temperatura. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = k(M - T(t)), \tag{5.19}$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, entonces la temperatura del objeto en cualquier instante posterior $T(t)$, viene dada por la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} T' = k(M - T), \\ T(0) = T_0 . \end{cases} \tag{5.20}$$

Esta ecuación es de variables separables y su solución general es

$$T(t) = M + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La solución particular que verifica $T(0) = T_0$ es

$$T(t) = M + (T_0 - M)e^{-kt}.$$

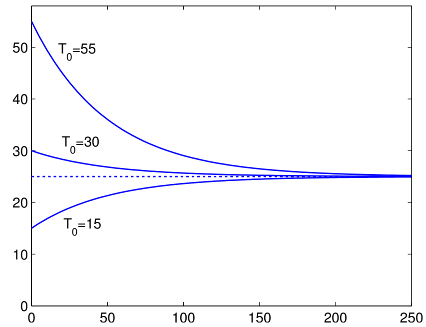


Figura 5.3: Representación gráfica de la solución de (5.20), para $M = 25$, $k = 0.02$ y varios valores del dato inicial T_0.

En la Figura 5.3 están representadas las soluciones del problema (5.20) para diversos valores del dato inicial T_0. Obsérvese que, como es obvio intuitivamente, la temperatura del objeto varía más rápidamente cuanto mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

Por otro lado, sea cual sea su temperatura inicial, la temperatura del objeto tiende, cuando pasa el tiempo, a igualarse con la temperatura del medio: todas las soluciones tienen una asíntota horizontal en $T = M$.

Ejemplo 5.27
(*Ley de enfriamiento de Newton*) Un recipiente con agua hirviendo ($100°$C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande que se encuentra a una temperatura constante de $20°$C. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta $80°$C:
a) Determinar la constante de proporcionalidad k.
b) Determinar el tiempo que tardará el agua del recipiente en descender hasta una temperatura de $30°$C.

a) Sea $y = y(t)$ la temperatura del agua (en grados Celsius) en el instante de tiempo t (medido en minutos). Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura del objeto sigue la ley

$$y' = k(20 - y),$$

donde k es una constante propia del objeto.
Comenzamos observando que esta ecuación tiene la solución trivial $y = 20$ (constante).
La ecuación es de variables separables y se integra fácilmente:

$$\int \frac{1}{20-y}\, dy = k \int dt \;\Leftrightarrow\; -\ln|20-y| = kt + C \;\Leftrightarrow\; y = 20 - C\, e^{-kt}.$$

La solución trivial $y = 0$ está contenida en esta familia para el valor de $C = 0$.
En la expresión de y hay 2 constantes que determinar: k y C. Para determinarlas disponemos de 2 datos:

$$y(0) = 100 \quad \text{e} \quad y(5) = 80$$

(1) De $100 = y(0) = 20 - C$ se tiene que $C = -80$

(2) De $80 = y(5) = 20 + 80\, e^{-5k}$ se tiene

$$\frac{80-20}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = e^{-5k} \;\Leftrightarrow\; -5k = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \;\Leftrightarrow\; \boxed{k \approx 0.0575}$$

En consecuencia, la función que da la temperatura del agua es:

$$\boxed{y(t) = 20 + 80\, e^{-0.0575\, t}}$$

b) Se trata ahora de averiguar para qué valor de t alcanza $y(t)$ (descendiendo) el valor 30°C. Es decir, para qué valor de t se tiene

$$30 = 20 + 80\, e^{-0.0575\, t}$$

Operando en esta ecuación se tiene

$$\frac{30-20}{80} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = e^{-0.0575\, t} \;\Leftrightarrow\; -0.0575\, t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{-1}{0.0575}\ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 36.1642$$

Es decir, $\boxed{\text{aproximadamente 36 minutos}}$.

Ejemplo 5.28
Un cadáver es encontrado en una nave industrial que está a una temperatura constante de 20°C. En el momento de ser encontrado, la temperatura del cadáver es de 35°C. Al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34°C. Suponiendo que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37°C, y que se cumple la Ley de Enfriamiento de Newton, calcular a qué hora se produjo la muerte.

