Tema 2

Ecuaciones diferenciales aplicadas a la Biología

2.1 Introducción

Existen numerosos modelos matemáticos de diversa índole que se utilizan hoy en día para el estudio de problemas en Biología y otras ciencias experimentales; sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. La gran parte de tales modelos matemáticos se expresa mediante ecuaciones diferenciales.

El objetivo de este tema es describir brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrar técnicas elementales de su resolución, así como exponer ejemplos prácticos de aplicaciones.

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en que la **incógnita** es una función: no el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma. Además, la ecuación involucra no sólo la función (incógnita), sino también sus **derivadas** hasta un cierto orden.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la ecuación es **ordinaria**, debido a que la o las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias (por contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Por ejemplo,

$$y'(t) = -y(t) \tag{2.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria (*edo*) de primer orden, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la de primer orden. Si no resulta confuso se suele escribir también esta ecuación en la forma $y' = -y$, omitiendo la mención expresa a la dependencia de y respecto a la variable independiente, t.

Resolver esta ecuación consiste en encontrar una o varias funciones $y = y(t)$ que verifiquen la igualdad $y'(t) = -y(t)$, para todo t perteneciente a un cierto intervalo I. Una tal función se dice que es una **solución** de la *edo* en el intervalo I.

Con carácter general, una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** se escribe:

$$y' = f(t, y) \tag{2.2}$$

y se dice que $y = y(t)$ es **solución en I** de esta ecuación si se verifica

$$y'(t) \left(= \frac{dy}{dt}(t) \right) = f(t, y(t)), \quad \forall\, t \in I. \tag{2.3}$$

Por ejemplo, la función $y = e^{-t}$ es solución de la ecuación (2.1) en cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, ya que

$$y'(t) = -e^{-t} = -y(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Pero también es solución cualquier función de la forma $y = Ce^{-t}$ siendo C una constante arbitraria, puesto que

$$y'(t) = -Ce^{-t} = -y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

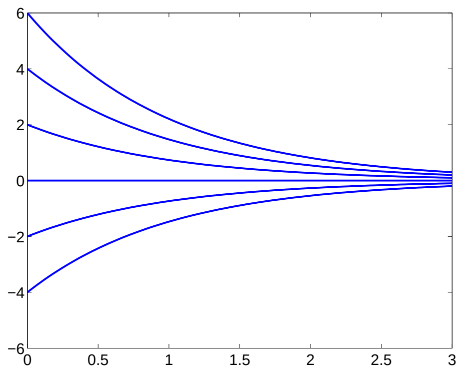

Figura 2.1: Curvas de la familia $y(t) = Ce^{-t}$, soluciones de la ecuación (2.1), para diversos valores de C.

Así pues, la ecuación (2.1) tiene infinitas soluciones, lo que no es una particularidad de esta ecuación concreta. La ecuación diferencial ordinaria (2.2) posee, en general, una "familia" de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, a la que se suele llamar **solución general** de (2.2). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una **solución particular**.

Con frecuencia, en las aplicaciones, lo que interesa es encontrar una solución particular que verifica alguna condición adicional. Por ejemplo, que toma un valor dado para un valor, también dado, de la variable independiente. En este caso, el problema que se plantea se escribe:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \,, \end{cases} \tag{2.4}$$

y recibe el nombre de **problema de valor inicial**. El nombre proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.

En general, si se verifican ciertas condiciones razonables de regularidad de la función f, el problema de valor inicial (2.4) tiene solución única.

Por ejemplo, el siguiente problema de valor inicial, asociado a la ecuación (2.1),

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \,, \end{cases} \tag{2.5}$$

tiene una única solución, $y = e^{-t}$, que se puede encontrar imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, a las funciones de la familia de soluciones, $y = Ce^{-t}$, y deduciendo para qué valor de la constante arbitraria C se cumple la condición inicial. Es decir:

$$y(0) = Ce^0 = C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

2.2 Resolución de ecuaciones diferenciales elementales

Presentamos en esta sección varios ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden sencillas y su resolución.

2.2.1 Ecuaciones diferenciales de la forma $\mathbf{y' = a(t)}$.

En muchas aplicaciones, la variable independiente t representa el tiempo. Si la velocidad de variación de una función depende sólo del tiempo, la ecuación diferencial es de la forma

$$y' = a(t), \tag{2.6}$$

donde $a = a(t)$ es una función que depende sólo de la variable independiente t, definida en un intervalo I.

La resolución de esta ecuación es inmediata:

- Utilizando la notación $y' = \dfrac{dy}{dt}$, la ecuación (2.6) se escribe $\dfrac{dy}{dt} = a(t)$, lo que nos permite usar la siguiente expresión de la ecuación, no completamente correcta pero útil,

$$dy = a(t)\,dt.$$

- A continuación, se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación,

$$\int dy = \int a(t)\,dt.$$

- Denotemos por $A(t)$ una primitiva cualquiera, pero fija, de $a(t)$. Se tiene entonces, recordando que todas las demás primitivas de $a(t)$ se pueden obtener a partir de ésta sumándole una constante,

$$y = A(t) + C = \int a(t)\,dt + C, \qquad \text{siendo } C \text{ una constante arbitraria.}$$

- Se dice que

$$y = A(t) + C$$

es la **solución general** de la ecuación (2.6).

