Ejercicios de Álgebra Lineal

Sección 1 Lenguaje

Ejercicio 1.1 Usar flechas de implicación o equivalencia para marcar en qué dirección se cree que van las conclusiones lógicas en las siguientes proposiciones:

1. La ecuación $2x - 4 = 2$ se verifica sólo cuando $x = 3$.
2. Si $x = 3$, entonces $2x - 4 = 2$.
3. La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ se satisface si $x = 1$.
4. Si $x^2 > 4$, entonces $x > 2$ ó $x < -2$ y recíprocamente.

Ejercicio 1.2 Considérense las seis implicaciones siguientes y decídase en cada caso: (i) si la implicación es cierta y (ii) si la implicación contraria es cierta. (x, y, z son números reales).

1. $x = 2$ e $y = 5 \Longrightarrow x + y = 7$.
2. $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 1$.
3. $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ ó $y = 0$.
4. $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$.
5. $xy = xz \Longrightarrow y = z$.
6. $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$.

Ejercicio 1.3 Considérese la proposición $2x + 5 \geq 13$. ¿Es $x \geq 0$ una condición necesaria, suficiente, o necesaria y suficiente para que la proposición sea cierta? Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 50$. Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 4$.

Ejercicio 1.4 Resolver la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\frac{3x+1}{x^2-1} = 0.$$

Ejercicio 1.5 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$.
2. $|x + 2| = \sqrt{4 - x}$.
3. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$.
4. $\sqrt{x - 4} = \sqrt{x + 5} - 9$.
5. $\sqrt{x - 4} = 9 - \sqrt{x + 5}$.

Ejercicio 1.6 Rellenar las casillas con "si y sólo si" cuando el resultado sea un enunciado cierto o, en otro caso, con "si" o "sólo si."

1. $x = \sqrt{4}$ $\boxed{}$ $x = 2$.
2. $x^2 > 0$ $\boxed{}$ $x > 0$.
3. $x^2 < 9$ $\boxed{}$ $x < 3$.
4. $x(x^2 + 1) = 0$ $\boxed{}$ $x = 0$.

5. $x(x+3) < 0$ $\boxed{}$ $x > -3$.

Ejercicio 1.7 Considérese el siguiente intento de resolver la ecuación $x + \sqrt{x+4} = 2$: *De la ecuación dada se deduce que* $\sqrt{x+4} = 2 - x$. *Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene* $x + 4 = 4 - 4x + x^2$. *Después de simplificar se ve que esta ecuación implica que* $x^2 - 5x = 0$. *Cancelando* x*, obtenemos* $x - 5 = 0$ *y esta ecuación se verifica cuando* $x = 5$.

1. Escribir en forma de flechas las implicaciones o equivalencias del razonamiento anterior. ¿Cuáles son correctas?

2. Resolver correctamente la ecuación.

Ejercicio 1.8 Enunciar la negación de cada una de las 6 proposiciones siguientes, de la forma más simple posible:

1. $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

2. Todo x verifica $x \geq a$.

3. Ni x ni y es menor que 5.

4. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que se verifica B.

5. Nadie puede evitar que le gusten los gatos.

6. Cada uno ama a alguien algunas veces.

Ejercicio 1.9 "El Tribunal Supremo no admite a trámite el recurso a una decisión de un tribunal inferior, en la que se aprueba el rechazo de un juez a permitir que un acusado se niegue a hablar". ¿Tiene el acusado derecho a negarse a hablar?

Ejercicio 1.10 Probar por **inducción** que:

1. Para cada $n \geq 1$:

   (a)
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   (b)
   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (c)
   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

   (d)
   $$3^n - 2n - 1 \text{ es múltiplo de } 4$$

   (e)
   $$3^n - 2n^2 - 1 \text{ es múltiplo de } 8$$

2. Todo número natural $n > 1$ puede expresarse en la forma $n = p_1 p_2 \cdots p_r$, siendo p_i $(i = 1, \cdots, r)$ números primos.

Sección 2 Conjuntos

Nota 2.1 Los ejercicios siguientes tratan de teoría de conjuntos, para repasar conceptos ya dados. Las primitivas de la teoría de conjuntos son:

1. La relación de pertenencia: $\omega \in \Omega$ expresa que ω es un elemento del conjunto Ω. Para expresar que ω no es un elemento de Ω se escribe $\omega \notin \Omega$

2. La relación de inclusión: $A \subset \Omega$ expresa que todo elemento de A es un elemento de Ω. En este caso se dice que A es un subconjunto de Ω, o que A es una parte de Ω, o que A está contenido en Ω. Si $A \subset \Omega$ y $\Omega \subset A$, entonces A y Ω tienen los mismos elementos, se dice que son iguales, y se escribe $A = \Omega$.

3. El conjunto vacío, que es el conjunto que no tiene elementos. Se le designa por $\emptyset$ y se supone que está contenido en cualquier conjunto.

Normalmente se operará con un conjunto Ω y sus subconjuntos (incluyendo Ω y $\emptyset$). Entre estos subconjuntos se tiene la relación de inclusión. El conjunto de todos los subconjuntos de Ω se designa por $\mathcal{P}(\Omega)$, y se llama el conjunto de las partes de Ω. Escribir que $A \subset \Omega$ equivale a que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

En el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ se definen tres operaciones, unión, intersección y diferencia, de la forma siguiente:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ó } \omega \in B\}$$

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}$$

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ y } \omega \notin B\}$$

Al conjunto $\Omega \setminus A$ se le llama el complementario de A.

Ejercicio 2.2 Sea Ω el conjunto de todos los números naturales.

2.2.1 Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6\}$. Hallar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$.

2.2.2 Sean $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ y $D = \{6\}$. Deducir si los enunciados siguientes son ciertos: $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subset B$; $D \subset C$; $B = C$; $A = B$. Calcular $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cap C \cap D$.

