Tema 3

Curvas y superficies

Versión: 16 de febrero de 2009

3.1 Representación gráfica de curvas bidimensionales.

La representación gráfica de una curva en un ordenador es una linea poligonal construida uniendo mediante segmentos rectos un conjunto discreto y ordenado de puntos: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$.

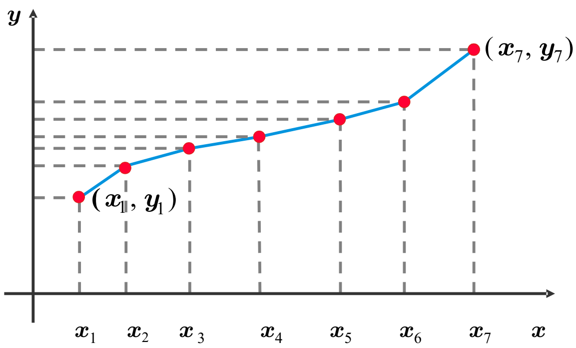


Figura 3.1: Linea poligonal determinada por un conjunto de puntos.

La línea así obtenida tendrá mayor apariencia de "suave" cuanto más puntos se utilicen para construirla, ya que los segmentos serán imperceptibles (véanse las Figuras 3.2 y 3.3).

3.1.1 Representación gráfica de funciones de una variable real

La relación $y = f(x)$, donde $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función de una variable real, se puede representar gráficamente mediante una curva plana.

La construcción de dicha gráfica en un ordenador básicamente sigue los siguientes pasos (ver la Figura 3.1):

- Construir un conjunto de puntos (tantos como se quiera) en el intervalo $[a, b]$, que serán las abscisas de los puntos que determinan la poligonal a construir. Normalmente, dichos puntos se toman regularmente espaciados y en número suficiente como para que la gráfica tenga aspecto "suave":

$$\{a = x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n = b\}$$

- Calcular los valores de la función f en los puntos anteriores:

$$\{y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2),\, \dots,\, y_n = f(x_n)\}$$

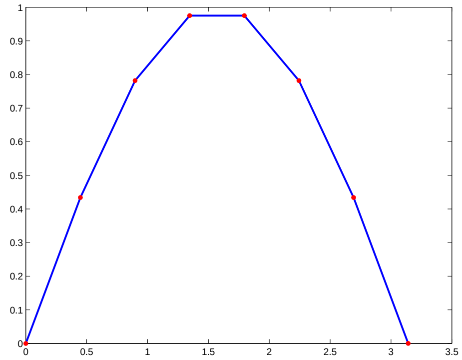


Figura 3.2: Representación de $y = \operatorname{sen}(x)$ en $[0, \pi]$ con 8 puntos.

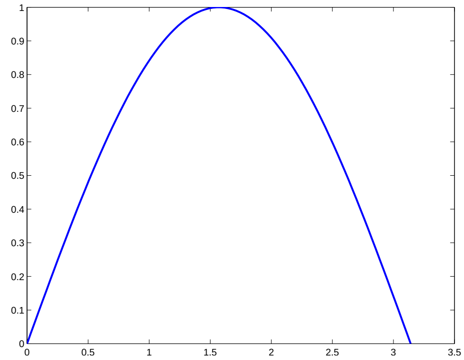


Figura 3.3: Representación de $y = \operatorname{sen}(x)$ en $[0, \pi]$ con 100 puntos.

- Unir los puntos (x_i, y_i) consecutivos mediante segmentos rectos.

Cuando una curva viene definida por una relación del tipo $y = f(x)$ se dice que está definida de forma explícita.

En ocasiones, una curva viene descrita por una relación, también explícita, pero del tipo:

$$x = g(y), \quad y \in [a, b].$$

Entonces será necesario construir en primer lugar el conjunto de “ordenadas”

$$\{a = y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n = b\}$$

y luego calcular las abscisas, como los valores de la función g:

$$\{x_1 = g(y_1),\, x_2 = g(y_2),\, \ldots,\, x_n = g(y_n)\}.$$

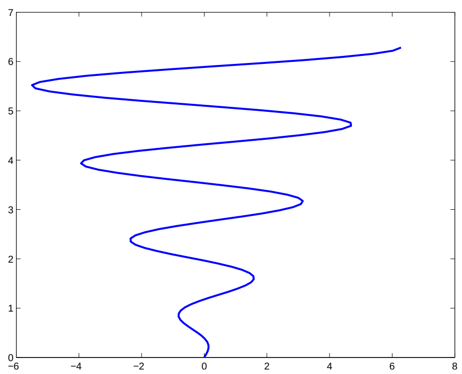


Figura 3.4: Curva definida por la relación $x = y\cos(4y)$, $y \in [0, 2\pi]$.

