EJERCICIO 1.a): Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1)	$y' = -\dfrac{y}{t}$	(9)	$(1+t)y' = y$
(2)	$y' = \sqrt{3t+1}$	(10)	$y' = 4ty$
(3)	$y' = \cos(2t)y$	(11)	$(t^2+1)y' + ty = 0$
(4)	$y' = \ln(3t)y$	(12)	$y' = \dfrac{y}{t}$
(5)	$y' = 3y$	(13)	$\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{1+y}y' = -t$
(6)	$y' = -4ty^2$	(14)	$y' = y^2 - 1$
(7)	$y' = \dfrac{2t}{y^2}$	(15)	$y' = -y + y^2$
(8)	$y' = t^2 y$	(16)	$y' = y - y^3$

(1) $\mathbf{y' = -\dfrac{y}{t}}$

Se trata de una ecuación de variables separables, ya que se puede escribir, cuando sea $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{t}.$$

Integrando en ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{t}\,dt \iff \ln|y| = -\ln|t| + \ln C = \ln|\frac{C}{t}| \iff y = \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La solución constante $y = 0$, que es trivialmente solución de la ecuación, está incluida en la solución general para el valor de la constante arbitraria $C = 0$.

(2) $\mathbf{y' = \sqrt{3t+1}}$

Se trata simplemente de integrar en ambos miembros, puesto que las variables están ya separadas:

$$y' = \sqrt{3t+1} \iff \int dy = \int \sqrt{3t+1}\,dt = \frac{2}{9}\int \frac{9}{2}(3t+1)^{1/2}\,dt$$

luego la solución general es

$$y = \frac{2}{9}(3t+1)^{3/2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(3) $\mathbf{y' = \cos(2t)\,y}$

Separando las variables se tiene, para $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y}y' = \cos(2t) \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int 2\cos(2t)\,dt \iff \ln|y| = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + \ln C.$$

Tomando exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se tiene $y = \pm e^{\ln C}\, e^{\operatorname{sen}(2t)/2}$, de donde, puesto que $\pm e^{\ln C}$ es en sí misma una constante cualquiera, se puede escribir la solución general como

$$y = C\,e^{\operatorname{sen}(2t)/2}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La solución constante $y = 0$, que es trivialmente solución de la ecuación, está incluida en la solución general para el valor de la constante arbitraria $C = 0$.

(4) $\mathbf{y' = \ln(3t)\, y}$

Separando las variables se tiene, para $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y}\, y' = \ln(3t) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int \ln(3t)\, dt.$$

La integral del segundo miembro se calcula por partes: eligiendo $u(t) = \ln(3t)$ y $v'(t) = 1$ (de donde $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, y $v(t) = t$) y aplicando la fórmula de la integración por partes,

$$\int u(t)v'(t)\, dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\, dt,$$

se tiene, en este caso:

$$\ln|y| = \int \ln(3t)\, dt = t\ln(3t) - \int dt = t\ln(3t) - t + C.$$

Tomando exponenciales, y renombrando, como habitualmente, la constante arbitraria, se tiene la siguiente expresión para la solución general de la ecuación:

$$y = C\, e^{-t}\, e^{t\ln(3t)} = C\, e^{-t}\, \left(e^{\ln(3t)}\right)^t = C\, e^{-t}\, (3t)^t = C\, \frac{1}{e^t}\, (3t)^t = C\left(\frac{3t}{e}\right)^t, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

que contiene, para el valor de la constante $C = 0$, a la solución constante $y = 0$.

(5) $\mathbf{y' = 3y}$

Es una ecuación de variables separables, luego, para $y \neq 0$,

$$y' = 3y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y}\, y' = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int 3\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = 3t + C$$

de donde la solución general es

$$y = C\, e^{3t}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

que contiene a la solución constante, $y = 0$.

(6) $\mathbf{y' = -4ty^2}$

Separando las variables, se tiene, para $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y^2}\, y' = -4t \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\, dy = -\int 4t\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = -2t^2 + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 2t^2 + C$$

de donde, despejando la y se tiene la siguiente expresión de la solución general,

$$y = \frac{1}{2t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}.$$

La ecuación $y' = -4ty^2$ tiene, **además**, la solución constante $y = 0$, que **no está incluída** en la expresión de la solución general antes obtenida.

(7) $\mathbf{y' = \dfrac{2t}{y^2}}$

Multiplicando por y^2 en ambos miembros de la ecuación se tiene

$$y^2\, y' = 2t \quad \Longleftrightarrow \quad \int y^2\, dy = \int 2t\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 = t^2 + C \quad \Longleftrightarrow \quad y^3 = 3t^2 + 3C,$$

y renombrando la constante arbitraria se puede escribir la solución general en la forma

$$y = \sqrt[3]{3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}.$$

(8) $\mathbf{y' = t^2 y}$

Para $y \neq 0$ se puede escribir, dividiendo por y,

$$y' = t^2 y \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int t^2\,dt \iff \ln|y| = \frac{1}{3}t^3 + C \iff y = C\,e^{t^3/3}, \quad C \in \mathbb{R},$$

en la que está incluida la solución constante $y = 0$.