Denotamos por $T = T(t)$ la temperatura del cadáver en el instante t, comenzando a contar el tiempo en el momento del crimen. Puesto que sigue la ley de Newton y en el momento inicial ($t = 0$) era de 37°C, la función $T(t)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} T' = k(M - T) = k(20 - T) \\ T(0) = 37 \end{cases}$$

La solución general de la anterior ecuación es (véase el Ejemplo 5.27) $T(t) = 20 - C\,e^{-kt}$. La solución trivial $T = 20$ está incluída para $C = 0$.

Lo que queremos saber es el tiempo pasado desde el momento de la muerte hasta que se encontró el cadaver. Si situamos el momento de la muerte en el instante $t = 0$, y denotamos por $\tilde{t}$ al instante (desconocido de momento) en que se encontró el cadaver, la información que tenemos es la siguiente:

$$\begin{cases} T(0) = 37 \\ T(\tilde{t}) = 35 \\ T(\tilde{t}+1) = 34 \end{cases}$$

Con estos 3 datos debemos ser capaces de encontrar los valores de k, de C y de $\tilde{t}$.

$$37 = T(0) = 20 - C \;\Leftrightarrow\; C = 20 - 37 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{C = -17}$$

$$35 = T(\tilde{t}) = 20 + 17\,e^{-k\tilde{t}} \;\Leftrightarrow\; e^{-k\tilde{t}} = \frac{35-20}{17} = \frac{15}{17}$$

$$34 = T(\tilde{t}+1) = 20 + 17\,e^{-k(\tilde{t}+1)} = 20 + 17\,e^{-k\tilde{t}}\,e^{-k} = 20 + 17\,\frac{15}{17}\,e^{-k} = 20 + 15\,e^{-k} \;\Leftrightarrow\; e^{-k} = \frac{34-20}{15} = \frac{14}{15}$$

De la última igualdad se tiene que

$$-k = \ln\left(\frac{14}{15}\right) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{k = -\ln\left(\frac{14}{15}\right) \approx 0.0690}$$

Una vez conocido el valor de k, de la igualdad $e^{-k\tilde{t}} = \dfrac{15}{17}$ se puede despejar $\tilde{t}$ tomando logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-k\tilde{t}} = \frac{15}{17} \;\Leftrightarrow\; -k\tilde{t} = \ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} = -\frac{1}{k}\,\ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} \approx 1.8141 \text{ horas } \approx \boxed{1 \text{ hora } 49 \text{ minutos}}$$

Así pues, el cadáver fué encontrado 1 hora y 49 minutos después de su muerte.

5.6.3 Dinámica de crecimiento de un individuo: modelo de Bertalanffy.

En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo matemático para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t y sea A la talla máxima de la especie, es decir la talla máxima alcanzable por un pez adulto.

La ley de crecimiento de este modelo dice que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima:

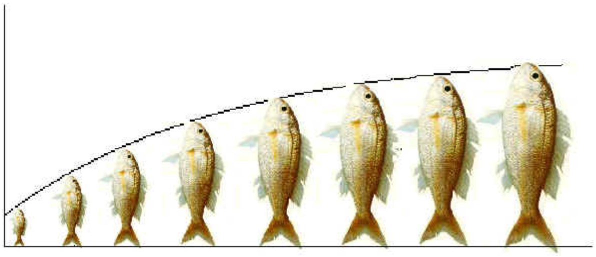


Figura 5.4: Modelo de Bertalanffy.

$$L'(t) = k(A - L(t)),$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la longitud del individuo es $0 < L_0 < A$, entonces la función $L(t)$, talla en el instante t, será solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} L' = k(A - L) \\ L(0) = L_0 \,. \end{cases} \tag{5.21}$$

Como la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima alcanzable disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye también con el tiempo, lo que implica que los ejemplares de menor edad crecen a mayor velocidad que los de mayor edad. En este modelo, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que es lo que ocurre en la realidad.