Ejercicio 2.3 Sea Ω el conjunto de todos los estudiantes de una cierta universidad. Sea F el conjunto de las mujeres estudiantes, M el conjunto de todos los estudiantes que hacen algún curso de matemáticas, C el de los estudiantes que pertenecen al coro de la universidad, B el de todos los estudiantes que hacen algún curso de biología, y T el de todos los estudiantes que juegan al tenis. Describir los elementos de los conjuntos siguientes: $\Omega \setminus M$, $M \cup C$, $F \cap T$, $M \setminus (B \cap T)$ y $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$.

Ejercicio 2.4 En la situación del Ejercicio 2.3, escribir los siguientes enunciados en la terminología de la teoría de conjuntos:

1. Todos los estudiantes de biología hacen matemáticas.
2. En el coro de la universidad hay mujeres que estudian biología.
3. Todas las mujeres que ni juegan al tenis ni están en el coro universitario estudian biología.

Ejercicio 2.5 En la situación del Ejercicio 2.3, describir los conjuntos siguientes: $F \cap B \cap C$; $M \cap F$; $((M \cap B) \setminus C) \setminus T$.

Ejercicio 2.6 Sea Ω un conjunto arbitrario. Demostrar que se verifican las propiedades siguientes para subconjuntos de Ω:

1. Propiedades asociativas $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Propiedades conmutativas $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
3. Leyes idempotentes $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
4. Leyes de simplificación $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
5. Propiedades distributivas $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 2.7 Determinar cuáles de las fórmulas siguientes son correctas. Si alguna no lo es, dar un contraejemplo: $A \setminus B = B \setminus A$, $A \subset B \iff A \cup B = B$, $A \subset B \iff A \cap B = A$, $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$, $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$, $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Ejercicio 2.8 Hacer la lista completa de los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$. ¿Cuántos hay, incluyendo el vacío y el total? Hacer lo mismo con el conjunto $\{a, b, c, d\}$.

Ejercicio 2.9 Una encuesta dio como resultado que a 50 personas les gustaba el café, a 40 el té, a 35 ambos y a 10 ninguno de los dos. ¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

Ejercicio 2.10 Sea A un conjunto con un número finito de elementos, y designemos por $n(A)$ a este número. Si A y B son conjuntos finitos cualesquiera, probar que:

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

Ejercicio 2.11 Si A y B son conjuntos arbitrarios, se define la diferencia simétrica entre A y B por la relación

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Evidentemente, $A \triangle B = B \triangle A$ mientras que, en general, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Probar lo siguiente: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \triangle B) \triangle C$ consta de los elementos que pertenecen a sólo uno de los conjuntos A, B, C, o bien que están en los tres.

Ejercicio 2.12 Mil personas respondieron a una encuesta destinada a averiguar qué periódico, A, B o C, leían en un cierto día. Las respuestas fueron que 420 leían A, 316 leían B y 160 leían C. Entre los encuestados, 116 leían A y B, 100 A y C, 30 B y C y 16 leían los tres.

1. ¿Cuántos leían A pero no B?
2. ¿Cuántos leían C, pero no A ni B?
3. ¿Cuántos no leían ninguno?

Desígnese por Ω al conjunto de los 1.000 encuestados (el conjunto universal). Aplicando la notación del Ejercicio 2.10, tenemos que $n(A) = 420$ y $n(A \cap B \cap C) = 16$, por ejemplo. Describir lo números de lectores de manera semejante. Averiguar por qué es válida la ecuación siguiente

$$n(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)) = n(\Omega) - n(A \cup B \cup C)$$

Probar que, si A, B, C, son conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$$
$$-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Sección 3 Aplicaciones o funciones

Ejercicio 3.1 Sean A y B conjuntos.

3.1.1 Se llama producto de A por B (o producto cartesiano), y se denota por $A \times B$ al conjunto de los pares cuyo primer elemento es uno de A y cuyo segundo elemento es uno de B. En símbolos:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

3.1.2 Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, escribir todos los elementos de $A \times B$ y de $B \times A$. ¿Es $A \times B = B \times A$?

3.1.3 Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, ¿cuántos elementos tiene $A \times B$?

3.1.4 Probar que:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Ejercicio 3.2 Sean A, B dos conjuntos.

3.2.1 Una función f de A en B es un subconjunto $f \subset A \times B$ tal que, para todo elemento $a \in A$ **existe un único** $(a, b) \in A \times B$ (es decir, existe un único elemento del producto cuya primera componente es a).

3.2.2 Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Averiguar cuáles de los siguientes subconjuntos de $A \times B$ son funciones:

1. $f = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$.
2. $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$.
3. $f = \{(a, 1), (b, 2)\}$.

3.2.3 Averiguar cuáles de los siguentes conjuntos son funciones de A en A:

1. $f = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$.
2. $f = \{(a, a), (b, b)\}$.
3. $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$.
4. $f = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

3.2.4 Si $f \subset A \times B$ es una función y $(a, b) \in f$, se dice que b es la imagen de a mediante f y que a es un antecedente de b mediante f. Si f es una función, responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Tienen imagen mediante f todos los elementos de A? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuántas?
2. ¿Tienen antecedente mediante f todos los elementos de B?
3. ¿Puede haber elementos de B que tengan más de un antecedente?

3.2.5 En los libros no se usa esta notación para las funciones, sino la clásica, que es como sigue: Si $f \subset A \times B$ es una función, se pondrá, para $(a, b) \in f$,

$$f(a) = b \quad \text{y} \quad a \in f^{-1}(b).$$

Así, $f(a)$ denota la imagen de a y $f^{-1}(b)$ el conjunto de los antecedentes de b. En vez de escribir $f \subset A \times B$ se escribe $f : A \to B$. Esta notación es especialmente útil en conjuntos infinitos.

3.2.6 Sean $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números enteros y el de los racionales, respectivamente. Se designan por $\mathbb{Z}_0$ y $\mathbb{Q}_0$ a los conjuntos de los enteros y racionales **no negativos** (es decir, a los positivos junto con el cero). Se designan por $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Q}_+$ a los conjuntos de los enteros y racionales **positivos**. Averiguar cuáles de las fórmulas siguientes definen una función:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = -n$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_0$ dada por $f(n) = n^2$.
3. $f : \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = +\sqrt{n}$.
4. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = 1/(1 - r)$.
5. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = 1/(1 + r^2)$.

6. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = (r)^{1/3}$.

Ejercicio 3.3 Sea $f : A \to B$ una función.

3.3.1 Sea dirá que la función $f : A \to B$ es **inyectiva** si todo elemento de B tiene un antecedente *a lo más*. Se dirá que es **sobre** o **suprayectiva** si todo elemento de B tiene un antecedente *a lo menos*. Se dirá que es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva, es decir, si todo elemento de B tiene *exactamente un antecedente*.

3.3.2 Para las siguientes funciones, averiguar si son inyectivas, suprayectivas, biyectivas, o ninguna de las tres:

1. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = -3$.
2. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = -5r + 4$.
3. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_0$ dada por $f(r) = r^2$.
4. $f : \mathbb{Q}_0 \to \mathbb{Q}_0$ dada por $f(r) = r^2$.
5. $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = (r + 1)/(r - 1)$.
6. $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}_0$ dada por $f(r) = \mid (r + 1)/(r - 1) \mid$.

3.3.3 Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ se pide:

1. Poner un ejemplo de una función $f : A \to B$ que sea suprayectiva. ¿Es inyectiva?
2. No puede haber funciones inyectivas de A en B. ¿Por qué?
3. Sustituir B por otro conjunto de números de tal forma que haya funciones inyectivas $f : A \to B$ pero no hay funciones suprayectivas.
4. Sea ahora $B = \{1, 2, 3\}$. Escribir **todas** las funciones suprayectivas de A en B. ¿Son inyectivas?

3.3.4 Entre dos conjuntos finitos hay funciones biyectivas si y sólo si tienen el mismo número de elementos. En este caso, toda función inyectiva es biyectiva y lo mismo toda función suprayectiva es biyectiva. Esto no es así para conjuntos infinitos: probar que $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ dada por $f(r) = r^2$ es inyectiva pero no suprayectiva. Así hay una biyección entre un conjunto infinito y una parte propia de sí mismo.

Ejercicio 3.4 Sea $f : A \to B$ una función.

3.4.1 Si $A' \subset A$ se llama **imagen** de A' por f, y se denota por $f(A')$ al subconjunto de B dado por

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}.$$

La imagen de todo el conjunto A tiene un nombre especial, la imagen de f, y una notación especial, $\mathrm{im}(f)$. La función f es suprayectiva si y sólo si $\mathrm{im}(f) = B$. Si $B' \subset B$ se llama **imagen inversa** de B' por f, y se denota por $f^{-1}(B')$ al subconjunto de A dado por

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}.$$

La función f es inyectiva si y sólo si, para cada $b \in B$, $f^{-1}(B)$ es el conjunto vacío o un conjunto con un elemento.

3.4.2 Hallar las imágenes de las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = -n$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_0$ dada por $f(n) = n^2$.
3. $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = 1/(1-r)$.
4. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = 1/(1+r^2)$.
5. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(r) = 3r - 1$.

3.4.3 Responder a las cuestiones siguientes:

1. Si $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_0$ está dada por $f(n) = n^2$, hallar $f^{-1}(1/4)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3/4)$ y $f^{-1}(9/16)$.
2. Si $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ está dada por $f(r) = 1/(1+r^2)$, hallar $f^{-1}(-1/10)$, $f^{-1}(1/10)$ y $f^{-1}(1/4)$.
3. Si $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}_0$ está dada por $f(r) = (r+1)/(r-1)$, hallar $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(1/2)$.

Ejercicio 3.5

3.5.1 Dadas dos funciones, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ se llama **producto o composición** de ambas a la función $gf : A \to C$ dada por $gf(a) = g(f(a))$. Nótese que el producto de dos funciones se escribe de la manera contraria al producto de números o matrices: el primer factor es el de la derecha.

3.5.2 Hallar la composición de las funciones siguientes:

1. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dadas por
$$f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2}, \qquad g(x) = 4x^3 - 7x + 1$$
hallar gf y fg.
2. $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dadas por
$$f(x,y) = (x-y)^2 + 2x, \qquad g(x) = \left(x^3 - 1, \frac{x+1}{x^2+3}\right)$$
hallar gf y fg.
3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x,y) = x^2 - 4y, \qquad g(x) = \sin(x).$$
hallar gf.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = (x^3, -3x, 2), \qquad g(y,z,t) = y + z + t, \qquad h(u) = \cos(u)$$
hallar $h(gf)$, $f(hg)$ y $g(fh)$.

3.5.3 Descomponer en producto de dos factores las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = (2x+1)^3$.
2. $f(x) = x^2 + x^3$.
3. $f(x) = \sin(3x)$.

4. $f(x) = 2^{2x+1}$.
5. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Sección 4 Relaciones de equivalencia

Nota 4.1 Dado un conjunto A, una **relación** es un subconjunto $R \subset A \times A$. Como en el caso de las funciones, en las relaciones se cambia la notación: si $(a_1, a_2) \in R$, se escribe $a_1 R a_2$. Una relación se llama de **equivalencia** si verifica las tres propiedades siguientes:

1. Propiedad reflexiva: para todo $a \in A$ es aRa.
2. Propiedad simétrica: $a_1 R a_2 \Rightarrow a_2 R a_1$.
3. Propiedad transitiva: $a_1 R a_2$ y $a_2 R a_3$ implican que $a_1 R a_3$.

Ejercicio 4.2 Averiguar si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que no lo sean, enumerar las propiedades que fallan.

1. A es el conjunto de los habitantes de la ciudad y aRb si y sólo si a vive en la misma casa que b.
2. A es el conjunto de los habitantes de la ciudad y aRb si y sólo si a es el padre o la madre de b.
3. A es el conjunto de los habitantes de la ciudad y aRb si y sólo si a y b son la misma persona, o si a es el padre o la madre de b.
4. A es el conjunto de los habitantes de la ciudad y aRb si y sólo si a tiene la misma o mayor edad que b.
5. A es el conjunto de los habitantes de la ciudad y aRb si y sólo si a es socio del mismo club de fútbol de primera división que b.

Ejercicio 4.3 Averiguar si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que no lo sean, enumerar las propiedades que fallan.