(9) $\mathbf{(1+t)y' = y}$

Ecuación de variables separables, que puede escribirse, si $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{1}{t+1} \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{t+1}\,dt \iff \ln|y| = \ln|t+1| + C,$$

luego, tomando exponenciales en ambos miembros, la solución general puede escribirse:

$$y = C(t+1), \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

en donde está incluida la solución constante $y = 0$.

(10) $\mathbf{y' = 4ty}$

Separando las variables:

$$y' = 4ty \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int 4t\,dt \iff \ln|y| = 2t^2 + C$$

luego, la solución general es

$$y = C\,e^{2t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

que contiene la solución constante $y = 0$.

(11) $\mathbf{(t^2+1)y' + ty = 0}$

Se trata de una ecuación de variables separables:

$$(t^2+1)y' + ty = 0 \iff (t^2+1)y' = -ty$$

$$\iff \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

de donde

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \ln(t^2+1)^{-1/2} + C$$

luego la solución general puede escribirse,

$$y = \frac{C}{\sqrt{t^2+1}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

que contiene, también, la solución constante $y = 0$.

(12) $\mathbf{y' = \dfrac{y}{t}}$

Separando las variables, si $y \neq 0$, se tiene

$$y' = \frac{y}{t} \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \iff \ln|y| = \ln|t| + C,$$

luego la solución general es

$$y = Ct, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

que incluye la solución constante $y = 0$.

(13) $\dfrac{\mathbf{\sqrt{1+t^2}}}{\mathbf{1+y}}\mathbf{y'} = \mathbf{-t}$

La ecuación es de variables separables, ya que dividiendo en ambos miembros por $\sqrt{1+t^2}$, se puede escribir

$$\frac{1}{1+y}\,y' = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}} \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{1}{1+y}\,dy = -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \quad\Longleftrightarrow\quad \ln|1+y| = -\sqrt{1+t^2} + C.$$

Por lo tanto, tomando exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se puede escribir la solución general de la ecuación en la forma:

$$y = -1 + C\,e^{-\sqrt{1+t^2}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(14) Lo primero que se observa es que la ecuación $y' = y^2 - 1$ tiene las soluciones constantes $y = 1$ e $y = -1$. Para $y^2 - 1 \neq 0$, se puede escribir:

$$\frac{1}{y^2-1}\,y' = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int dt.$$

Para calcular la integral del primer miembro hay que reducir el integrando a una suma de fracciones simples, como se explica a continuación.

Se trata de encontrar valores de A y B para los cuales se tenga, para cualquier valor de y,

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}.$$

Para poder comparar los numeradores, necesitamos que los denominadores sean iguales. El último miembro de esta cadena de igualdades se puede escribir, también,

$$\frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1)+B(y+1)}{(y+1)(y-1)} = \frac{Ay - A + By + B}{(y^2-1)} = \frac{(A+B)y + (B-A)}{(y^2-1)}.$$

En consecuencia, lo que queremos es encontrar A y B tales que

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{(A+B)y + (B-A)}{(y^2-1)}, \qquad \text{para cualquier valor de } y.$$

Igualando los numeradores, se tiene que verificar:

$$1 = 0\cdot y + 1 = (A+B)y + (B-A) \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ B-A=1 \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

En consecuencia, se tiene la siguiente igualdad que buscábamos:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{-1/2}{y+1} + \frac{1/2}{y-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{y+1} + \frac{1}{y-1}\right),$$

lo que nos permite calcular la integral, ya que

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{-1}{y+1} + \frac{1}{y-1}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\int \frac{-1}{y+1}\,dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|y+1| + \ln|y-1|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

Por lo tanto, volviendo a nuestra ecuación, se tiene:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = t + C \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2t + C.$$

Para despejar la variable y en esta igualdad tomamos exponenciales en ambos miembros, y obtenemos:

$$\frac{y-1}{y+1} = C\,e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \quad y - 1 = C\,e^{2t}\,(y+1) = C\,e^{2t}y + C\,e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - C\,e^{2t})y = C\,e^{2t} + 1$$

de donde, finalmente, se tiene la expresión de la solución general:

$$y = \frac{C\,e^{2t}+1}{1 - C\,e^{2t}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \quad (\text{además de } y = \pm 1).$$

(15) $\mathbf{y' = -y + y^2}$

La ecuación, que se puede escribir también $y' = y(y-1)$, tiene trivialmente las soluciones constantes $y = 0$ e $y = 1$, que son los valores constantes de y que anulan el segundo miembro.