La ecuación diferencial de (5.21) se puede integrar fácilmente, ya que es de variables separables:

$$\int \frac{dL}{A - L} = \int k\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln|A - L| = kt + C \quad \Longleftrightarrow \quad A - L = Ce^{-kt}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$L = A + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ arbitraria.}$$

Imponiendo la condición inicial, $L(0) = L_0$, se tiene

$$L_0 = L(0) = A + Ce^0 = A + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = L_0 - A,$$

luego la solución del problema (5.21) es

$$L(t) = A + (L_0 - A)e^{-kt}.$$

En la Figura 5.5 está representada la solución del problema (5.21) para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$. Obsérvese que la recta horizontal $L = A$ es una asíntota horizontal de la solución, es decir,

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = A,$$

lo que expresa matemáticamente el hecho de que la talla de los peces tiende, cuando pasa el tiempo, a aproximarse al valor A, pero sin nunca alcanzarlo.
Por ello se puede decir que A es la **longitud asintótica** de la especie.

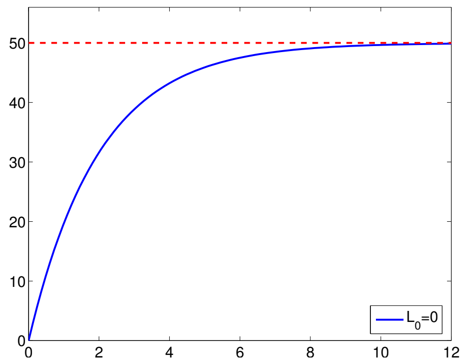


Figura 5.5: Representación gráfica de la solución de (5.21), para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.

Ejemplo 5.29
(*Modelo de Bertalanffy*) Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se supone que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de von Bertalanffy):

$$\begin{cases} L' = k(34 - L) \\ L(0) = 2. \end{cases}$$

1) Sabiendo que a la edad de 4 meses, el pez mide 10 centímetros, determinar la constante de crecimiento k.
2) Calcular la longitud del pez a los 10 meses.
3) Calcular $\lim_{t\to\infty} L(t)$ y dar una interpretación del resultado en el marco de la dinámica del crecimiento del pez.

La solución del problema de valor inicial se calcula fácilmente por ser la ecuación de variables separables:

$$L' = k(34 - L) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{34 - L}\, dL = k \int dt \;\Leftrightarrow\; -\ln|34 - L| = kt + C$$

de donde se tiene $L = 34 - Ce^{-kt}$ e, imponiendo la condición inicial $L(0) = 2$, se encuentra el valor de la constante $C = 32$.
Luego la longitud del pez viene dada por

$$L(t) = 34 - 32\, e^{-kt}.$$

Para determinar el valor de k es necesario utilizar más información: $L(4) = 10$. Entonces,

$$10 = L(4) = 34 - 32\, e^{-4k} \;\Leftrightarrow\; e^{-4k} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0.0719.$$

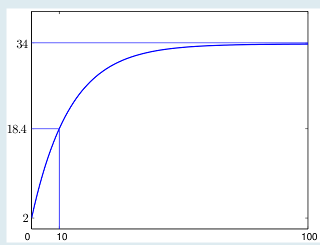
Una vez conocido el valor de k se puede calcular la longitud del pez en cualquier instante $t > 0$:

$$L(10) = 34 - 32\, e^{-10k} \approx 18.4 \text{ cm}.$$

Por último, es obvio que

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = \lim_{t\to+\infty} 34 - 32\, e^{-kt} = 34 - 32 \lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 34,$$

lo cual significa que la curva que representa la longitud del pez tiene una asíntota horizontal en $L = 34$. El pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 34, aunque sin nunca llegar a alcanzarlo.



5.6.4 Problemas de mezclas

En esta sección se estudian ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen en problemas en los que se mezclan dos fluidos.