1. La relación definida en $\mathbb{Z}$ por $aRb \Leftrightarrow a \leq b$.
2. La relación definida en $\mathbb{Z}$ por $aRb \Leftrightarrow a - b$ es mútiplo de 2.
3. La relación definida en $\mathbb{Z}$ por $aRb \Leftrightarrow a - b$ es mútiplo de -2. ¿Coincide esta relación con la anterior?.
4. La relación definida en $\mathbb{Z}$ por $aRb \Leftrightarrow a - b$ es mútiplo de 7.
5. Fijado un entero $n \in \mathbb{Z}_+$, la relación definida en $\mathbb{Z}$ por $aRb \Leftrightarrow a - b$ es mútiplo de n.
6. La relación definida en $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ por $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$.
7. La relación definida en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ por $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow ab' = ba'$.

Ejercicio 4.4 Averiguar si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que no lo sean, enumerar las propiedades que fallan.

1. A es el conjunto de todos los triángulos del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ se puede superponer con b por un movimiento.
2. A es el conjunto de todos los triángulos del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo perímetro.
3. A es el conjunto de todos los triángulos del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo número de lados iguales.
4. A es el conjunto de todos los triángulos del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b tienen un vértice común.
5. A es el conjunto de todas las circunferencias del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b encierran círculos de la misma área.
6. A es el conjunto de todas las circunferencias del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b tienen la misma longitud. ¿Coincide esta relación con la anterior?

7. A es el conjunto de todas las circunferencias del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b son tangentes.

8. A es el conjunto de todas las circunferencias del plano, $aRb \Leftrightarrow a$ y b son secantes.

Nota 4.5 Dado un conjunto a y una relación de equivalencia R sobre A, para cada $a \in A$ se llama **clase de equivalencia** de a, y se designa por aR al conjunto

$$aR = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Al conjunto de las clases de equivalencia se le llama el **conjunto cociente** de A por R, y se le denota por A/R.

Ejercicio 4.6

4.6.1 Hallar las clases de equivalencia de todas las relaciones de los ejercicios 4.2, 4.3 y 4.4 que sean de equivalencia.

4.6.2 Probar que la unión de todas las clases de equivalencia de A por la relación R es el propio conjunto A.

4.6.3 Probar que dos clases de equivalencia de A por la relación R tienen intersección vacía o son iguales.

Sección 1 Matrices

Ejercicio 1.1 Obtener las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2 Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que la matriz A es **antisimétrica** (es decir $A^t = -A$).

2. Probar que la matriz $M = A^2 + I_3$ es **simétrica** (es decir $M^t = M$), siendo I_3 la matriz unidad de orden tres.

3. Demostrar que la matriz M es **idempotente** (es decir $M^2 = M$).

Ejercicio 1.3 Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz A en cada uno de los casos siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.4 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Demostrar que:

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

2. $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

3. $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k \cdot B^{n-k}$.

Ejercicio 1.5 Sea E_{ij} la matriz $n \times n$ que tiene un 1 en el lugar (i, j) y 0 en el resto. Calcular los productos $E_{i,j} \cdot E_{kl}$ para cualesquiera valores de $i,\ j,\ k,\ l$ comprendidos entre 1 y n.

Ejercicio 1.6 Demostrar que toda matriz $A \in \mathcal{M}(2 \times 2, K)$ verifica la ecuación:

$$A^2 - (a+d) \cdot A + (a \cdot d - c \cdot b) \cdot I_2 = 0,$$

donde I_2 es la matriz unidad de orden dos y

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.7 Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, entonces se define la **traza** de A, que notaremos Tr (A), así:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Probar que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces:

1. Tr $(A - B) =$ Tr $(A) -$ Tr(B).
2. Tr $(A \cdot B) =$ Tr $(B \cdot A)$.
3. $A \cdot B - B \cdot A \neq I_n$, siendo I_n la matriz unidad de orden n.

Ejercicio 1.8 Se pide:

1. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden dos, entonces la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz $A \cdot B - B \cdot A$ es 0.
2. Probar que si C es una matriz cuadrada de orden dos tal que la suma de los elementos de la diagonal principal es 0, entonces existe un escalar α tal que $C^2 = \alpha \cdot I_2$, siendo I_2 la matriz unidad de orden dos.
3. Deducir de (1) y (2) que si A, B, D son matrices cuadradas de orden dos, entonces se verifica:

$$(A \cdot B - B \cdot A)^2 \cdot D = D \cdot (A \cdot B - B \cdot A)^2$$

Ejercicio 1.9 Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ una matriz fija. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $A \cdot X = X \cdot A$ para toda matriz X de $\mathcal{M}(n \times n, K)$.
2. Existe un escalar β tal que $A = \beta \cdot I$.

Ejercicio 1.10 Una matriz cuadrada se llama diagonal si todos sus elementos situados fuera de la diagonal principal son iguales a 0. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. A es una matriz diagonal.
2. A es una matriz cuadrada que conmuta con todas las matrices diagonales de su mismo orden.

Ejercicio 1.11 Responder a las cuestiones siguientes:

1. Hallar todas las matrices 2×2 cuyo cuadrado sea la matriz cero.
2. Hallar todas las matrices 2×2 cuyo cubo sea la matriz cero.
3. Hallar todas las matrices 2×2 cuyo cuadrado sea la matriz unidad.