Para hallar su solución general se procede a separar las variables e integrar en ambos miembros:

$$\frac{1}{y(y-1)}\,y' = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int dt = t + C.$$

Para calcular la integral del primer miembro hay que, como en el ejercicio anterior, escribir el integrando como una suma de fracciones simples, para lo cual hay que hallar A y B tales que, para cualquier valor de y se tenga

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1)+By}{y(y-1)} = \frac{(A+B)y - A}{y(y-1)}.$$

Igualando los numeradores se debe tener

$$1 = 0\cdot y + 1 = (A+B)y - A \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1. \end{array}\right.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)\,dt = \ln|y-1| - \ln|y| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|.$$

De donde se tiene, para la solución de la ecuación

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = t + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y-1}{y} = Ce^t \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{1 - Ce^t}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La ecuación tiene, como ya se ha dicho, la solución constante $y = 1$, que está incluida en la expresión de la solución general para $C = 0$, y también la solución constante $y = 0$, que **no está incluida** en la solución general.

(16) $\mathbf{y' = y - y^3}$

Para $y \neq 0$ e $y \neq \pm 1$ la ecuación $y' = y - y^3 = y(1-y^2)$ se puede escribir

$$\frac{1}{y(1-y^2)}\,y' = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y(1-y)(1+y)}\,dy = \int dt.$$

Para calcular la integral del primer miembro de nuevo hay que expresar el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{y(1-y)(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{1+y} = \frac{(B-A-C)y^2 + (B+C)y + A}{y(1-y)(1+y)}$$

lo cual puede ser cierto si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{l} B-A-C=0 \\ B+C=0 \\ A=1 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=1/2 \\ C=-1/2. \end{array}\right.$$

Así pues

$$\frac{1}{y(1-y^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right)$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y(1-y^2)}\,dy &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{1}{2}\left(2\ln|y| - \ln|1-y| - \ln|1+y|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(y^2) - \ln|1-y^2|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{1-y^2}\right| = t + C,\end{aligned}$$

y, de aquí,

$$\ln\left|\frac{y^2}{1-y^2}\right| = 2t + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y^2}{1-y^2} = C\,e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2(1 + C\,e^{2t}) = C\,e^{2t}.$$

Luego, finalmente, la solución general de la ecuación es

$$y = \pm\sqrt{\frac{C\,e^{2t}}{1 + C\,e^{2t}}},$$

que suele ser preferible escribir en la forma equivalente

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{C\,e^{-2t} + 1}}.$$

`EJERCICIO 1.b):` Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(1)	$y' = y + 4$	(8)	$y' = \dfrac{y}{t} + 2t + 1$
(2)	$y' = y + 4t$	(9)	$2y' + y = t - 1$
(3)	$y' = ty + 4t$	(10)	$y' + 3y = e^{2t}$
(4)	$ty' - y = t$	(11)	$y' + 2ty = t$
(5)	$y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}$	(12)	$y' + y = \cos(e^t)$
(6)	$y' = \cos(2t)y + e^{\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}}$	(13)	$y' + y - \dfrac{1}{1+e^t} = 0$
(7)	$y' = y + e^{3t}$	(14)	$ty' - y = t^2\ln(t)$

Recordamos el procedimiento de **cálculo de la solución general de la ecuación diferencial lineal $\mathbf{y' = a(t)y + b(t)}$**

1. Calcular y_h, la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$, que será de la forma
$$y_h(t) = C\, G(t)$$
2. Calcular una solución particular, y_p, de la ecuación lineal completa. Para ello, calcular
$$K(t) = \int b(t) \frac{1}{G(t)}\, dt \quad \text{y se tendrá} \quad y_p(t) = K(t)\, G(t).$$
3. La solución general de la ecuación lineal es
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (\ K(t) + C\ )\ G(t), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(1) $\mathbf{y' = y + 4}$

La solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = y \iff \int \frac{1}{y}\, dy = \int dt \iff \ln|y| = t + C \iff y_h = C\, e^t \implies G(t) = e^t.$$

La solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t) \frac{1}{G(t)}\, dt = \int 4e^{-t}\, dt = -4e^{-t} \implies y_p(t) = K(t)\, G(t) = -4e^{-t}\, e^t = -4.$$

La solución general de la ecuación dada:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, e^t - 4, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(2) $\mathbf{y' = y + 4t}$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = y \iff y_h = C\, e^t \implies G(t) = e^t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int 4t\, e^{-t}\, dt = 4 \int t\, e^{-t}\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{por partes, eligiendo} \\ u(t) = t \quad \Rightarrow \quad u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} \Rightarrow \quad v(t) = -e^{-t} \end{array} \right\} =$$

$$4\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right) = 4\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) = -4e^{-t}(t+1) \implies y_p(t) = -4(t+1).$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, e^t - 4(t+1), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(3) $\mathbf{y' = ty + 4t}$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = ty \iff \ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C \iff y_h = C\, e^{t^2/2} \implies G(t) = e^{t^2/2}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int 4t\, e^{-t^2/2}\, dt = (-4) \int (-t)\, e^{-t^2/2}\, dt = -4e^{-t^2/2} \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = -4.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, e^{t^2/2} - 4, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(4) $\mathbf{ty' - y = t}$

En primer lugar, la escribimos en la forma normalizada: $\mathbf{y' = \frac{1}{t}\, y + 1}$.