Una relación del tipo $f(x, y) = 0$ puede también representar, implícitamente, una curva: la formada por los puntos (x, y) del plano sobre los cuales la función f toma el valor cero. Se puede dibujar esta curva dibujando la curva de nivel $k = 0$ de la función f (ver Sección 3.2.4).

3.1.2 Curvas planas definidas mediante ecuaciones paramétricas

Otra forma de definir una curva plana es mediante sus **ecuaciones paramétricas**, en la cual los puntos (x, y) que forman la curva vienen dados por dos funciones que dependen de una variable auxiliar:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in [a, b].$$

La variable t se suele llamar el **parámetro de la curva**.

Para construir la gráfica de una curva definida de esta forma es preciso (ver el ejemplo de la Figura 3.5:

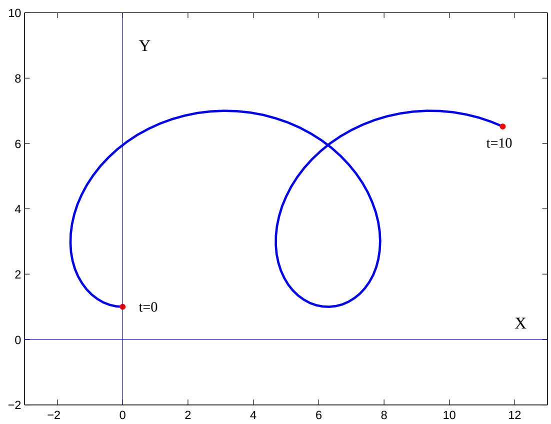
- Construir un conjunto de valores del parámetro $t \in [a, b]$:

$$\{a = t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n = b\}$$

- Calcular los valores x y de y para dichos valores del parámetro:

$$\{x_1 = f(t_1),\, x_2 = f(t_2),\, \ldots,\, x_n = f(t_n)\}$$
$$\{y_1 = g(t_1),\, y_2 = g(t_2),\, \ldots,\, y_n = g(t_n)\}$$

- Unir los puntos (x_i, y_i) consecutivos mediante segmentos rectos.



t	x	y
0	0	1
1	-1.5	2.4
2	-0.7	5.2
3	2.6	7.0
4	6.3	6
5	7.9	3.1
6	6.8	1.1
7	5.0	1.7
8	5.0	4.4
9	7.8	6.7
10	11.6	6.5

Figura 3.5: Representación de la curva de ecuaciones paramétricas $x = t - 3\,\mathrm{sen}(t)$, $y = 4 - 3\cos(t)$ para $t \in [0, 10]$. Obsérvese que no hay eje t.

Mediante ecuaciones paramétricas es posible describir muchas más curvas y más complicadas que mediante una ecuación explícita. Algunas serían prácticamente imposibles de visualizar sin la ayuda de herramientas gráficas informáticas (véanse Figuras 3.6 y Figuras 3.7).

3.1.3 Curvas planas en coordenadas polares

Recordemos que en el **sistema de coordenadas polares** la posición de un punto P queda definida por dos cantidades:

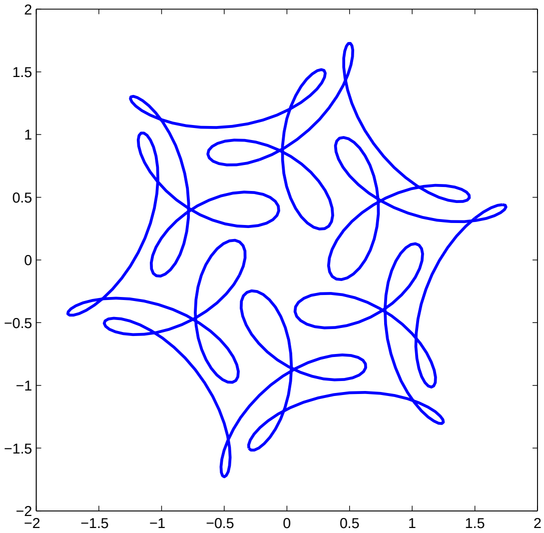


Figura 3.6: Representación de la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos(t) + 1/2\cos(7t) + 1/3\,\mathrm{sen}(17t)$, $y = \mathrm{sen}(t) + 1/2\,\mathrm{sen}(7t) + 1/3\cos(17t)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

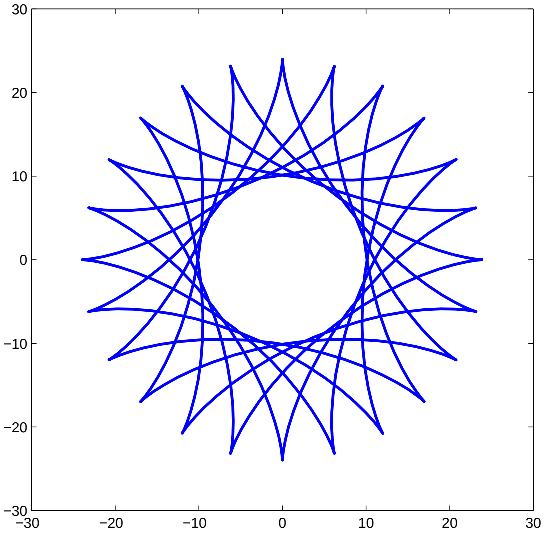


Figura 3.7: Representación de la curva de ecuaciones paramétricas $x = 17\cos(t) + 7\cos(\frac{17}{7}t)$, $y = 17\,\mathrm{sen}(t) - 7\,\mathrm{sen}(\frac{17}{7}t)$, para $t \in [0, 14\pi]$.

- r, que es la distancia de P a un punto fijo, O, llamado **polo** y
- θ, que es el ángulo que forma el segmento OP con una semirrecta fija de origen O denominada **eje polar**.

En tal sistema de coordenadas, el par (r, θ) se denomina **coordenadas polares** del punto P (ver Figura 3.8).

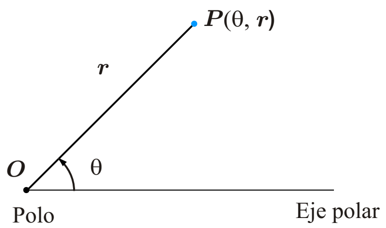


Figura 3.8: Sistema de coordenadas polares.

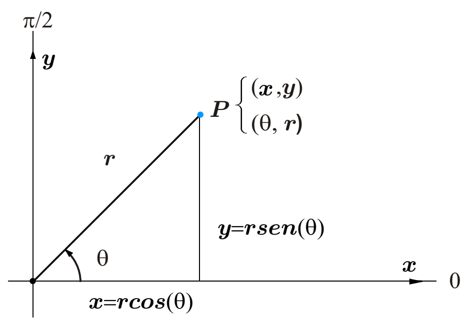


Figura 3.9: Coordenadas cartesianas y polares.

El paso de las coordenadas polares a cartesianas y viceversa se efectúa mediante las siguientes fórmulas, tomando el polo como origen de coordenadas y el eje polar como semi-eje positivo de abscisas (ver la Figura 3.9):

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta);$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Una relación del tipo $r = f(\theta)$ define de forma explícita una curva en coordenadas polares. Ver ejemplos en las Figuras 3.10 y 3.11.