Sección 2 Determinantes y sistemas

Ejercicio 2.1 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Soluciones: 1, 1, 1, 1, 2, 3, −2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, −2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, −2

Ejercicio 2.2 En cada una de las series de determinantes que siguen (A, B ó C), se pueden calcular todos conocido el primero. Por ejemplo, se pueden calcular $A42$, $A43$, $A44$, $A45$, $A46$, $A47$ y $A48$ a partir de $A41$ por las propiedades de las aplicaciones multilineales alternadas. Calcular los tres primeros determinantes. En cada caso, calcular los siguientes haciendo uso de esas propiedades y explicando cuáles se han usado.

$$A41 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad A42 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$A43 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & 4 \end{vmatrix}, \quad A44 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A45 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A46 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$A47 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad A48 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B41 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B42 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B43 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B44 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B45 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B46 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$B47 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B48 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$C41 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C42 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & -4 & -2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C43 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C44 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C45 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C46 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C47 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 8 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C48 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 2.3 Consideremos la sucesión de Fibonacci, definida por las siguientes relaciones:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \text{ y } a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (\forall n \geq 1)$$

Demostrar que el n-ésimo término a_n de la sucesión de Fibonacci es igual al determinante de la matriz $n \times n$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.4 Establecer las siguientes identidades:

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & -x+y-z & 2y \\ 2z & 2z & -x-y+z \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+1)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xy & y^2 \\ xy & x^2 & y^2 & xy \\ xy & y^2 & x^2 & xy \\ y^2 & xy & xy & x^2 \end{vmatrix} = (x^2-y^2)^4$$

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} = x^{n-1} \cdot (x + \sum_{i=1}^{n} a_i)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \cdot [1 + \frac{a_1}{(x_1-a_1)} + \cdots + \frac{a_n}{(x_n-a_n)}]$$

(En este último determinante, suponemos que $x_i \neq a_i$ $(i = 1, \cdots, n)$).

Ejercicio 2.5 Sean $A_n = (a_{ij})$ y $B_n = (b_{ij})$ matrices cuadradas de orden n, definidas como sigue:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{b} & \text{si} \quad \text{i} < \text{j} \\ \text{a} & \text{si} \quad \text{i} = \text{j} \\ \text{-b} & \text{si} \quad \text{i} > \text{j} \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} \text{b} & \text{si} \quad \text{i} \leq \text{j} \\ \text{a} & \text{si} \quad \text{i} = \text{j+1} \\ \text{-b} & \text{si} \quad \text{i} > \text{j+1} \end{cases}$$

Se pide:

1. Probar que det $B_{n-1} = (-1)^n b(a-b)^{n-2}$.
2. Probar que det $A_n = (a+b)\det A_{n-1} - b(a-b)^{n-1}$.
3. Probar por inducción que det $A_n = \frac{1}{2}[(a+b)^n + (a-b)^n]$.

Ejercicio 2.6 Calcular la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 2.7 Averiguar si los sistemas siguientes son de Cramer y, en caso positivo, resolverlos.

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 11 \end{array} \right. , \quad
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 & = & -2 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 11 \end{array} \right. , \quad
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 10 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = & -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = & -4 \end{array} \right. , \quad
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = & -8 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = & -5 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = & -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 & = & -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 & = & 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & 5 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 6 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 & = & 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 & = & 0 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 & = & 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 & = & 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 16 \end{array} \right. \quad
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 & = & 0 \end{array} \right.
$$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 2 \end{array} \right.
$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+4x_2+6x_3+4x_4+x_5 & = & 0 \\ x_1+x_2+4x_3+6x_4+4x_5 & = & 0 \\ 4x_1+x_2+x_3+4x_4+6x_5 & = & 0 \\ 6x_1+4x_2+x_3+x_4+4x_5 & = & 0 \\ 4x_1+6x_2+4x_3+x_4+x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 0 \\ x_1+x_2+3x_3+x_5+x_5 & = & 3 \\ x_1+x_2+x_3+4x_3+x_5 & = & -2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 & = & 13 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5 & = & 10 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5 & = & 11 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5 & = & 6 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.8 Se dan unos sistemas de ecuaciones que dependen de parámetros. Averiguar para qué valores de los parámetros los sistemas **no** son de Cramer. Resolverlos para los menores valores enteros positivos de los parámetros para los que **son** de Cramer

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2 b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3a+3 & a & a+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & 2a+1 & a+1 \\ 2a-1 & 2a-1 & a-2 \\ 4a-1 & 3a & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2b-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & 3a-7 & a-5 \\ 2a-1 & 4a-1 & 2a \\ 4a & 5a-7 & 2a-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+1 & 2a & 4a+1 \\ 4a-1 & a-1 & 4a-1 \\ 6a+2 & 2a & 5a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 \\ -1 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & -a & -a-1 \\ 3a & -2a+1 & -3a+1 \\ a+2 & -1 & -2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 \\ 2a+2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 2a-1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a-3 \\ a & 3a-2 & 3a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.9 Hallar la matriz incógnita X en las siguientes ecuaciones:

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.10 Hallar las matrices incógnitas X, Y en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} Y &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} Y &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.11 Responder a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué figura del plano forman los pares (x, y) para los que la matriz
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
no es invertible?

2. Hallar los puntos del plano para los que ninguna de las dos matrices
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
es invertible.

3. ¿Qué figura del plano forman los pares (x, y) para los que la matriz
$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 18 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
no es invertible?

4. Hallar los puntos del plano para los que ninguna de las dos matrices

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 13 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible.

Ejercicio 2.12 La resolución de un sistema de ecuaciones lineales por la regla de Cramer se suele usar para ajustar curvas. En este ejercicio damos unos ejemplos de ello:

1. Hallar a, b, c de tal manera que la curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(3, 0)$, $(2, 3)$, $(-1, 1)$.
2. Hallar a, b, c de tal manera que la curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(4, 1)$, $(3, -1)$, $(-1, 2)$.
3. Hallar a, b, c, d de tal manera que la curva de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por los puntos $(5, -2)$, $(3, -5)$, $(-1, 0)$, $(2, -2)$.
4. Hallar a, b, c, d de tal manera que la curva de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por los puntos $(5, -3)$, $(3, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

Sección 3 Formas reducidas

Ejercicio 3.1 Responder a las cuestiones siguientes:

1. Escribir las siguientes matrices elementales de tipo 1 y de dimensiones 4×4: $P_{31}(-2)$, $P_{14}(-1)$, $P_{2,3}(-5)$.
2. En general, ¿cuándo el producto de dos matrices elementales de tipo 1 es una matriz de tipo 1?

Ejercicio 3.2 Hallar formas escalonadas por filas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 3 & 6 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 5 & 13 \\ -13 & -4 & -8 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ -4 & -8 & 3 \\ -9 & -18 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -9 & -14 \\ -2 & 9 & 13 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ -8 & -16 & 0 \\ -11 & -22 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.3 Dadas las matrices del ejercicio 3.2, hallar formas escalonadas por columnas de ellas.