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t} y \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = \ln|t| + C \quad \Longleftrightarrow \quad y_h = C\, t \quad \Longrightarrow \quad G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t) \frac{1}{G(t)}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| \quad \Longrightarrow \quad y_p(t) = t\, \ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, t + t\, \ln|t|, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(5) $\mathbf{y' + y} \cos(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{-\operatorname{sen}(\mathbf{t})}$

En primer lugar, la escribimos en la forma normalizada: $\mathbf{y'} = -\cos(\mathbf{t})\, \mathbf{y} + \mathbf{e}^{-\operatorname{sen}(\mathbf{t})}$.

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = -\cos(t)\, y \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \cos(t)\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -\operatorname{sen}(t) + C \quad \Longleftrightarrow$$

$$y_h = C\, e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \Longrightarrow \quad G(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t) \frac{1}{G(t)}\, dt = \int e^{-\operatorname{sen}(t)} e^{\operatorname{sen}(t)}\, dt = \int dt = t \quad \Longrightarrow \quad y_p = t\, e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\, e^{-\operatorname{sen}(t)} + t\, e^{-\operatorname{sen}(t)} = (C + t)\, e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(6) $\mathbf{y'} = \cos(\mathbf{2t})\, \mathbf{y} + \mathbf{e}^{\operatorname{sen}(\mathbf{2t})/\mathbf{2}}$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \cos(2t)\, y \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos(2t)\, dt = \frac{1}{2} \int 2\cos(2t)\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) + C$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_h = C\, e^{\operatorname{sen}(2t)/2} \quad \Longrightarrow \quad G(t) = e^{\operatorname{sen}(2t)/2}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t) \frac{1}{G(t)}\, dt = \int e^{\operatorname{sen}(2t)/2} e^{-\operatorname{sen}(2t)/2}\, dt = \int dt = t \quad \Longrightarrow \quad y_p = t\, e^{\operatorname{sen}(2t)/2}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = (C + t)\, e^{\operatorname{sen}(2t)/2} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(7) $\mathbf{y' = y + e^{3t}}$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = y \iff \ln|y| = t + C \iff y = C\,e^t \implies G(t) = e^t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}e^{2t} \implies y_p = K(t)G(t) = \frac{1}{2}e^{2t}e^t = \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,e^t + \frac{1}{2}\,e^{3t} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

(8) $\mathbf{y' = \frac{y}{t} + 2t + 1}$

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{y}{t} = \frac{1}{t}\,y \iff \ln|y| = \ln|t| + C \iff y = C\,t \implies G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{2t+1}{t}\,dt = \int \left(2 + \frac{1}{t}\right)\,dt = 2t + \ln|t|$$

$$\implies y_p = K(t)G(t) = (2t + \ln|t|)\,t = 2t^2 + t\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + 2t^2 + t\ln|t| \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

EJERCICIO 2: Sea $V = V(t)$ el volumen de una célula en el instante t. Determinar $V(t)$ para $t \geq 0$, sabiendo que $V(0) = 3$ y que V verifica la ecuación $V'(t) = \operatorname{sen}(t)$.

Lo que se pide es hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} V' = \operatorname{sen}(t) \\ V(0) = 3. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación $V' = \operatorname{sen}(t)$ es

$$V = \int \operatorname{sen}(t)\,dt = -\cos(t) + C.$$

Imponemos ahora la condición inicial para hallar el valor adecuado de la constante arbitraria C:

$$3 = V(0) = -\cos(0) + C = -1 + C \iff C = 4$$

luego la solución del problema es

$$V(t) = 4 - \cos(t).$$

EJERCICIO 3: *Modelo de Malthus (o de crecimiento exponencial).* La población mundial en el año 1998 era de aproximadamente 5.9 billones de personas y se sabe que crece, aproximadamente, un 1.33 % cada año. Asumiendo que el crecimiento de la población se rige por el modelo exponencial, calcular el valor estimado de la población mundial en el año 2023.