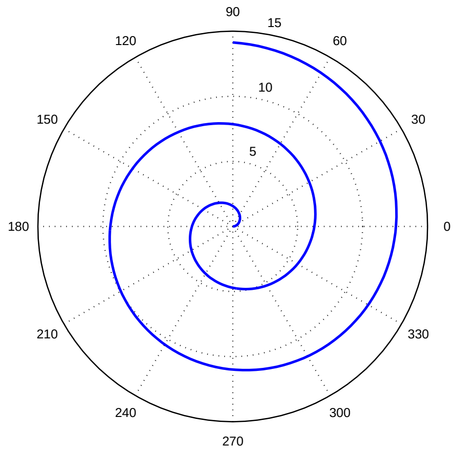


Figura 3.10: Curva de ecuación, en coordenadas polares, $r = \theta$, $\theta \in [0, 9\pi/2]$

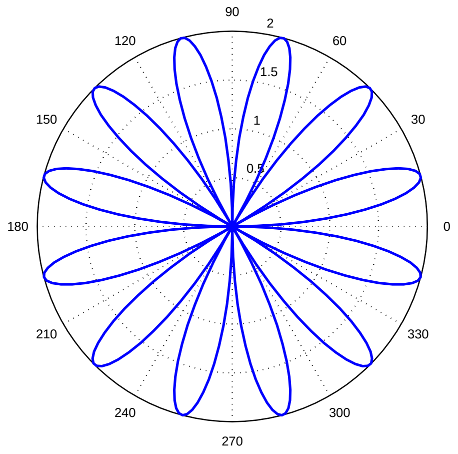


Figura 3.11: Curva de ecuación, en coordenadas polares, $r = 2\,\mathrm{sen}(6\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Los programas de que permiten realizar gráficas suelen disponer de las funciones adecuadas para dibujar curvas utilizando directamente las coordenadas polares. En este caso habrá que proporcionar las coordenadas de los puntos que definen la curva:

$$\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$$
$$\{r_1 = f(\theta_1), r_2 = f(\theta_2), \ldots, r_n = f(\theta_n)\}$$

En caso de que no se disponga de dichas funciones, habrá que utilizar las fórmulas

$$x_i = r_i\,\cos(\theta_i), \qquad y_i = r_i\,\mathrm{sen}(\theta_i)$$

para realizar la gráfica en coordenadas cartesianas.

3.2 Gráficos tridimensionales

La representación gráfica de objetos (curvas, superficies,...) tridimensionales presenta un grado mucho más grande de dificultad. Por un lado, es preciso utilizar técnicas de geometría proyectiva para determinar la perspectiva y conseguir impresión de tridimensionalidad. Por otro, aparece la necesidad de utilizar algoritmos y técnicas complejas para determinar partes ocultas. Y, aún más, iluminación, transparencias, aplicación de texturas, etc.

Todo ello queda fuera del ámbito de este curso. En estas notas se explican, muy brevemente, las formas más habituales de representación gráfica de "objetos" matemáticos tridimensionales.

3.2.1 Curvas en tres dimensiones

La gráfica de una curva tridimensional se dibuja, igual que la bidimensional, uniendo mediante segmentos rectos (en 3D) los puntos consecutivos de un conjunto discreto y ordenado. Mediante el software adecuado, estos segmentos se "proyectan" sobre el plano del dibujo para obtener impresión tridimensional.

La forma más sencilla de describir matemáticamente una curva tridimensional es mediante sus ecuaciones paramétricas. Estas ecuaciones describen los valores de las coordenadas (x, y, z) de cada punto de la curva en función de una variable auxiliar, llamada **parámetro**:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \qquad \text{para } t \in [a, b]$$

Para dibujar su gráfica habrá, pués, que construir las coordenadas de un conjunto discreto y ordenado de puntos de la curva. De forma similar a como se hizo en el caso bidimensional, el procedimiento es el siguiente (véanse los ejemplos de las Figuras 3.12 y 3.13):

- Construir un conjunto de valores del parámetro $t \in [a, b]$:

$$\{a = t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n = b\}$$

- Calcular los valores de x, de y y de z para dichos valores del parámetro:

$$\begin{array}{c} \{x_1 = f(t_1),\, x_2 = f(t_2),\, \ldots,\, x_n = f(t_n)\} \\ \{y_1 = g(t_1),\, y_2 = g(t_2),\, \ldots,\, y_n = g(t_n)\} \\ \{z_1 = h(t_1),\, z_2 = h(t_2),\, \ldots,\, z_n = h(t_n)\} \end{array}$$

- Unir los puntos (x_i, y_i, z_i) consecutivos mediante segmentos rectos.