Ejercicio 3.4 Dadas las matrices del ejercicio 3.2, hallar formas escalonadas por columnas de las formas escalonadas por filas de ellas.

Ejercicio 3.5 Dadas las matrices del ejercicio 3.2, hallar formas escalonadas por filas de las formas escalonadas por columnas de ellas.

Ejercicio 3.6 Halllar formas escalonadas por filas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -10 & -1 & 6 \\ 6 & -12 & -1 & 8 \\ 9 & -18 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 3 & -6 \\ -4 & 8 & -3 & -2 \\ -6 & 12 & 1 & -8 \\ 7 & -14 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -20 & 6 \\ 0 & 0 & -16 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & -2 \\ 3 & -6 & 22 & -8 \\ -2 & 4 & -19 & 8 \\ -5 & 10 & -34 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -5 & -25 & -19 \\ 12 & -6 & -34 & -26 \\ -5 & 3 & 17 & 13 \\ 14 & -7 & -38 & -29 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.7 Dadas las matrices del ejercicio 3.6, hallar formas escalonadas por columnas de ellas.

Ejercicio 3.8 Dadas las matrices del ejercicio 3.6, hallar formas escalonadas por columnas de las formas escalonadas por filas de ellas.

Ejercicio 3.9 Dadas las matrices del ejercicio 3.6, hallar formas escalonadas por filas de las formas escalonadas por columnas de ellas.

Ejercicio 3.10 Una matriz de determinante 1 es producto de matrices elementales de tipo 1. Comprobar que las siguientes matrices tienen determinante igual a 1 y descomponerlas en producto de matrices elementales de tipo 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.11 Resolver los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.12 Hallar las reducidas por filas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.13 Resolver, si se puede, los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son las del ejercicio 3.12.

Ejercicio 3.14 Estudiar la compatibilidad de los sistemas del ejercicio 2.8, según los valores de los parámetros.

Ejercicio 3.15 Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos. Si son verdaderos dar una razón **breve** y si son falsos, dar un contraejemplo.

1. Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.

2. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.

3. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.

4. Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.

5. El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.

6. No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Ejercicio 3.16 Responder a las siguientes cuestiones si se puede. Tanto si se puede como si no, dar una razón del por qué.

1. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con dos ecuaciones y tres incógnitas.

2. Dar un ejemplo de un sistema compatible determinado con tres ecuaciones y dos incógnitas.

3. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con tres ecuaciones y dos incógnitas.

4. Dar un ejemplo de un sistema compatible indeterminado con tres ecuaciones y tres incógnitas
5. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = \frac{-7}{3} + t, \quad x_2 = u, \quad x_3 = 3t - 2u$$

6. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -9 + t, \quad x_2 = -10 + 2t, \quad x_3 = -t.$$

7. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = \frac{-13}{5} + t + u, \quad x_2 = \frac{12}{5} + t, \quad x_3 = u, \quad x_4 = 5t + 2u$$

Ejercicio 3.17 Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos. Si son verdaderos dar una razón **breve** y si son falsos, dar un contraejemplo.

1. Un sistema compatible determinado con coeficientes enteros tiene su solución entera. ecuaciones.
2. Una matriz de enteros tiene siempre una forma escalonada por filas con pivotes enteros.
3. La forma reducida por filas de una matriz de enteros tiene pivotes enteros.
4. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(m, n)$ se llama *matriz de relaciones de las filas de* A (resp. *de las columnas*) a una matriz de soluciones linealmente independientes del sistema $A(x_1, \ldots, x_n)^t = 0$ (resp. $(x_1, \ldots, x_m)A = 0$). Hallar la matriz de relaciones del vector $(1, -1, 3, 2)$.
5. Si A es una matriz de elementos enteros, existe siempre una matriz B de relaciones de sus filas (resp. columnas) cuyos elementos son enteros.

Ejercicio 3.18 Hallar los rangos de las matrices siguientes, en función de los correspondientes parámetros:

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & -a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -a & -1 & b \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -4 & -a & -2 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a-b & 2 & 2+2a-3b \\ -a-b & 2a-2b & 3 & 4+2a-3b \\ -a-b & a-b & 1 & 2+2a-3b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & 2 \\ 2a & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b & 4 & a-b \\ a & 2b & 5 & a-b \\ a & b & 3 & a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a & 2b & -c \\ a & 2b & -c \\ -a & -b & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.19 Se pide:

1. Hallar los valores de α para los cuales las matrices

$$a) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & \alpha \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   tiene rango mínimo. Hallar el rango de dicha matriz para los distintos valores de α.

2. Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de α

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Sección 4 Espacios vectoriales

Ejercicio 4.1 Demostrar que el conjunto

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$$

posee estructura de $\mathbb{Q}$–espacio vectorial respecto de las operaciones inducidas en dicho conjunto por la suma y el producto de números reales. Hallar una base y la dimensión de dicho $\mathbb{Q}$–espacio vectorial.

Ejercicio 4.2 Dado el conjunto $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, probar que:

1. Se puede dotar a V de estructura de $\mathbb{C}$–espacio vectorial, respecto de las operaciones usuales.
2. Se puede dotar a V de estructura de $\mathbb{R}$–espacio vectorial, respecto de las operaciones usuales.
3. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ constituye una base del $\mathbb{C}$–espacio vectorial V.
4. El conjunto $\{(1,1),(1,i),(i,1),(i,-i)\}$ constituye una base del $\mathbb{R}$–espacio vectorial V.

Ejercicio 4.3 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión finita. Probar que son equivalentes las condiciones siguientes:

1. V posee una única base.
2. $V = \{\mathbf{0}\}$ o bien ($\dim V = 1$ y K posee exactamente dos elementos).

Ejercicio 4.4 Se considera el conjunto $V = \mathbb{R}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes reales. Comprobar que V es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial con la suma de polinomios y el producto de polinomios por números reales. Si $n > 0$ es un número natural y notamos $V(n)$ al conjunto de los polinomios de V de grado no superior a n, probar que $V(n)$ es un subespacio vectorial de V de dimensión finita. ¿Es V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión finita?.