- Si se quiere hallar la solución de un problema de valor inicial, es decir, la solución, entre todas las anteriores, que verifica una condición del tipo $y(t_0) = y_0$ hay que averiguar para qué valor de C se verifica

$$y_0 = y(t_0) = A(t_0) + C \Longleftrightarrow C = y_0 - A(t_0)$$

de donde la solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

es

$$y(t) = A(t) + y_0 - A(t_0).$$

EJEMPLO:
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (1+t)y' = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Para $t \neq -1$, se tiene que $1+t \neq 0$, luego se puede dividir por $(1+t)$ en ambos miembros de la ecuación, para obtener una de la forma (2.6):

$$y' = \frac{1}{1+t} \quad \Leftrightarrow \quad \int dy = \int \frac{1}{1+t}\, dt$$

Integrando, obtenemos la solución general de la edo, válida en cualquier intervalo que no contenga al punto $t = -1$:

$$y = \ln|1+t| + C.$$

Para obtener la solución particular que verifica $y(0) = 1$, se impone esta condición y se despeja C:

$$1 = y(0) = \ln|1+0| + C = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Por tanto la solución del problema de valor inicial es:

$$y(t) = \ln(1+t) + 1, \quad \forall t \in (-1, +\infty).$$

2.2.2 Ecuaciones diferenciales de variables separables

Son ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)g(y), \tag{2.7}$$

donde $a = a(t)$ es una función, definida en un intervalo I, que depende sólo de la variable independiente t, y $g = g(y)$ es una función que depende sólo de la variable dependiente y.

Para resolver (2.7), se procede como sigue:

- Usando la notación $y' = \dfrac{dy}{dt}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)\, g(y).$$

- Se "separan" las variables de forma que a un lado del signo igual esté sólo lo que depende de y y al otro lado esté sólo lo que depende de t. Es decir, para $g(y) \neq 0$ se puede escribir

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = a(t)\, dt.$$

- Se integra, como en el caso anterior, en ambos lados de esta igualdad:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int a(t)\, dt + C.$$

y se tiene, si $G(y)$ y $A(t)$ son primitivas (cualesquiera, pero fijas) respectivamente de $1/g(y)$ y de $a(t)$,

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad A(t) = \int a(t)\, dt,$$

que la solución general de (2.7) viene dada (en forma implícita) por

$$G(y) = A(t) + C.$$

La ecuación (2.7) puede tener, además, alguna solución constante que no esté incluida en la solución general. En efecto, si existe algún valor $\beta \in \mathbb{R}$ que anule a la función $g(y)$:

$$g(\beta) = 0$$

entonces la función constante $y = \beta$ es solución de la ecuación (2.7), ya que

$$0 = y' = a(t)g(y) = a(t)g(\beta) = 0.$$

EJEMPLO:

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Separando las variables e integrando en ambos lados se tiene

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int dt,$$

de donde

$$\operatorname{arc\,tg}(y) = t + C.$$

En este caso se puede despejar la variable y en esta expresión y se obtiene:

$$y = \operatorname{tg}(t + C).$$

Imponiendo ahora la condición inicial $y(0) = 0$ se tiene:

$$0 = y(0) = \operatorname{tg}(C) \quad \Leftrightarrow \quad C = \operatorname{arc\,tg}(0) \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Por tanto la solución buscada es:

$$y = \operatorname{tg}(t),$$

que está bien definida en el intervalo $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

Observación: $\operatorname{tg}(t)$ está bien definida en cualquier intervalo de la forma $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$, pero sólo el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ contiene al punto $t = 0$ que es donde se impone la condición inicial.

2.2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Son las ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{2.8}$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones, definidas en un intervalo I, que dependen de la variable independiente t.

Cuando $b(t) \equiv 0$ se dice que la ecuación (2.8) es **lineal homogénea**.

Dada la ecuación no homogénea (2.8), se denomina **ecuación homogénea asociada** a la ecuación que se obtiene eliminando el término no homogéneo, es decir

$$y' = a(t)y. \tag{2.9}$$

El método de resolución de estas ecuaciones está basado en la siguiente propiedad fundamental de sus soluciones:

La solución general de la ecuación diferencial lineal (2.8) se puede escribir como la suma de la solución general de su ecuación homogénea asociada, (2.9), y una solución particular de la ecuación completa (2.8):

$$y = y_h(t) + y_p(t),$$

donde $y_h(t)$ es la solución general de (2.9) e $y_p(t)$ es una solución particular de (2.8).

En consecuencia, la resolución de la ecuación (2.8) se lleva a cabo en dos etapas:

1. Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada (2.9).
2. Se calcula **una** solución particular (cualquiera) de la ecuación completa (2.8).

Se explica a continuación, con más detalle, cómo se ponen en práctica estas etapas.

1. La ecuación homogénea asociada

$$y' = a(t)y$$

es una ecuación de variables separables. Procediendo a separar las variables, e integrando en ambos miembros, se tiene

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a(t)\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = A(t) + C,$$

donde $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$. Para despejar y en esta ecuación es necesario tomar exponenciales en ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\ln|y| = A(t) + C \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm e^{A(t)+C} = \pm e^{C}\, e^{A(t)}.$$

Puesto que C es una constante arbitraria, $\pm e^{C}$ es también una constante cualquiera y, para mayor facilidad de escritura, se le seguirá llamando C. Así, la solución general de la ecuación homogénea (2.9) es

$$y_h(t) = C\, e^{A(t)}$$

siendo $A(t)$ una primitiva de $a(t)$. Denotemos $G(t) = e^{A(t)}$.