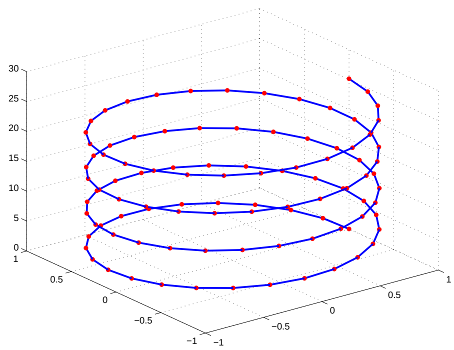


Figura 3.12: Gráfica de la curva 3D de ecuaciones paramétricas $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$, $z(t) = t$, $t \in [0, 8\pi]$.

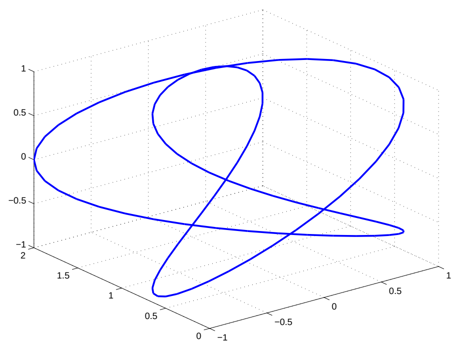


Figura 3.13: Gráfica de la curva $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = 2\cos^2(t)$, $z(t) = \operatorname{sen}(2t)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

3.2.2 Gráficas de funciones de dos variables: superficies

La ecuación explícita

$$z = f(x, y)$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, representa una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$: a cada punto (x, y) del dominio Ω del plano $\mathbb{R}^2$ la función f le hace corresponder un valor z que representa la "altura" de la superficie en ese punto.

Para dibujar la superficie es preciso disponer de una "discretización" del dominio Ω en el que está definida la función, es decir un conjunto de polígonos (normalmente triángulos o rectángulos) cuya unión sea Ω.

Un mallado en rectángulos de un dominio rectangular es fácil de construir a partir de sendas particiones de sus lados. Un mallado en triángulos es más complicado y precisa de algoritmos y programas especializados.

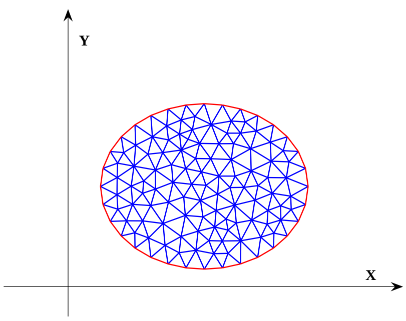


Figura 3.14: Mallado en triángulos de un dominio de frontera curva

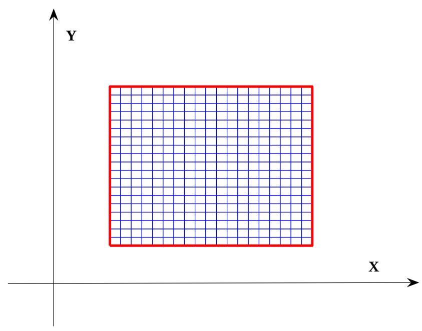


Figura 3.15: Mallado en rectángulos de un dominio rectangular

La forma de proporcionar los datos en uno y otro caso es diferente. Un mallado rectangular de un dominio $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ queda definido mediante las particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ cuyo producto cartesiano produce los nodos de la malla: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.

Para definir un mallado mediante triángulos es preciso, por un lado numerar sus vértices y disponer de sus coordenadas, (x_i, y_i), $1 = 1, \ldots, n$ y, por otro, numerar sus triángulos y describirlos enumerando, para cada uno, sus tres vértices.

Elevando cada vértice del mallado según el valor de f en ese punto se consigue una representación de la superficie como una red deformada, como en las Figuras 3.17 y 3.18.

Dar un color a cada arista dependiendo del valor de la función en sus extremos, como en la Figura 3.19, puede resultar útil.

Rellenando de color cada retícula del mallado, la superficie se hace opaca. El color de las caras puede ser constante en toda la superficie, como en la Figura 3.21, constante en cada cara, como en la Figura 3.22, o interpolado, es decir, degradado en cada cara, en función de los valores en los vértices, como se hace en la Figura 3.23.