La ley de Malthus (o de crecimiento exponencial) dice que el número de individuos de la población en el instante t, $P(t)$, verifica la ecuación diferencial:

$$P'(t) = kP(t).$$

La solución general de esta ecuación viene dada por

$$P(t) = C\, e^{kt}$$

(de aquí el nombre de *exponencial* con que también se conoce al modelo). En esta expresión hay dos constantes que no se conocen (de momento): k y C. Para determinar su valor utilizaremos el resto de la información:

1. $P(1998) = 5.9$ billones.
2. La población crece un 1.33 % cada año, de donde, por ejemplo, en el año 1999, la población se habría incrementado en un 1.33 % de 5.9 billones, es decir

$$P(1999) = 5.9 + \frac{1.33}{100}\, 5.9 = \left(1 + \frac{1.33}{100}\right) 5.9 = 5.9785 \text{ billones.}$$

De ambos datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 5.9 = P(1998) = C\, e^{1998\, k} \\ 5.9785 = P(1999) = C\, e^{1999\, k} \end{array}\right\} \implies \frac{5.9}{5.9785} = \frac{C\, e^{1998\, k}}{C\, e^{1999\, k}} = e^{1998\, k}\, e^{-1999\, k} = e^{-k},$$

y de aquí

$$\ln\left(\frac{5.9}{5.9785}\right) = -k \iff k = 0.0132 \ \text{ aprox.}$$

Ahora, una vez conocido el valor de k, se tiene:

$$5.9 = P(1998) = C\, e^{0.0132\times 1998} = C\, e^{26.3736} = \iff C = \frac{5.9}{e^{26.3736}} \approx 2.074 \times 10^{-11}.$$

Finalmente se tiene:

$$P(2023) = C\, e^{2023\, k} = 8.2 \text{ billones de personas, aproximadamente.}$$

Observación: este ejercicio también se puede hacer (y, de hecho, los cálculos son más fáciles) situando el origen, $t = 0$, de la variable independiente en el año 1998, de modo que el año 1999 correspondería a $t = 1$ y el año 2023 correspondería a $t = 25$. Entonces tendríamos la información $P(0) = 5.9$ y $P(1) = 5.9785$ y lo que se desea es calcular $P(25)$.

EJERCICIO 4: *Datación de fósiles mediante C_{14}.* El carbono-14 (C_{14}), sustancia radioactiva presente en ciertos fósiles, se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente. La vida media (tiempo en desintegrarse a la mitad una cantidad inicial) es de 5730 años. Averiguar la edad del fósil sabiendo que contiene el 77.7 % del C_{14} inicial.

La ecuación diferencial que rige la desintegración de una sustancia radiactiva es

$$A'(t) = -\lambda A(t)$$

donde $\lambda > 0$ y $A(t)$ el número de átomos de dicha sustancia presentes en el tiempo t. La solución general de esta ecuación es

$$A(t) = C\,e^{-\lambda t} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Supongamos que, en el instante inicial, $t = 0$ (que corresponde al momento en que "murió" el fósil), éste contuviera una cantidad A_0 de átomos de C_{14}:

$$A_0 = A(0) = C\,e^0 = C \quad \text{luego} \quad A(t) = A_0\,e^{-\lambda t}$$

Por otro lado, la vida media del C_{14} es de 5730 años, lo cual significa que cualquier cantidad inicial de C_{14} se habrá reducido a la mitad al cabo de 5730 años. Es decir:

$$\frac{A_0}{2} = A(5730) = A_0\,e^{-\lambda\times 5730} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-5730\,\lambda}$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros,

$$-5730\,\lambda = \ln(\frac{1}{2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{5730} \approx 0.000121.$$

Por lo tanto, la cantidad de átomos de C_{14} presentes en el fósil en un instante $t > 0$ posterior al de su "muerte" viene dado por:

$$A(t) = A_0\,e^{-\lambda t}, \quad \text{con } \lambda = 0.000121.$$

Lo que queremos es hallar el tiempo $t^\star$ que ha transcurrido desde el instante de la "muerte" del fósil, y del que sabemos que

$$A(t^\star) = \frac{77.7}{100}A_0 = A_0\,e^{-\lambda t^\star} \quad \Longleftrightarrow \quad 0.777 = e^{-\lambda t^\star}$$

luego

$$-\lambda t^\star = \ln(0.777) \quad \Longleftrightarrow \quad t^\star = \frac{-\ln(0.777)}{0.000121} = 2085 \text{ años.}$$

EJERCICIO 5: *Desintegración de elementos radiactivos.* El plutonio 239, virtualmente casi inexistente en la naturaleza, es uno de los productos radiactivos que se utilizan en los reactores nucleares. Su vida media es de unos 24000 años. Determinar la constante de desintegración de este isótopo.