2. La solución general de la ecuación homogénea asociada siempre es de la forma

$$y_h(t) = C\, G(t), \qquad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria,}$$

y se tiene que $G'(t) = A'(t)\, e^{A(t)} = a(t)\, G(t)$. El cálculo de **una** solución particular de la ecuación (2.8) se puede llevar a cabo por el **método de Lagrange de variación de la constante**, que consiste en "buscar" dicha solución sabiendo que es de la forma

$$y_p(t) = K(t)\, G(t). \tag{2.10}$$

Sustituyendo esta función en la ecuación (2.8) se encontrará la condición que debe verificar $K(t)$ para que $y_p(t)$ sea, efectivamente, solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= K'(t)G(t) + K(t)G'(t) = K'(t)G(t) + K(t)a(t)G(t) \\ a(t)y_p(t) + b(t) &= a(t)K(t)G(t) + b(t) \end{aligned}$$

$$y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t)G(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t) = b(t)\,\frac{1}{G(t)}$$

luego, para que (2.10) sea solución de (2.8), tiene que ser

$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

de donde la solución particular de (2.9) que se busca es

$$y_p(t) = G(t) \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

Finalmente, según la propiedad antes explicada, la solución general de la ecuación lineal es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,G(t) + G(t)\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \left(\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt + C\right) G(t).$$

El resumen de este proceso es, pues, el siguiente

Cálculo de la solución general de la ecuación diferencial lineal $\mathbf{y' = a(t)y + b(t)}$

1. Calcular y_h, la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$, que será de la forma

$$y_h(t) = C\,G(t)$$

2. Calcular

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt$$

3. La solución general es

$$y(t) = (\,K(t) + C\,)\;G(t), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

EJEMPLO:
Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$y' + y\cos(t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t).$$

Para aplicar el método antes descrito, lo primero es escribir esta ecuación en la forma $y' = a(t)y + b(t)$:

$$y' = -\cos(t)\,y + \operatorname{sen}(t)\cos(t),$$

y, a continuación,

1. La solución general de la homogénea $y' = -\cos(t)\,y$ es $y = C\,e^{-\operatorname{sen}(t)}$, de donde $G(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}$.

2. Se calcula

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \operatorname{sen}(t)\cos(t)\frac{1}{e^{-\operatorname{sen}(t)}}\,dt = \int \operatorname{sen}(t)\cos(t)e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt =$$

   Esta integral se puede calcular por partes:

$$K(t) = \int \operatorname{sen}(t)\cos(t)e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt = \operatorname{sen}(t)e^{\operatorname{sen}(t)} - \int \cos(t)e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt$$

$$= \operatorname{sen}(t)e^{\operatorname{sen}(t)} - e^{\operatorname{sen}(t)} = (\operatorname{sen}(t)-1)e^{\operatorname{sen}(t)}$$

3. La solución general de la ecuación es, por lo tanto,

$$y = (K(t)+C)\,G(t) = \Big((\operatorname{sen}(t)-1)e^{\operatorname{sen}(t)} + C\Big)\,e^{-\operatorname{sen}(t)}$$

$$y = \operatorname{sen}(t) - 1 + Ce^{-\operatorname{sen}(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.3 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales, debido a que relacionan los valores de una función con los de su(s) derivada(s), son una herramienta fundamental en el tratamiento matemático de cualquier fenómeno dinámico, es decir, que involucre magnitudes que cambian con el tiempo (o con cualquier otra magnitud). Por ello, sus campos de aplicación son numerosos en física, química, biología, economía, ... Se presentan aquí sólo algunos ejemplos.

2.3.1 Dinámica de poblaciones: modelo de Malthus

El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales y constituye, de hecho, uno de los principales campos de aplicación de las Matemáticas a la Biología.

Cuando una población no está sujeta a condicionantes externos (falta de alimentos, competencia por el hábitat, ...) su ritmo de crecimiento o decrecimiento es debido únicamente al equilibrio entre su tasa de natalidad y su tasa de mortandad: la velocidad de crecimiento de la población (o de decrecimiento, si nacen menos individuos de los que mueren) es proporcional al número de individuos que la componen.

Para expresar esto matemáticamente, denotemos

$$N = N(t) \quad \text{número de habitantes en el instante } t.$$

Entonces, el crecimiento de la población, se puede expresar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = r\,N, \tag{2.11}$$

donde r es una constante, que caracteriza la tasa de crecimiento de la población, y que usualmente se determina experimentalmente. Si $r > 0$ la población aumentará de tamaño, por ser la velocidad de crecimiento positiva, mientras que si $r < 0$ la población disminuirá de tamaño.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $N(0) = N_0$, entonces $N(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} N' = r\,N \quad t \geq 0 \\ N(0) = N_0\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente, ya que es de variables separables (ver la Sección 2.2.2):

$$\int \frac{1}{N}\,dN = \int r\,dt$$

$$\ln|N| = rt + C$$

$$N = C\,e^{r\,t}$$

e, imponiendo la condición inicial $N(0) = N_0$, se obtiene

$$N = N_0\,e^{r\,t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de r, se representa en la Figura 2.2.