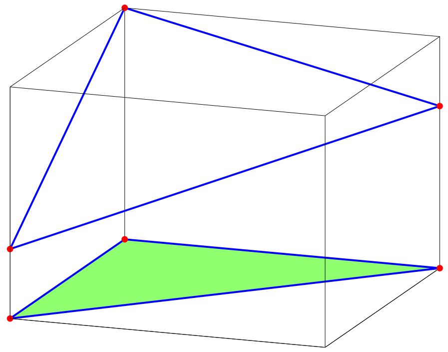


Figura 3.16:

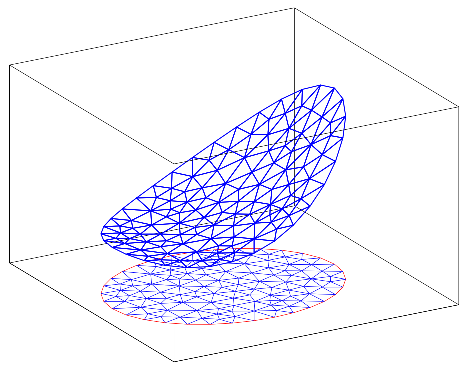


Figura 3.17: Red triangular deformada.

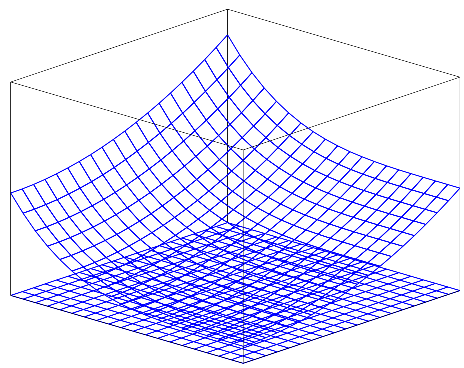


Figura 3.18: Red rectangular deformada.

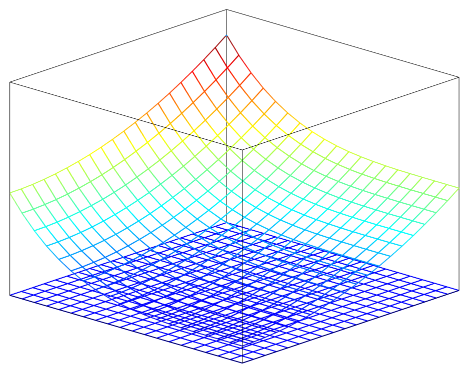


Figura 3.19: Red rectangular deformada. El color de las aristas depende del valor de la función.

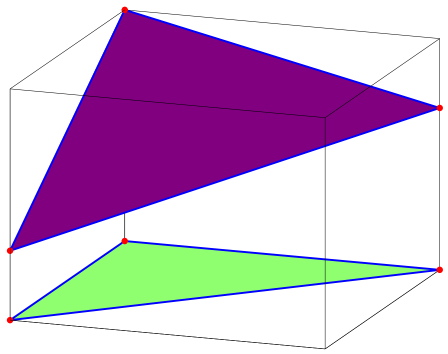


Figura 3.20: Cara rellena de color plano.

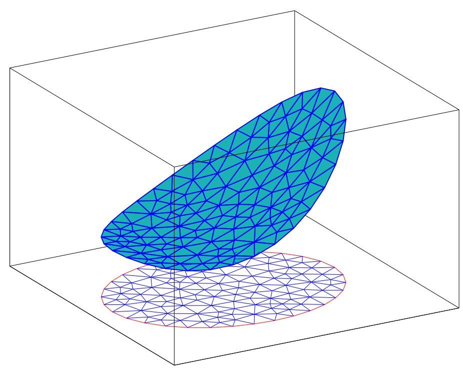


Figura 3.21: Todas las caras del mismo color.