Ejercicio 4.5 Con las notaciones del ejercicio 4.4 averiguar si los conjuntos siguientes son bases de $V(3)$:

$$\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$$

$$\{1-x+x^2-x^3, 1+x+x^2+x^3, 2+3x+4x^2+5x^3, -2-x-x^2-x^3\}$$

Ejercicio 4.6 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión finita y sean A, B dos conjuntos de vectores linealmente independientes de V. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $A \cup B$ es un conjunto linealmente independiente.
2. $L(A \cap B) = L(A) \cap L(B)$.

Ejercicio 4.7 En el K–espacio vectorial K^2 ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(0,1),(0,2)\}$.
2. $\{(1,1),(2,2),(-1,1)\}$.
3. $\{(1,1),(0,2),(3,1)\}$.

Ejercicio 4.8 ¿Existe algún valor de α para el cual sean linealmente dependientes los vectores de $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a} = (\alpha,-1,0,1), \mathbf{b} = (0,\alpha,-1,1)$ y $\mathbf{c} = (1,0,-1,2)$?

Ejercicio 4.9 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V. Consideremos los vectores de V cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son:

1. $\mathbf{a}_1 = (2,3,5),\ \mathbf{a}_2 = (3,7,8),\ \mathbf{a}_3 = (1,-6,1),\ \mathbf{b} = (7,-2,m)$
2. $\mathbf{a}_1 = (4,4,3),\ \mathbf{a}_2 = (7,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (4,1,6),\ \mathbf{b} = (5,9,m)$
3. $\mathbf{a}_1 = (3,4,2),\ \mathbf{a}_2 = (6,8,7),\ \mathbf{b} = (9,12,m)$
4. $\mathbf{a}_1 = (3,2,5),\ \mathbf{a}_2 = (2,4,7),\ \mathbf{a}_3 = (5,6,m),\ \mathbf{b} = (1,3,5)$

5. $\mathbf{a}_1 = (3,2,6),\ \mathbf{a}_2 = (7,3,9),\ \mathbf{a}_3 = (5,1,3),\ \mathbf{b} = (m,2,5)$

En cada caso, hallar m para que el vector $\mathbf{b}$ sea combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_i$.

Ejercicio 4.10 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes conjuntos de vectores: $A = \{(1,5,1),(2,1,0)\}$, $C = \{(1,5,1),(2,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$. Se pide:

1. Probar que A es un conjunto linealmente independiente y que C es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.
2. Encontrar una base $\mathcal{B}$ que contenga al conjunto A y esté contenida en el conjunto C.

Ejercicio 4.11 Sean V un K–espacio vectorial y $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Sea $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$, con $\alpha_i \in K(i = 1,\cdots,n)$. Probar que son equivalentes:

1. El conjunto $\{\mathbf{u_1} - \mathbf{a},\cdots,\mathbf{u_n} - \mathbf{a}\}$ es linealmente independiente.
2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 1$.

Ejercicio 4.12 Si K es un cuerpo y K' es un subcuerpo de K, comprobar que K puede ser considerado de forma natural como K'–espacio vectorial. En el caso $K' = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$, hallar una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial.

Ejercicio 4.13 Sea $\mathcal{M}(m,n)$ el conjunto de las matrices de orden $m\times n$ con elementos del cuerpo K. Probar que:

1. $\mathcal{M}(m,n)$ con la suma de matrices y producto por elementos de K es un K–espacio vectorial.
2. El conjunto de todas las matrices con un 1 en una posición y 0 en las restantes es una base de $\mathcal{M}(m,n)$.
3. $\dim(\mathcal{M}(m,n)) = mn$.

Ejercicio 4.14 Sea $V = \mathcal{M}(n,n)$. Sea W el subconjunto de V formado por las matrices simétricas. Se pide:

1. Demostrar que W es un subespacio vectorial de V.
2. Obtener una base y la dimensión de W.
3. Idem. para el subconjunto $U \subset \mathcal{M}(n,n)$ de las matrices antisimétricas.

Ejercicio 4.15 Estudiar si son subespacios vectoriales los siguientes subconjuntos de los espacios $\mathbb{R}^n$ indicados:

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y - 3\} \subset \mathbb{R}^2$.
3. $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : z = x - t\} \subset \mathbb{R}^4$.
4. $A = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 : x = t, z = y + u\} \subset \mathbb{R}^5$.
5. $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4.16 Consideremos el K–espacio vectorial K^n, y los subconjuntos

$$A = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

$$B = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

¿Es A un subespacio vectorial de K^n? ¿Y B?

Ejercicio 4.17 Justificar razonadamente la veracidad o falsedad de los siguientes asertos:

1. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{a}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{\mathbf{a}+\mathbf{u}_1,\mathbf{a}+\mathbf{u}_2,\mathbf{a}+\mathbf{u}_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

3. Si $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$, entonces $r < n$.

4. El subespacio vectorial $\{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3.

5. La variedad lineal de $\mathbb{R}^3$ generada por el conjunto $\{(1, 2, 1), (2, 2, 1)\}$ es

$$\{(2x, 2x + 2y, x + y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

6. Si F, G son variedades lineales de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$F \subset G \Longleftrightarrow \dim(F) \leq \dim(G).$$

7. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces no pueden existir cuatro vectores linealmente independientes en la variedad lineal $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Ejercicio 4.18 Hallar α y α' para que los vectores $\mathbf{a} = (-1, 5, 4)$ y $\mathbf{b} = (\alpha, -2, -2)$ generen el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que los vectores $\mathbf{c} = (\alpha', 3, 2)$ y $\mathbf{d} = (5, 1, 0)$.

Ejercicio 4.19 Determinar α para que los vectores

$$\mathbf{a} = (\alpha, 8, 4), \ \mathbf{b} = (-1, 2, 0), \ \mathbf{c} = (0, 1, 2)$$

satisfagan la condición: $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = L(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Ejercicio 4.20 Hallar α y α' para que el vector $\mathbf{a} = (1, 4, \alpha, \alpha')$ pertenezca al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 2)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 1)$.