Más concretamente, se considera un recipiente que contiene una cantidad de V litros de cierto fluido, en el que se encuentra disuelta una cantidad, x_0, de cierta sustancia. En el recipiente entra constantemente fluido con una concentración de c_e gramos por litro y a una velocidad de v_e litros por minuto. Se supone que los fluidos en el recipiente se mezclan de forma instantánea y que la mezcla sale del recipiente a una velocidad de v_s litros por minuto.

Lo que se desea es determinar una función que indique la cantidad de sustancia que hay en el interior del recipiente en cada instante, t.

Llamemos $v(t)$ a la cantidad de fluido (litros) presente en el recipiente en el instante t, y $x(t)$ a la cantidad de sustancia disuelta (gramos) en el instante t, de forma que la concentración de sustancia disuelta en el instante t es $x(t)/v(t)$ gramos por litro.

La variación de la magnitud $x(t)$ por unidad de tiempo es $x'(t)$ y viene dada por la diferencia entre la cantidad de sustancia que entra (por unidad de tiempo) y la cantidad de sustancia que sale (por unidad de tiempo):

$$x'(t) = \boxed{\begin{array}{c}\text{Variación de } x(t)\\ \text{por unidad de tiempo}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{entra por unidad de tiempo}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{sale por unidad de tiempo}\end{array}}$$

Puesto que entran v_e litros por minuto, que contienen una concentración c_e gramos de sustancia por litro, se tiene que entran $c_e \cdot v_e$ gramos por minuto de sustancia.

La concentración de sustancia en el fluido que sale es la del fluido en el interior del recipiente, es decir $x(t)/v(t)$ gramos por litro. Puesto que salen v_s litros por minuto, se tiene que salen $x(t)v_s/v(t)$ gramos por minuto de la sustancia disuelta.

Así pues, la variación de la concentración, $x'(t)$, verifica:

$$x'(t) = c_e\, v_e - \frac{x(t)}{v(t)}\, v_s$$

La expresión de $v(t)$, cantidad de fluido en el recipiente en el instante t, deberá ser determinada en cada caso, ya que depende de la cantidad inicial y de las velocidades de entrada y salida del fluido en el recipiente. Si, por ejemplo, la velocidad de entrada de fluido es igual a la velocidad de salida, entonces el volumen en el interior del recipiente permanecerá constante.

Ejemplo 5.30
(*Problema de mezclas*) Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2.5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se supone uniforme de forma instantánea) sale del depósito a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

Puesto que la velocidad a la que entra el líquido en el depósito es la misma a la que sale, en el depósito siempre hay la misma cantidad de líquido: 100 litros.
Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el depósito en el instante t.
La variación por unidad de tiempo de la cantidad de sal en el depósito es:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por unidad de tiempo} - \text{cantidad que sale por unidad de tiempo}$$

En el depósito entran 5l. por minuto de una disolución con 2gr. por litro, luego entran 10gr. de sal por minuto. Puesto que la cantidad de sal en el depósito es $x(t)$ y la cantidad de líquido que hay es 100l., la concentración de la disolución en el depósito es de $x(t)/100$ gramos por litro. Esta disolución sale a una velocidad de 5 litros por minuto, por lo tanto la sal sale a una velocidad de $5x(t)/100$ gramos por minuto.
Así pues, se tiene:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100} = \frac{1000 - 5x}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{1000 - 5x}\, x' = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1000 - 5x}\, dx = \int \frac{1}{100}\, dt \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \ln|1000 - 5x| = \frac{1}{100}\, t + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|1000 - 5x| = -\frac{5}{100}\, t + C = -\frac{1}{20}\, t + C = -0.05t + C \Leftrightarrow 1000 - 5x = C\, e^{-0.05t}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 1000 - C\, e^{-0.05t} \Leftrightarrow x = \frac{1000 - C\, e^{-0.05t}}{5} = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Puesto que, inicialmente, la concentración de sal en el depósito era de 2.5 gramos por litro, la cantidad de sal inicial era de

$$x(0) = 2.5 \times 100 = 250$$

Sustituyendo esta condición inicial en la expresión de la solución general se tiene

$$250 = x(0) = 200 - C \Leftrightarrow C = -50$$

Luego la función que nos da la cantidad de sal en cualquier instante t es:

$$\boxed{x(t) = 200 + 50e^{-0.05t}}$$

Ejemplo 5.31
(*Problema de mezclas*) La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 gr/cm^3, se pide:
1) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?
2) ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 gr/cm^3?