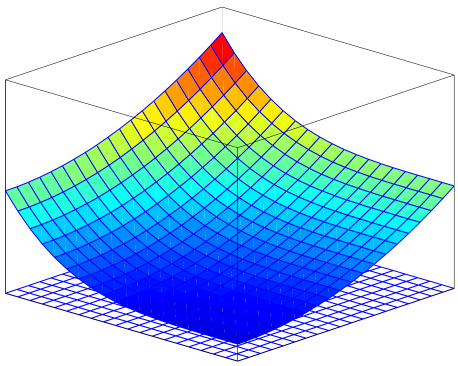


Figura 3.22: Color constante en cada cara, dependiente de la altura.

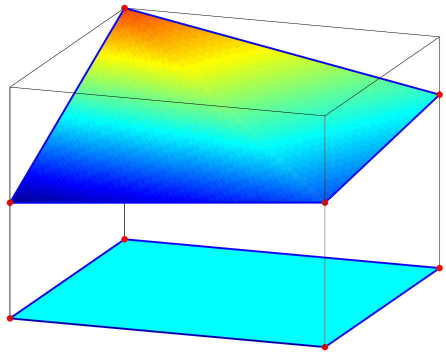


Figura 3.23: Color interpolado a partir de los valores en los vértices.

3.2.3 Superficies definidas mediante ecuaciones paramétricas

Una superficie en el espacio de tres dimensiones pueden también venir definida mediante ecuaciones paramétricas.

$$x = f_1(s,t), \quad y = f_2(s,t), \quad z = f_3(s,t), \quad (s,t) \in [a,b] \times [c,d]$$

En este caso, para construir la gráfica de la superficie es preciso crear una discretización del dominio donde varían los parámetros, $[a,b]\times[c,d]$, y utilizar las ecuaciones paramétricas para calcular los puntos correspondientes sobre la superficie.

Por ejemplo, para dibujar la superficie cilíndrica definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x(t,\varphi) = (2 + cos(t)) \cos(\varphi) \\ y(t,\varphi) = (2 + cos(t)) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z(t,\varphi) = t \\ t \in [0,2\pi], \ \varphi \in [0,2\pi], \end{cases},$$

hay que construir previamente particiones de los intervalos en que varían los parámetros:

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\},$$
$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

y luego, calcular los valores de x, y y z para cada par (t_i, φ_j):

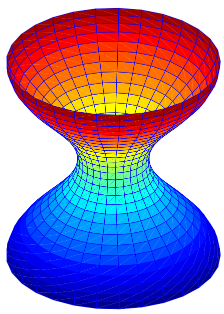


Figura 3.24: Superficie cilíndrica de ecuaciones paramétricas $x = (2 + cos(t)) \cos(\varphi)$, $y = (2 + cos(t)) \operatorname{sen}(\varphi)$, $z = t$.

3.2.4 Representación mediante curvas de nivel de una función de dos variables

Una forma habitual de representar gráficamente los valores de una función de dos variables, $f(x,y) = 0$ es dibujando sus lineas o curvas de nivel.

Se llama curva de nivel de valor k de la función $f(x,y)$ a la curva formada por los puntos del plano XY sobre los cuales la función f toma el valor k, es decir la curva ímplicitamente definida por la ecuación

$$f(x,y) = k$$

El dibujo de las curvas de nivel correspondientes a un conjunto de valores k proporciona una buena información del comportamiento de la función f.

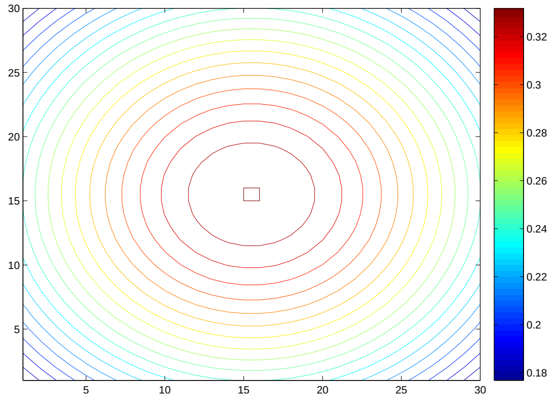


Figura 3.25: 20 curvas de nivel, correspondientes a valores equiespaciados, de la función $f(x,y) = \cos((x^2 + y^2)/4)/(3 + x^2 + y^2)$, $x, y \in [-1, 1]$.