De

$$\begin{cases} A'(t) = -\lambda\,A(t) \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

se deduce, como en el ejercicio anterior, que

$$A(t) = A_0\,e^{-\lambda t}.$$

Por otra parte, que la vida media sea 24000 años significa que

$$A(24000) = \frac{A_0}{2} = A_0\,e^{-\lambda\times 24000}$$

y de aquí se deduce

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda\times 24000} \quad \Longleftrightarrow \quad -24000\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{24000} = 0.00002888.$$

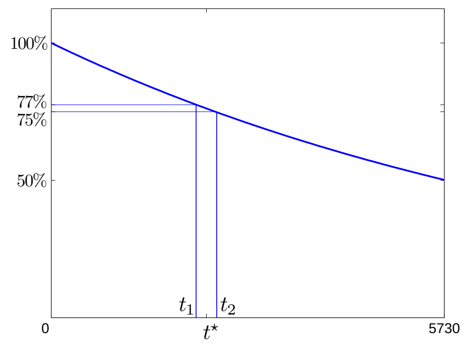
EJERCICIO 6: *Papiros del Qumram.* En 1947 fueron encontradas unos 800 rollos de papiros, incluyendo los manuscritos más antiguos del Antiguo Testamento, en unas cuevas cercanas a la ribera nor-occidental del Mar Muerto, que se conocen como "los papiros de Qumram". El manuscrito que contiene el libro de Isaías fue datado en 1994 a partir de la técnica del carbono 14. Se observó que tenía entre un 75 % y un 77 % del nivel inicial de C_{14}. Estimar la fecha en la que fue escrito el manuscrito.

El número de átomos de C_{14} contenido en una muestra del papiro sigue, según se ha visto en el Ejercicio 4, la ley

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$$

siendo $\lambda = 0.000121$ la constante de desintegración radiactiva del C_{14} y A_0 el número de átomos de dicha muestra en el momento de su fabricación.

La edad del papiro será algún valor $t^\star$ comprendido entre el instante t_1 en el que la cantidad de C_{14} presente en la muestra era el 77 % de la cantidad inicial, A_0, y el instante t_2 en el que dicha cantidad era el 75 % de dicha cantidad inicial:



$$\begin{cases} A(t_1) = 0.77\, A_0 = A_0\, e^{-\lambda t_1} \\ A(t_2) = 0.75\, A_0 = A_0\, e^{-\lambda t_2} \end{cases}$$

de donde

$$-\lambda t_1 = \ln(0.77), \quad -\lambda t_2 = \ln(0.75)$$

y de aquí $\quad t_1 = \dfrac{-\ln(0.77)}{\lambda} \approx 2160 \quad$ y $\quad t_2 = \dfrac{-\ln(0.75)}{\lambda} \approx 2377.$

En consecuencia, puesto que la datación del papiro fue realizada en el año 1994, la fecha en que se escribió fue entre 2377 y 2160 años antes, es decir, entre los años 383 y 166 a.C.

EJERCICIO 7: *Cultivo de bacterias en laboratorio.* Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se duplica cada 3 horas. Calcular la población existente al cabo de 11 horas.

La población considerada sigue la ley (de Malthus)

$$P' = kP \quad \Longleftrightarrow \quad P(t) = C\, e^{kt}$$

Para determinar las dos constantes C y k hay que utilizar las dos informaciones dadas:

$$\begin{cases} P(0) = 2.5 \text{ (millones de bacterias)} \\ P(3) = 2 \times 2.5 = 5 \text{ (millones de bacterias)} \end{cases}$$

De la primera de ellas se tiene

$$2.5 = P(0) = C \quad \Longleftrightarrow \quad P(t) = 2.5\, e^{kt}$$

y de la segunda

$$5 = P(3) = 2.5\, e^{3k} \quad \Longleftrightarrow \quad 3k = \frac{5}{2.5} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0.231.$$

Luego, finalmente, la ley seguida por la población de bacterias es

$$P(t) = 2.5\, e^{0.231\, t},$$

de donde

$$P(11) = 2.5\, e^{0.231 \times 11} \approx 31.75 \text{ (millones de bacterias).}$$

EJERCICIO 8: *Ley de enfriamiento de Newton.* Un recipiente con agua hirviendo (100°C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta 80°C y que pasados otros 5 minutos más la temperatura es de 65°C.

1. Determinar a qué temperatura está la habitación.
2. Determinar la constante de proporcionalidad.

Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura del objeto sigue la ley

$$T'(t) = k(M - T(t)),$$

donde k es una constante propia del objeto y M es la temperatura de la habitación, que se considera constante. La ecuación es de variables separables y se integra fácilmente:

$$\int \frac{1}{M-T}\, dT = k \int dt \iff -\ln|M - T| = kt + C \iff T = M - C\, e^{-kt}.$$

En la expresión de $T(t)$ hay 3 constantes que determinar: k, C y M. Para determinarlas disponemos de 3 datos:

$$T(0) = 100, \quad T(5) = 80 \quad \text{y} \quad T(10) = 65.$$

(a) De $100 = T(0) = M - C$ se tiene que $M = 100 + C$, luego

$$T(t) = 100 + C - C\, e^{-kt}.$$

(b) De $80 = T(5) = 100 + C - C\, e^{-5k}$ se tiene

$$\frac{20 + C}{C} = e^{-5k} \iff -5k = \ln\left(\frac{20+C}{C}\right) \iff k = -\frac{1}{5} \ln\left(\frac{20+C}{C}\right).$$