La cantidad de medicamento que entra en el órgano por segundo es:

$$0.2 \times 3 = 0.6 \text{ gramos}$$

Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t se tendrá, puesto que la sangre abandona el órgano a la misma velocidad a la que entra ($3\,\text{cm}^3/\text{sg}$), que la cantidad de medicamento que abandona el órgano por segundo será de

$$3\,\frac{x(t)}{125} = \frac{3}{125}\,x(t)$$

En consecuencia, puesto que la variación por unidad de tiempo (i.e., por segundo) de la cantidad de medicamento viene dada por:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por segundo} - \text{cantidad que sale por segundo}$$

se tiene

$$x' = 0.6 - \frac{3}{125}\,x = \frac{75-3x}{125}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$\int \frac{1}{75-3x}\,dx = \frac{1}{125}\int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|75-3x| = \frac{t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; \ln|75-3x| = -\frac{3t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; 75-3x = C\,e^{-3t/125}$$

Despejando aquí x se obtiene la solución general de la ecuación:

$$x = 25 - C\,e^{-3t/125}$$

Puesto que, inicialmente, no había ninguna cantidad de medicamento en el órgano, la condición inicial para $x(t)$ es $x(0)=0$, lo que conduce, sustituyendo, a:

$$0 = x(0) = 25 - C \;\Leftrightarrow\; C = 25$$

En consecuencia la función que nos da la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante es

$$x(t) = 25(1-e^{-3t/125})$$

La concentración es la cantidad de medicamento dividido por el volumen del órgano, es decir

$$x(t)/125 = \frac{25}{125}(1-e^{-3t/125}) = \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125})$$

Por lo tanto, la contestación a la primera pregunta es que

$$\boxed{\text{La concentración en el instante } t \text{ es } \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125})}$$

Para contestar a la segunda pregunta hay que calcular para qué valor de t se verifica

$$0.1 = \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125}) \;\Leftrightarrow\; 0.5-1 = -0.5 = -e^{-3t/125} \;\Leftrightarrow\; e^{-3t/125} = 0.5 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3t}{125} = \ln 0.5$$

$$\Leftrightarrow\; \boxed{t = -\frac{125}{3}\,\ln 0.5 \approx 28.88 \text{ segundos}}$$

5.6.5 Dinámica de epidemias

Ejemplo 5.32
(*Dinámica de epidemias*) Un modelo simple de propagación de epidemias se obtiene cuando se supone que la rapidez de contagio entre la población es directamente proporcional al número de individuos contagiados multiplicado por el número de individuos no contagiados. Hallar la solución general de esta ecuación.

Denotamos por $I(t)$ el número de infectados por la epidemia en el instante t y por P (constante) el número total de habitantes de la población, de forma que $P - I(t)$ es el número de individuos no infectados. El modelo establece que la velocidad de contagio $I'(t)$ es proporcional al número de infectados $I(t)$ multiplicado por el de no infectados $P - I(t)$. En consecuencia se tiene

$$I' = k\,I\,(P - I) \tag{5.22}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación es de variables separables y tiene las soluciones triviales $I = 0$ e $I = P$. Para calcular las demás:

$$I' = k\,I\,(P - I) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{I(P-I)}\frac{dI}{dt} = k \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = k\int dt = kt + C$$

Para calcular la integral del primer miembro, que es racional, hay que escribir el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{I(P-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{P-I} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} A = 1/P \\ B = 1/P \end{array}\right.$$