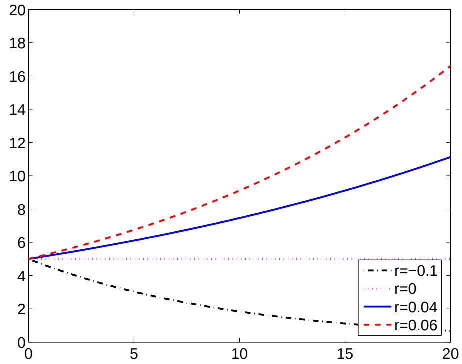

Figura 2.2: Representación gráfica de la función $N = 5\,e^{rt}$, solución de (2.12) con $N_0 = 5$, para varios valores de r.

Obsérvese que cuanto mas grande sea r, mas rápido es el crecimiento de la población, y que cuando $r < 0$ la población decrece. Para $r = 0$ el tamaño de la población permanece constante.

Este modelo de crecimiento de poblaciones recibe su nombre de Thomas Malthus (1766-1843), un clérigo y economista británico considerado el padre de la demografía. Basándose en este modelo, él dedujo que el crecimiento (exponencial) del número de seres humanos sobre la Tierra conduciría a épocas de grandes hambrunas, ya que la cantidad disponible de alimentos no aumentaría en la misma proporción que la población humana.

Este modelo de crecimiento de poblaciones es, como resulta obvio, excesivamente simple para reflejar situaciones tan complejas como la de la población humana sobre la tierra. Sin embargo, resulta útil para modelizar matemáticamente algunos experimentos controlados en laboratorio con determinadas especies de microorganismos, en sus etapas iniciales de desarrollo.

Por ejemplo, si se inicia el cultivo de una pequeña colonia de bacterias sobre un sustrato rico en nutrientes, entonces las bacterias pueden crecer y reproducirse sin restricciones, al menos durante un cierto periodo de tiempo.

Un modelo más elaborado de dinámica de poblaciones, en el que se imponen restricciones al crecimiento de la población, teniendo en cuenta otros aspectos vitales, se expone en la Sección 2.3.5.

2.3.2 Desintegración radiactiva

Los núcleos de determinados elementos químicos (radiactivos) se desintegran, transformándose en otros y emitiendo radiaciones. Se sabe que la velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva (es decir, el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo) en un instante dado es proporcional al número de átomos de dicha sustancia existentes en ese instante. En consecuencia, si se denota por $A(t)$ el número de átomos de la sustancia original presentes en el instante t, se puede escribir:

$$A'(t) = -\lambda A(t),$$

donde el signo menos se debe a que la velocidad es negativa (el número de átomos disminuye) y la constante de proporcionalidad, $\lambda > 0$, se llama constante de descomposición o de decaimiento, y es propia de cada sustancia radiactiva.

Si se conoce el número de átomos presentes en un instante dado, por ejemplo se sabe que en $t = 0$ es $A(0) = A_0$, y se conoce también la constante de decaimiento, λ, entonces se puede predecir el número de átomos presentes en cualquier instante posterior, ya que $A(t)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} A' = -\lambda A \quad t \geq 0, \\ A(0) = A_0 \,. \end{cases} \tag{2.13}$$

La ecuación en (2.13) es de variables separables, como la del ejemplo anterior, y la solución del problema de valor inicial viene dada por la exponencial decreciente:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de λ, se representa en la Figura 2.3. Obsérvese que cuanto mas grande sea λ, mas rápidamente se desintegra la sustancia.

Obsérvese también que, para conocer el valor del coeficiente λ de una sustancia determinada, basta conocer el valor de $A(t)$ en dos instantes distintos.

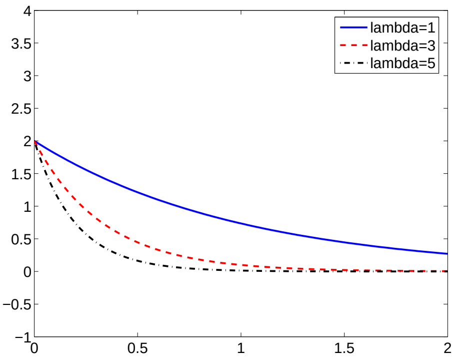

Figura 2.3: Representación gráfica de la función $A = 2e^{-\lambda t}$, solución de (2.13) con $A_0 = 2$, para varios valores de λ.

Por ejemplo, sabiendo que $A(0) = A_0$ y $A(t_1) = A_1$, se tiene, por un lado $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, $\forall\, t \geq 0$, y por el otro:

$$A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1} = A_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t_1} = \frac{A_1}{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_1 = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right).$$

Vida media

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una cierta cantidad de dicha sustancia en **desintegrarse a la mitad**. Es distinta para cada sustancia. Por ejemplo, el Carbono-14, C_{14}, tiene una vida media de 5730 años, lo que significa que una cantidad cualquiera se reduce, al cabo de ese tiempo, a la mitad. La otra mitad se habrá convertido en otras sustancias.

La vida media sólo depende de la constante de descomposición λ, y no depende de la cantidad de sustancia presente inicialmente, A_0.

En efecto, sea V_m la vida media de una sustancia radiactiva. Puesto que

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t},$$

y que en el tiempo $t = V_m$ los valores de A serán $A(V_m) = A_0/2$, se deduce que

$$\frac{A_0}{2} = A(V_m) = A_0 e^{-\lambda V_m} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda V_m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda V_m} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda V_m = \ln(2).$$

Por lo tanto, la vida media para un elemento radiactivo es:

$$V_m = \frac{1}{\lambda} \ln(2). \tag{2.14}$$

Datación por radiocarbono

Es una técnica para determinar la edad de objetos fabricados con sustancias orgánicas que está basada en la ley de decaimiento exponencial (2.13) considerada anteriormente.