Para esta expresión de k se tiene

$$-kt = \frac{t}{5}\left(\frac{20+C}{C}\right) = \ln\left[\left(\frac{20+C}{C}\right)^{t/5}\right]$$

luego

$$e^{-kt} = e^{\ln\left[\left(\frac{20+C}{C}\right)^{t/5}\right]} = \left(\frac{20+C}{C}\right)^{t/5}.$$

En consecuencia,

$$T(t) = 100 + C - C\left(\frac{20+C}{C}\right)^{t/5}.$$

(c) De $65 = T(10) = 100 + C - C\left(\dfrac{20+C}{C}\right)^{10/5} = 100 + C - \dfrac{(20+C)^2}{C}$ se tiene

$$(20+C)^2 = 35C + C^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 400 = -5C \quad \Longleftrightarrow \quad C = -80.$$

En consecuencia,

$$M = 100 + C = 100 - 80 = 20$$

y

$$k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{-60}{-80}\right) = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.0575.$$

EJERCICIO 9: *Dinámica de epidemias.* Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas multiplicado por el número de personas no infectadas. Si denotamos por $I(t)$ el número de personas infectadas en el tiempo t y por P la población total, la dinámica de la infección viene dada por

$$I' = k\,I(P-I),$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. En una población de 10000 habitantes se detecta una enfermedad que afecta inicialmente a 50 personas. Al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas afectadas. Averiguar el número de enfermos que habrá pasados 12 días.

La ecuación $I' = k\,I(P-I)$ es de variables separables:

$$\int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = k\int dt.$$

Para calcular la integral del primer miembro hay que expresar el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{I(P-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{P-I} = \frac{AP + (B-A)I}{I(P-I)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} AP = 1 & \Rightarrow A = \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{10^4} = 10^{-4} \\ B - A = 0 & \Rightarrow B = A = \dfrac{1}{P} = 10^{-4} \end{cases}$$

En consecuencia

$$\int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = \frac{1}{P}\int\left(\frac{1}{I} + \frac{1}{P-I}\right)dI = \frac{1}{P}\left(\ln(I) - \ln(P-I)\right) = \frac{1}{P}\ln\left(\frac{I}{P-I}\right).$$

Así pues, la solución general de la ecuación es

$$\frac{1}{P}\ln\left(\frac{I}{P-I}\right) = kt + C \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{P-I}\right) = kPt + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{I}{P-I} = C\,e^{kPt}$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = (P-I)C\,e^{kPt} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 + C\,e^{kPt}\right) I = PC\,e^{kPt}$$

de donde, despejando I se tiene

$$I(t) = \frac{PC\,e^{kPt}}{1 + C\,e^{kPt}} = \frac{P}{C\,e^{-kPt} + 1}.$$

Para determinar las constantes C y k disponemos de la siguiente información:

$$I(0) = 50 \quad \text{e} \quad I(3) = 250.$$

En primer lugar,

$$50 = I(0) = \frac{P}{C+1} \quad \Longleftrightarrow \quad C = \frac{P}{50} - 1 = 199.$$

En segundo lugar,

$$250 = I(3) = \frac{P}{199\, e^{-3kP} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad 199\, e^{-3kP} + 1 = \frac{P}{250} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-3kP} = \frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$-3kP = \ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] \quad \Longleftrightarrow \quad k = -\frac{1}{3P}\ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] = \frac{0.5432}{P}.$$

En consecuencia, el número de infectados en cualquier instante $t > 0$ viene dado por

$$I(t) = \frac{P}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1} = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1}$$

y se tiene

$$I(12) = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432 \times 12} + 1} \approx 7730$$

EJERCICIO 10: *Gripe aviar.* En una granja de 40.000 aves hay un pollo contagiado con la gripe aviar. Si suponemos que la rapidez de contagio es directamente proporcional tanto al número de aves contagiadas como al número de no contagiadas, siendo la constante de proporcionalidad $k = 4 \times 10^{-5}$, determinar en cuánto tiempo un 75 % de los pollos de la granja quedarían infectados.