En consecuencia, se tiene:

$$\int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = \int \left(\frac{1/P}{I} + \frac{1/P}{P-I}\right) dI = \frac{1}{P}\,(\ln I - \ln(P-I)) = \frac{1}{P}\,\ln\frac{I}{P-I} = kt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\frac{I}{P-I} = P(kt + C) = kPt + PC = kPt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{I}{P-I} = e^{kPt+C} = e^{kPt}\,e^{C} = C\,e^{kPt}$$

Operamos a continuación para despejar I en esta igualdad:

$$I = C\,e^{kPt}\,(P - I) = CPe^{kPt} - Ce^{kPt}\,I$$

$$\Leftrightarrow\; I + Ce^{kPt}\,I = I\,(1 + Ce^{kPt}) = CPe^{kPt} \;\Leftrightarrow\; I = \frac{CPe^{kPt}}{1 + Ce^{kPt}}$$

Con esto ya tenemos la expresión de la solución general de la ecuación (5.22), que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^{kPt}:

$$I = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}}$$

La solución trivial $I = P$ está contenida en esta familia para $C = 0$. Sin embargo la solución $I = 0$ no lo está: para ningún valor que demos a la constante arbitraria C obtendremos la función $I = 0$.
En consecuencia, el conjunto de **todas** las soluciones de la ecuación es:

$$I = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{y además } I = 0.$$

Ejemplo 5.33
(*Gripe aviar*) En una granja de 40.000 aves hay un pollo contagiado con la gripe aviar. Si suponemos que la rapidez de contagio es directamente proporcional al número de aves contagiadas multiplicado por el número de no contagiadas, siendo la constante de proporcionalidad $k = 4 \times 10^{-5}$ (midiendo el tiempo en días), determinar en cuánto tiempo un $75\,\%$ de los pollos de la granja quedarían infectados.

Denotando por $I(t)$ el número de pollos contagiados y por P el número total de pollos de la granja (población total) se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$I' = k\,I\,(P - I)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.
En este caso, $P = 40000$ y $k = 4 \times 10^{-5} = 0.00004$ (de donde $kP = 16 \times 10^4 \times 10^{-5} = 1.6$).
Nos dicen, además, que inicialmente hay un pollo infectado, es decir, que se tiene $I(0) = 1$. En consecuencia, el problema que hay que resolver para obtener la expresión de la función que representa el número de individuos infectados en cualquier instante t es:

$$\begin{cases} I' = k\,I\,(P - I) \\ I(0) = 1 \end{cases} \tag{5.23}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es (véase Ejemplo 5.32):

$$I = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}} \quad \text{(y además } I = 0\text{)}.$$

Buscamos ahora la solución que verifica la condición inicial, $I(0) = 1$.

$$1 = I(0) = \frac{P}{1 + C} \Leftrightarrow C = P - 1 = 39999 \implies \boxed{\text{la solución del problema (5.23) es } I(t) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t}}}$$

Buscamos ahora el valor del tiempo $t^\star$ para el cual $I(t^\star) = 0.75\,P = 30000$. Para este $t^\star$ se tendrá

$$30000 = I(t^\star) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t^\star}} \Leftrightarrow 1 + 39999\,e^{-1.6t^\star} = \frac{40000}{30000} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{-1.6t^\star} = \frac{1}{39999}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{119997} \Leftrightarrow -1.6t^\star = \ln\left(\frac{1}{119997}\right) \Leftrightarrow t^\star = -\frac{1}{1.6}\ln\left(\frac{1}{119997}\right)$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\text{El tiempo que tarda en estar contagiados el } 75\,\% \text{ de los pollos es } t^\star \approx 7.3}$$

Ejemplo 5.34

Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas multiplicado por el número de personas no infectadas. Si denotamos por $I(t)$ el número de personas infectadas en el tiempo t, medido en días, y por P la población total, la dinámica de la infección viene dada por

$$I' = k\,I(P - I),$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. En una población de 10000 habitantes se detecta una enfermedad que afecta inicialmente a 50 personas. Al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas afectadas. Averiguar el número de enfermos que habrá pasados 12 días.