El Carbono-14 es producido de forma continua en la atmósfera, como consecuencia del bombardeo de los átomos de nitrógeno, contenidos en el aire, por neutrones cósmicos. Este Carbono-14 se combina con el Oxígeno para formar el dióxido de carbono (CO_2), asimilado por las plantas que, a su vez, son ingeridas por los animales.

Los átomos de Carbono-14 presentes en los seres vivos están constantemente desintegrándose, pero, simultáneamente, son reemplazados por nuevos átomos a un ritmo constante, de modo que el porcentaje de Carbono-14 en la atmósfera y en los animales y plantas se mantiene constante, aunque su cantidad varía de unos seres vivos a otros.

Cuando una planta o animal muere, cesa la asimilación de Carbono-14 del exterior mientras que el que contiene su organismo sigue desintegrándose. Como resultado, la cantidad de Carbono-14 en el organismo comienza a disminuir.

La cantidad de C_{14} que había en un objeto cuando fue fabricado es conocida si se sabe con qué material fue hecho (por ejemplo, madera de pino, tela de lino, papiro, ...).

La técnica llamada del C_{14}, para datar un objeto consiste en medir la la cantidad de C_{14} que queda en la actualidad en dicho objeto, y utilizar la forma de las soluciones de la ecuación de decaimiento radiactivo para calcular el tiempo que ha pasado.

Por ejemplo, la técnica de C_{14} se utilizó en el año 1988 para estimar la edad del Sudario de Turín, tela de lino hallada en 1356 que muestra la imagen de un hombre que presenta marcas y traumas físicos (ver la Figura 2.4), y de la que se pensaba que podría ser la tela que cubría a Jesús de Nazaret en el sepulcro, llamada también Sábana Santa.

Se observó que las fibras del tejido contenían entre un 92 % y un 93 % del nivel inicial de C_{14} .

Teniendo en cuenta que las soluciones de (2.13) son decrecientes, el tiempo transcurrido desde que el Sudario fue confeccionado hasta la fecha de 1988 debería ser un valor $t^\star$ que verifique

$$0.93A_0 \geq A(t^\star) \geq 0.92A_0$$

o, lo que es lo mismo,

$$0.93 \geq \frac{A(t^\star)}{A_0} \geq 0.92.$$

De la expresión de las soluciones se tiene

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

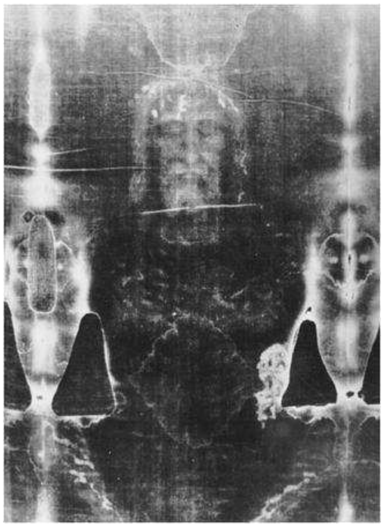

Figura 2.4: Sudario de Turín.

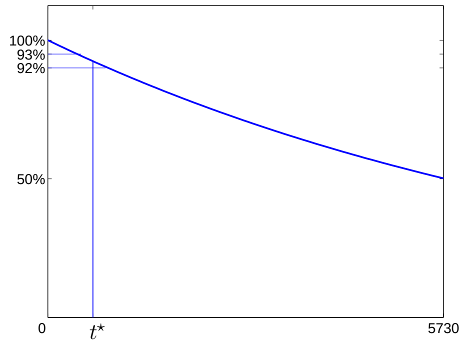

Figura 2.5: Curva de decaimiento del C_{14}.

luego se busca $t^\star$ tal que

$$0.93 \geq e^{-\lambda t^\star} \geq 0.92 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(0.93) \geq -\lambda t^\star \geq \ln(0.92) \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln(0.93) \leq \lambda t^\star \leq -\ln(0.92)$$

es decir, puesto que λ es positiva,

$$-\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda}.$$

La constante de desintegración, λ, del C_{14} vale (ver (2.14))

$$\lambda = \frac{1}{V_m} \ln(2) = \frac{1}{5730} \cdot 0.6931 \approx 0.000121,$$

por consiguiente, se tiene

$$599 \approx -\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda} \approx 689.$$

Este resultado indica que el Sudario fue fabricado entre 689 y 599 años antes del momento en que fueron realizadas las pruebas, en el año de 1988. Es decir, mucho después de la época en que vivió Jesús. Lo que probó que no podía ser la Sábana Santa.

2.3.3 Dinámica de crecimiento de un individuo: modelo de Bertalanffy.

En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo matemático para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

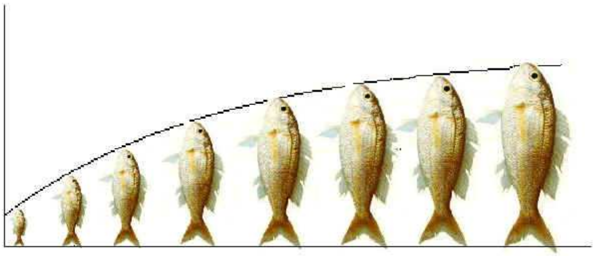

Figura 2.6: Modelo de Bertalanffy.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t y sea A la talla máxima de la especie, es decir la talla máxima alcanzable por un pez adulto.