La ecuación que verifica, $I(t)$, el número de infectados por la epidemia en el instante t es

$$I' = kI(P - I)$$

siendo $P = 4 \times 10^4$ la población total y $k = 4 \times 10^{-5}$ (de donde $kP = 16 \times 10^4 \times 10^{-5} = 1.6$). Como se ha visto en el Ejercicio 9, la solución de esta ecuación es

$$I(t) = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}}.$$

Puesto que inicialmente sólo hay un pollo infectado se tiene $I(0) = 1$, de donde

$$1 = I(0) = \frac{P}{1 + C} \quad \Longleftrightarrow \quad C = P - 1 = 39999.$$

Buscamos ahora el valor del tiempo $t^\star$ para el cual $I(t^\star) = \dfrac{75}{100}P = 3 \times 10^4$. Para este $t^\star$ se tendrá

$$3 \times 10^4 = I(t^\star) = \frac{P}{1 + C\, e^{-kPt^\star}} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + C\, e^{-kPt^\star} = \frac{4 \times 10^4}{3 \times 10^4} = \frac{4}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-kPt^\star} = \frac{1}{C}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{3C} \quad \Longleftrightarrow \quad -kPt^\star = \ln\left(\frac{1}{3C}\right),$$

de donde se deduce que

$$t^\star = -\frac{1}{kP}\ln\left(\frac{1}{3C}\right) \approx 7.3.$$

EJERCICIO 11:

Modelo de Bertalanffy. Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se supone que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de Bertalanffy):

$$\begin{cases} L' = k(34 - L) \\ L(0) = 2. \end{cases}$$

1. Sabiendo que a la edad de 4 meses, el pez mide 10 centímetros, determinar la constante de crecimiento k.
2. Calcular la longitud del pez a los 10 meses.
3. Calcular $\lim_{t\to\infty} L(t)$ y dar una interpretación de la dinámica en el crecimiento del pez.

La solución del problema de valor inicial se calcula fácilmente por ser la ecuación de variables separables:

$$L' = k(34 - L) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{34 - L}\, dL = k \int dt \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln|34 - L| = kt + C$$

de donde se tiene $L = 34 - Ce^{-kt}$ e, imponiendo la condición inicial $L(0) = 2$, se encuentra el el valor de la constante $C = 32$.
Luego la longitud del pez viene dada por

$$L(t) = 34 - 32\, e^{-kt}.$$

Para determinar el valor de k es necesario utilizar más información: $L(4) = 10$. Entonces,

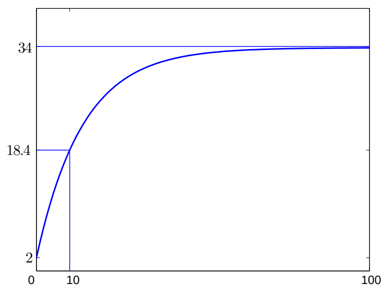
$$10 = L(4) = 34 - 32\, e^{-4k} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-4k} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad k = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0.0719.$$

Una vez conocido el valor de k se puede calcular la longitud del pez en cualquier instante $t > 0$:

$$L(10) = 34 - 32\, e^{-10k} \approx 18.4 \text{ cm}.$$

Por último, es obvio que

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = \lim_{t\to+\infty} 34 - 32\, e^{-4k} = 34 - 32 \lim_{t\to+\infty} e^{-4k} = 34,$$



lo cual significa que la curva que representa la longitud del pez tiene una asíntota horizontal en $L = 34$. El pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 34, aunque sin nunca llegar a él.

EJERCICIO 12: *Crecimiento de tumores.* El crecimiento de ciertos tumores sólidos avasculares puede describirse mediante la siguiente ley (de Gompertz):

$$\begin{cases} y'(t) = re^{-\lambda t}y(t) \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

donde $y = y(t)$ representa el número de células tumorales en el instante t, $r > 0$ y $\lambda > 0$ son parámetros propios de cada tumor y el tejido en el que se desarrolla.
Esta ley tiene en cuenta el hecho de que el crecimiento de un tumor avascular es rápido en sus comienzos, y más lento a medida que pasa el tiempo.

1. Resolver problema de valor inicial anterior.

2. Calcular $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

La ecuación es de variables separables:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int re^{-\lambda t}\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -\frac{r}{\lambda}\int(-\lambda)e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{r}{\lambda}e^{-\lambda t} + C,$$

luego su solución general es

$$y = C\,e^{-\frac{r}{\lambda}e^{-\lambda t}} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Imponiendo la condición inicial se tiene

$$y_0 = y(0) = Ce^{-r/\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad C = y_0\,e^{r/\lambda},$$

luego la solución del problema de valor inicial es

$$y = y_0\,e^{\frac{r}{\lambda}}\,e^{-\frac{r}{\lambda}e^{-\lambda t}} = y_0\,e^{\frac{r}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} y_0\,e^{\frac{r}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} = y_0 \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{r}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} = y_0\,e^{\frac{r}{\lambda}}.$$

EJERCICIO 13: Para las siguientes ecuaciones diferenciales determinar todos sus puntos fijos y estudiar su estabilidad:

$$a)\; y' = ay - b, a > 0 \qquad b)\; y' = a - by^2,\; a, b > 0 \qquad c)\; y' = y - y^2.$$

EJERCICIO 14: Determinar las soluciones de equilibrio y estudiar su estabilidad para las ecuaciones diferenciales de los problemas y .