La ecuación $I' = k\,I(P-I)$ es de variables separables y su solución es (véase el ejercicio 5.32):

$$I(t) = \frac{P}{C\,e^{-kPt} + 1} \quad \text{(y además } I = 0\text{)}$$

donde $P = 10000$. Para determinar las constantes C y k disponemos de la siguiente información:

$$I(0) = 50 \quad \text{e} \quad I(3) = 250.$$

En primer lugar,

$$50 = I(0) = \frac{P}{C+1} \Leftrightarrow C = \frac{P}{50} - 1 = 199.$$

En segundo lugar,

$$250 = I(3) = \frac{P}{199\,e^{-3kP} + 1} \Leftrightarrow 199\,e^{-3kP} + 1 = \frac{P}{250} \Leftrightarrow e^{-3kP} = \frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$-3kP = \ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3P}\ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] = \frac{0.5432}{P}.$$

En consecuencia, el número de infectados en cualquier instante $t > 0$ viene dado por

$$I(t) = \frac{P}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1} = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1}$$

y se tiene

$$I(12) = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432\times 12} + 1} \approx 7730$$

$$\boxed{\text{Pasados 12 días habrá 7730 enfermos.}}$$

Ejemplo 5.35

(*Dinámica de epidemias*) En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre el número de estudiantes contagiados y el número de estudiantes no contagiados, se pide:

1) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

2) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

3) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

Por lo que se indica, la función $y(t)$ = número de estudiantes contagiados en el día t es solución de la ecuación diferencial

$$y' = ky(P-y)$$

donde $P = 1000$ es el número de individuos de la población. La solución general de esta ecuación es (véase ejercicio 5.32):

$$y = \frac{P}{C\,e^{-kPt}+1} \quad \text{(y además } y=0)$$

en cuya expresión hay dos constantes desconocidas (de momento) : k y C. Para determinarlas debemos usar el resto de la información:

De $y(0) = 1$ se tiene

$$1 = y(0) = \frac{1000}{C+1} \Leftrightarrow C+1 = P = 1000 \Leftrightarrow C = 999$$

Por otra parte, de $y(4) = 50$ se tiene:

$$50 = y(4) = \frac{P}{C\,e^{-4kP}+1} \Leftrightarrow 50\left(Ce^{-4kP}+1\right) = 50\,C\,e^{-4kP}+50 = P$$

Despejando de aquí e^{-4kP} y tomando luego logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-4kP} = \frac{P-50}{50C} \Leftrightarrow \ln e^{-4kP} = -4kP = \ln\frac{P-50}{50C}$$

$$\Leftrightarrow -kP = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{P-50}{50C}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{950}{49950}\right) \approx -0.9906$$

Así pues,

$$\boxed{\text{El número de personas enfermas el día } t \text{ es } y(t) = \frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t}+1}}$$

Para saber cuándo habrá 500 estudiantes enfermos tenemos que calcular para qué valor de t se tiene

$$\frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t}+1} = 500 \Leftrightarrow 2 = 999\,e^{-0.9906\,t}+1 \Leftrightarrow e^{-0.9906\,t} = \frac{1}{999} \Leftrightarrow -0.9906\,t = \ln\left(\frac{1}{999}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0.9906}\ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx 6.9723$$

Por último, puesto que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{P}{C\,e^{-kPt}+1} = P$$

resulta obvio que esta ley conduce a que, a la larga, la población entera resulta infectada.

5.6.6 Dinámica de poblaciones: ecuación logística

En la Sección 5.6.1, se ha considerado un modelo simple de la dinámica de poblaciones, en el que se supone que no hay limitaciones de alimentos y, por tanto la población puede crecer de manera exponencial. El modelo que se presenta ahora es un poco más complicado. En él se tiene en cuenta la existencia de circunstancias que limitan el crecimiento exponencial de la población.