La ley de crecimiento de este modelo dice que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima permisible:

$$L'(t) = k(A - L(t)),$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la longitud del individuo es $0 < L_0 < A$, entonces la función $L(t)$, talla en el instante t, será solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} L' = k(A - L) \\ L(0) = L_0 \,. \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Como la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima alcanzable disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye también con el tiempo, lo que implica que los ejemplares de menor edad crecen a mayor velocidad que los de mayor edad. En este modelo, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que es lo que ocurre en la realidad.

La ecuación diferencial de (2.15) se puede integrar fácilmente, ya que es de variables separables:

$$\int \frac{dL}{A - L} = \int k\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln|A - L| = kt + C \quad \Longleftrightarrow \quad A - L = Ce^{-kt}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$L = A + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ arbitraria.}$$

Imponiendo la condición inicial, $L(0) = L_0$, se tiene

$$L_0 = L(0) = A + Ce^0 = A + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = L_0 - A,$$

luego la solución del problema (2.15) es

$$L(t) = A + (L_0 - A)e^{-kt}.$$

En la Figura 2.7 está representada la solución del problema (2.15) para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.
Obsérvese que la recta horizontal $L = A$ es una asíntota horizontal de la solución, es decir,

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = A,$$

lo que expresa matemáticamente el hecho de que la talla de los peces tiende, cuando pasa el tiempo, a aproximarse al valor A, pero sin nunca alcanzarlo.
Por ello se puede decir que A es la **longitud asintótica** de la especie.

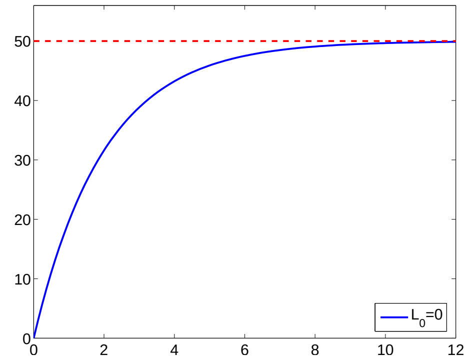

Figura 2.7: Representación gráfica de la solución de (2.15), para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.

2.3.4 Ley de enfriamiento de Newton

En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = -k(T(t) - M), \tag{2.16}$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, entonces, la temperatura del objeto en cualquier instante posterior, $T(t)$, viene dada por la solución del problema de valor inicial:

$$\left\{\begin{array}{l} T' = -k(T - M), \\ T(0) = T_0\,. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Esta ecuación es de variables separables. De hecho, es la misma ecuación de la Sección 2.3.3: $T' = -k(T - M) = k(M - T)$. Su solución general es

$$T(t) = M + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

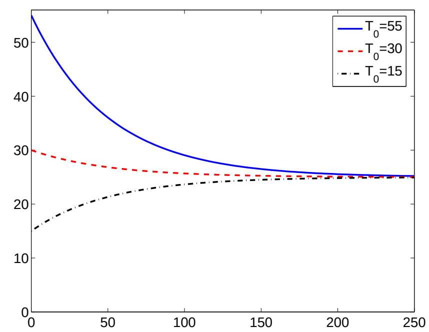

Figura 2.8: Representación gráfica de la solución de (2.17), para $M = 25$, $k = 0.02$ y varios valores del dato inicial T_0.

La solución particular que verifica $T(0) = T_0$ es

$$T(t) = M + (T_0 - M)e^{-kt}.$$

En la Figura 2.8 están representadas las soluciones del problema (2.17) para diversos valores del dato inicial T_0. Obsérvese que, como es obvio intuitivamente, la temperatura del objeto varía más rápidamente cuanto mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

Por otro lado, sea cual sea su temperatura inicial, la temperatura del objeto tiende, cuando pasa el tiempo, a igualarse con la temperatura del medio (asíntota horizontal en $T = M$).

2.3.5 Dinámica de poblaciones: ecuación logística

En la Sección 2.3.1, se ha considerado un modelo simple de la dinámica de poblaciones, en el que se supone que no hay limitaciones de alimentos y, por tanto la población puede crecer de manera exponencial. El modelo que se presenta ahora es un poco más complicado. En él se tiene en cuenta la existencia de circunstancias que limitan el crecimiento exponencial de la población.

En determinadas condiciones, el crecimiento de algunas poblaciones se rige por la siguiente ley, denominada **logística**:

$$p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t). \tag{2.18}$$

En esta ecuación $p(t)$ representa el número de individuos de la población existentes en el instante t. El primer término de la derecha de esta ecuación $(r\,p(t))$ expresa matemáticamente el crecimiento natural de la población, debido a la reproducción: la población crece de forma proporcional al número de individuos de la misma. El segundo término $(-m\,p^2(t))$ intenta expresar el hecho de que, si los recursos (alimentos) son limitados, entonces los individuos de la población "compiten" por ellos, impidiendo un crecimiento ilimitado. Este término hace disminuir la velocidad a la que crece la población, razón por la que lleva signo menos.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $p(0) = p_0$, entonces $p = p(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = r\,p - m\,p^2, \\ p(0) = p_0\,. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

La ecuación (2.18) es de variables separables, luego:

$$\frac{dp}{dt} = p(r - mp) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p(r - mp)}\,dp = \int dt.$$

Para calcular la integral de la izquierda hay que escribir el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{p(r - mp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{r - mp} = \frac{Ar - Amp + Bp}{p(r - mp)} = \frac{Ar + (B - Am)p}{p(r - mp)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ar = 1 \\ B - Am = 0 \end{array} \right.$$

de donde, $A = 1/r$ y $B = m/r$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{p(r - mp)}\,dp = \int \left(\frac{1/r}{p} + \frac{m/r}{r - mp} \right) dp = \frac{1}{r} \int \left(\frac{1}{p} + \frac{m}{r - mp} \right) dp = \int dt.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{1}{r}\left(\ln|p| - \ln|r - mp|\right) = t + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln\left|\frac{p}{r - mp}\right| = rt + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Tomando ahora exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{p}{r - mp} = C\,e^{rt} \iff p = Cr\,e^{rt} - Cm\,e^{rt}p \iff p = \frac{Cr\,e^{rt}}{1 + Cm\,e^{rt}}.$$

Y de aquí, dividiendo numerador y denominador por Ce^{rt} y renombrando la constante arbitraria C, se tiene, finalmente, la expresión siguiente para la solución general de la ecuación logística:

$$p = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}\ .$$

Por tanto, la solución general de (2.18) es:

$$p(t) = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.} \tag{2.20}$$

Esta ecuación tiene, además, las soluciones constantes $p = \beta$, para los valores de β que anulen el segundo miembro de la ecuación diferencial, en este caso:

$$\beta(r - m\beta) = 0 \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = r/m, \end{cases}$$

La solución constante $p = r/m$ está incluida en la expresión de la solución general, para el valor de $C = 0$. En cambio, la solución constante $p = 0$ no se obtiene de la expresión de la solución general para ningún valor de la constante arbitraria C: la ecuación logística tiene todas las soluciones dadas por (2.20) y, **además**, la solución constante $p = 0$.

La solución particular que verifica la condición inicial $p(0) = p_0$ se obtiene para el valor de la constante arbitraria $C = \dfrac{r - mp_0}{p_0}$ y es:

$$p(t) = \frac{r\,p_0}{mp_0 + (r - mp_0)\,e^{-rt}}\ .$$

Su comportamiento cualitativo puede observarse en la Figura 2.9 para varios valores de la condición inicial p_0 .

Obsérvese que, sea cual sea el número de individuos de la población inicial, esta tiende, con el tiempo, a estabilizarse en el valor constante $P = \dfrac{r}{m}$ (asíntota horizontal de $p(t)$).

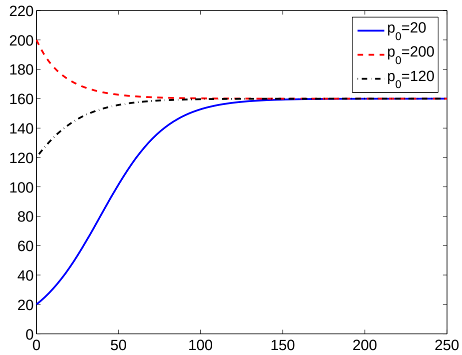

Figura 2.9: Gráfica de la solución del problema (2.19) con $r = 0.05$ y $m = 0.0003125$, para varios valores de p_0.

2.3.6 Dinámica de poblaciones: modelo presa-depredador

El caso, mucho más complicado desde el punto de vista matemático, en que hay dos especies diferentes que interaccionan, también se puede representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, se considera el caso de un sistema presa-predador, es decir, de un eco-sistema con dos poblaciones de dos especies distintas, en donde una de ellas es el alimento de la otra. Se denota por $p_1(t)$ el número de individuos de la población de presas y por $p_2(t)$ el número de individuos de la población de predadores.

En determinadas condiciones, un tal sistema se comporta según la ley siguiente, llamada **sistema de Lotka-Volterra**:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t). \end{cases}$$

Este modelo es distinto de los anteriores, ya que aquí se tiene un **sistema diferencial**, es decir un sistema, con dos incógnitas $p_1(t)$ y $p_2(t)$, de dos ecuaciones diferenciales que relacionan las incógnitas con sus derivadas y con las otras incógnitas.

El término $r_1 p_1(t)$ de la primera ecuación representa el crecimiento natural (positivo) de la población de presas, en ausencia de predadores. El correspondiente término $-r_2 p_2(t)$ de la segunda ecuación representa el crecimiento de la población de predadores en ausencia de presas, que es negativo por falta de alimento.

Los términos $-d_1 p_1(t) p_2(t)$ y $d_2 p_1(t) p_2(t)$, por su parte, tienen en cuenta la iteracción entre ambas especies, que resulta en un decrecimiento de la población de presas y un crecimiento de la población de predadores (todos los coeficientes se suponen positivos).

Si se conocen el número de presas y el de predadores en un instante dado, $t = 0$, entonces se puede predecir el número de individuos de cada especie en cualquier instante posterior, mediante la solución del correspondiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t)). \\ p_1(0) = A \\ p_2(0) = B. \end{cases}$$

Obsérvese que se impone una condición inicial para cada incógnita, p_1 y p_2.