En determinadas condiciones, el crecimiento de algunas poblaciones se rige por la siguiente ley, denominada **logística**:

$$p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t). \tag{5.24}$$

En esta ecuación $p(t)$ representa el número de individuos de la población existentes en el instante t. El primer término de la derecha de esta ecuación $(r\,p(t))$ expresa matemáticamente el crecimiento natural de la población, debido a la reproducción: la población crece de forma proporcional al número de individuos de la misma. El segundo término $(-m\,p^2(t))$ intenta expresar el hecho de que, si los recursos (alimentos) son limitados, entonces los individuos de la población "compiten" por ellos, impidiendo un crecimiento ilimitado. Este término hace disminuir la velocidad a la que crece la población, razón por la que lleva signo menos.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $p(0) = p_0$, entonces $p = p(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p' = r\,p - m\,p^2, \\ p(0) = p_0\,. \end{cases} \tag{5.25}$$

La ecuación (5.24) es de variables separables, luego:

$$\frac{dp}{dt} = p(r - mp) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p(r-mp)}\,dp = \int dt.$$

Para calcular la integral de la izquierda hay que escribir el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{p(r-mp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{r-mp} \;\Leftrightarrow\; 1 = A(r-mp) + Bp \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1/r \\ B = m/r \end{cases}$$

de donde, $A = 1/r$ y $B = m/r$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{p(r-mp)}\,dp = \int \left(\frac{1/r}{p} + \frac{m/r}{r-mp}\right) dp = \frac{1}{r}\int \left(\frac{1}{p} + \frac{m}{r-mp}\right) dp = \int dt.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{1}{r}\left(\ln|p| - \ln|r-mp|\right) = t + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln\left|\frac{p}{r-mp}\right| = rt + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Tomando ahora exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{p}{r-mp} = C\,e^{rt} \quad \Longleftrightarrow \quad p = Cr\,e^{rt} - Cm\,e^{rt}p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{Cr\,e^{rt}}{1 + Cm\,e^{rt}}.$$

Y de aquí, dividiendo numerador y denominador por Ce^{rt} y renombrando la constante arbitraria C, se tiene, finalmente, la expresión siguiente para la solución general de la ecuación logística:

$$p = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}\;.$$

Por tanto, la solución general de (5.24) es:

$$p(t) = \frac{r}{m + C\, e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.} \tag{5.26}$$

Esta ecuación tiene, además, las soluciones constantes $p = \beta$, para los valores de β que anulen el segundo miembro de la ecuación diferencial, en este caso:

$$\beta(r - m\beta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = r/m, \end{cases}$$

La solución constante $p = r/m$ está incluida en la expresión de la solución general, para el valor de $C = 0$. En cambio, la solución constante $p = 0$ no se obtiene de la expresión de la solución general para ningún valor de la constante arbitraria C: la ecuación logística tiene todas las soluciones dadas por (5.26) y, **además**, la solución constante $p = 0$.

La solución particular que verifica la condición inicial $p(0) = p_0$ se obtiene para el valor de la constante arbitraria $C = \dfrac{r - mp_0}{p_0}$ y es:

$$p(t) = \frac{r\, p_0}{mp_0 + (r - mp_0)\, e^{-rt}}\,.$$

Su comportamiento cualitativo puede observarse en la Figura 5.6 para varios valores de la condición inicial p_0 .

Obsérvese que, sea cual sea el número de individuos de la población inicial, esta tiende, con el tiempo, a estabilizarse en el valor constante $P = \dfrac{r}{m}$ (asíntota horizontal de $p(t)$).

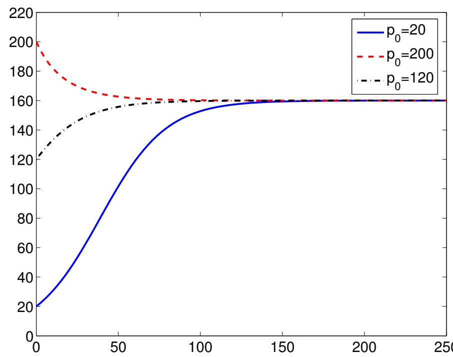


Figura 5.6: Gráfica de la solución del problema (5.25) con $r = 0.05$ y $m = 0.0003125$, para varios valores de p_0.