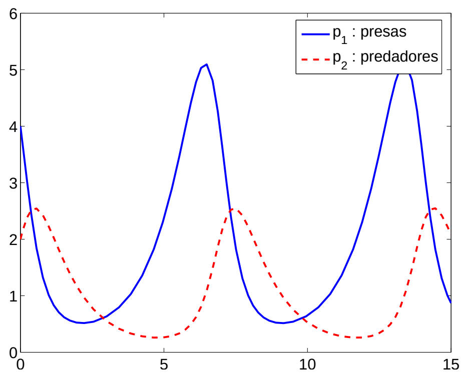

Figura 2.10: Representación de la solución del sistema de presa-predador, p_1 y p_2, sobre el intervalo temporal $[0, 10]$, para los valores de los coeficientes $r_1 = r_2 = d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$ y de los datos iniciales $A = 4$ y $B = 2$.

2.4 Soluciones de equilibrio

En muchas ocasiones, un sistema (físico, biológico,...), se representa mediante una ecuación de la forma:

$$y'(t) = f(y) \tag{2.21}$$

donde f es una función dada que **sólo depende de** y, lo que significa que la variación del sistema que se estudia no depende del tiempo, sólo depende del estado del sistema en cada instante. Todos los ejemplos mostrados en la Sección 2.3 son de esta forma.

A las **soluciones constantes** de (2.21) se les llama **soluciones de equilibrio** o **puntos fijos** de la ecuación.

EJEMPLO:
La ecuación $y' = ky$ tiene la solución de equilibrio $y = 0$.

El estudio de los puntos de equilibrio de una ecuación diferencial tiene interés porque son soluciones "de referencia" para averiguar el comportamiento de las demás soluciones de la ecuación diferencial.

La propiedad básica de las soluciones de equilibrio es que, sí, inicialmente, el sistema está en un estado de equilibrio, permanecerá en dicho estado en todos los instantes posteriores (a menos que alguna fuerza externa perturbe el sistema). Por ejemplo, si inicialmente $y(0) = K$ y K es una solución de equilibrio, entonces $y(t) = K$ para todo t.

Los puntos fijos de la ecuación diferencial de $y' = f(y)$ son los valores constantes de y que verifiquen

$$f(y) = 0.$$

EJEMPLO: Calcular los puntos fijos de $y' = 2y - y^3$.

Se tiene que $f(y) = 2y - y^3$. Luego

$$f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y - y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2 - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Entonces $f(y) = 0$ para $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$, que son los puntos fijos que buscamos.

2.4.1 Estabilidad de soluciones de equilibrio

Es interesante estudiar la **la estabilidad** de soluciones de equilibrio. Se dice que una solución de equilibrio es **estable** si vuelve a su valor después de una pequeña perturbación. Si la solución no vuelve a su valor después de una pequeña perturbación, se dice que es **inestable** (ver la Figura 2.11).

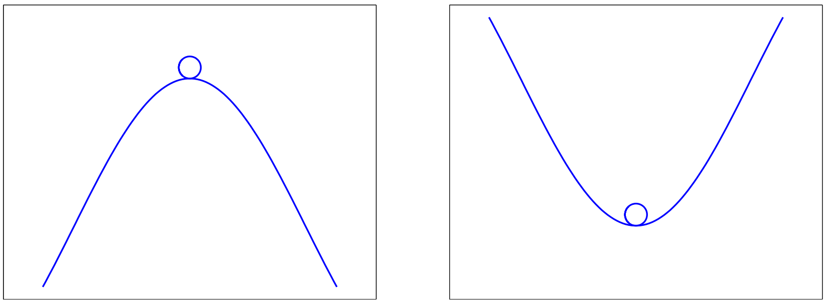

Figura 2.11: Dos estados de equilibrio: una bola en reposo en la cima de una colina (equilibrio inestable) y en el fondo de un valle (equilibrio estable).

CRITERIO DE ESTABILIDAD

Se considera la ecuación diferencial

$$y' = f(y),$$

donde f es una función derivable. Supongamos que $y = \hat{y}$ es una solución de equilibrio, es decir $f(\hat{y}) = 0$. Entonces

- La solución $y = \hat{y}$ es **estable** si $f'(\hat{y}) < 0$;
- La solución $y = \hat{y}$ es **inestable** si $f'(\hat{y}) > 0$.

EJEMPLO:

Estudiar la estabilidad de soluciones de equilibrio de $y' = 2y - y^3$.
Hemos visto en el ejemplo anterior que $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ son soluciones de equilibrio de esta ecuación. Para ver si son estables o no aplicamos el criterio de estabilidad. Se tiene que

$$f'(y) = 2 - 3y^2.$$

Luego

- $f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow y = 0$ es una solución de equilibrio inestable.
- $f'(\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ es estable.
- $f'(-\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ es estable.

Apéndice A

Complementos

A.1 Derivadas de funciones elementales

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{sh}(x)$	ch
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x\ln(a)}$	$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x\ln(a)$	$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\operatorname{arc\,tg}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
C	0	$\operatorname{ctg}(x)$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\operatorname{arc\,ctg}(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

A.2 Reglas principales de derivación

DERIVADA DE UNA SUMA:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

DERIVADA DEL PRODUCTO:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

DERIVADA DEL COCIENTE:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

REGLA DE LA CADENA:

$$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

A.3 Integrales de funciones elementales

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
1	$x + C$	$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x) + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\dfrac{1}{a^2 - x^2}$	$\dfrac{1}{2a} \ln\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C \ (a > 0)$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 + b}\rvert + C$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$	$\ln(x)$	$x\, \ln(x) - x$

A.4 Reglas principales de integración

INTEGRAL DE UNA SUMA:

$$\int (u(x) + v(x))\, dx = \int u(x)\, dx + \int v(x)\, dx$$

INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$