Ejercicio 4.21 En $\mathbb{Q}^3$ consideremos los siguientes subconjuntos:

$$A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}, \quad B = \{(2, 3, 2), (1, 0, 1)\}.$$

Comprobar que $L(A) = L(B)$.

Ejercicio 4.22 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores

$$\mathbf{a} = (3, 2, \alpha, 5), \ \mathbf{b} = (2, -3, 5, \alpha), \ \mathbf{c} = (0, 13, \alpha', 7)$$

Hallar α y α' para que la dimensión de la variedad lineal generada por dichos vectores sea 2.

Ejercicio 4.23 Se pide:

1. Determinar el subconjunto F de $\mathbb{R}^3$ caracterizado por la siguiente condición:

$$(x, y, z) \in F \Longleftrightarrow \text{la matriz} \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \text{conmuta con} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Demostrar que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, hallar una base de F y completarla hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.24 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 3 y consideremos los vectores de V : $\mathbf{a} = (\alpha, 1, -2), \mathbf{b} = (1, \alpha, 2), \mathbf{c} = (2\alpha, 1, 0)$. Se pide:

1. ¿Para qué valores de α constituyen una base de V?

2. ¿Existe algún valor de α para el cual $\dim L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$?.

3. Estudiar, en función de α, los distintos valores que puede tener $\dim L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ejercicio 4.25 Se pide:

1. Determinar el subconjunto F de $\mathbb{R}^3$ caracterizado por la siguiente condición:

$$(x, y, z) \in F \Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} x - y - z & 2x & 2x \\ 2y & -x + y - z & 2y \\ 2z & 2z & -x - y + z \end{pmatrix} = 0$$

2. ¿Es F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?. En caso afirmativo, hallar un sistema de generadores de F.

Ejercicio 4.26 Sea V un K–espacio vectorial y F, G dos variedades lineales de V, distintas de V. Probar que el conjunto $F \cup G$ es distinto de V.

Ejercicio 4.27 Sea V un K–espacio vectorial y F, G dos variedades lineales de V. Probar que son equivalentes las condiciones siguientes:

1. $F \cup G$ es una variedad lineal de V.

2. $F \subset G$ o bien $G \subset F$.

¿Puede ser V igual a la unión de dos variedades lineales distintas de V?.

Ejercicio 4.28 Poner ejemplos que prueben que si H y G son subconjuntos del K–espacio vectorial V de dimensión finita, entonces:

1. $L(H \cup G) \neq L(H) \cup L(G)$

2. $L(H) \cap L(G) \neq L(H \cap G)$.

Ejercicio 4.29 Sean V un K–espacio vectorial y X un conjunto no vacío. Consideremos el K–espacio vectorial $\mathcal{F}(X, V)$ de las aplicaciones de X en V. Sea Y un subconjunto de X y H el subconjunto de $\mathcal{F}(X, V)$ cuyos elementos son las aplicaciones de X en V que se anulan en todos los elementos de Y. Demostrar que H es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X, V)$.

Ejercicio 4.30 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base de V. Se consideran las variedades lineales L_1, L_2, L_3, L_4 de V engendradas por los vectores que se indican:

$$\begin{array}{lcl} L_1 & = & L(\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 6\mathbf{v} + 7\mathbf{w}) \\ L_2 & = & L(4\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w}, 6\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}) \\ L_3 & = & L(2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 5\mathbf{w}, \mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) \\ L_4 & = & L(5\mathbf{u} + 4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}, 8\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w}) \end{array}$$

Hallar la dimensión de cada una de ellas y una base contenida en el sistema de generadores dado.

Ejercicio 4.31 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base de V. Se consideran las variedades lineales de V engendradas por los vectores que se indican:

$$L_1 = L(4\mathbf{t} - 5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w}, 2\mathbf{t} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 6\mathbf{t} - 3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}, 4\mathbf{t} - \mathbf{u} + 5\mathbf{v} + 6\mathbf{w})$$

$$L_2 = L(\mathbf{t} + 2\mathbf{u} - 6\mathbf{v} - 3\mathbf{w}, -\mathbf{t} - 4\mathbf{v} - 5\mathbf{w}, 3\mathbf{t} + 4\mathbf{u} - 8\mathbf{v} - \mathbf{w}, 2\mathbf{t} + \mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 6\mathbf{w})$$

Se pide:

1. Hallar la dimensión de cada una de ellas y una base contenida en el sistema de generadores dado.

2. Expresar los restantes vectores que generan la variedad, como combinación lineal de los vectores de la base obtenida.

Ejercicio 4.32 Sea V un K–espacio vectorial. Probar que si la dimensión de la suma de dos variedades de V es una unidad mayor que la dimensión de su intersección entonces la suma coincide con una de ellas y la intersección con la otra.

Ejercicio 4.33 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 5 y $\mathcal{B}$ una base de V. En cada uno de los casos siguientes, hallar un sistema de ecuaciones paramétricas y un sistema de ecuaciones implícitas independientes, de las variedades lineales que se indican:

1. $L_1 = L((1, 0, 1, -1, 1), (1, 1, 1, 0, 0))$.

2. $L_2 = L((0, 1, 2, 1, 0), (1, 1, -1, -2, 1), (3, -1, -7, -8, 3))$.

Ejercicio 4.34 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. En cada uno de los casos siguientes, se consideran las variedades lineales L_1 y L_2 engendradas por los vectores cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ se dan:

$$\begin{cases} L_1 &= L((1,2,0,1),(1,1,1,0)) \\ L_2 &= L((1,0,1,0),(1,3,0,0)) \end{cases}$$
$$\begin{cases} L_1 &= L((1,2,1,-2),(2,3,1,0),(1,2,2,-3)) \\ L_2 &= L((1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,3,0,-4)) \end{cases}$$
$$\begin{cases} L_1 &= L((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)) \\ L_2 &= L((1,0,1,0),(0,2,1,1),(1,2,1,2)) \end{cases}$$

Hallar la dimensión y una base de $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.

Ejercicio 4.35 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea L la variedad lineal de V expresada, respecto de la base $\mathcal{B}$, como sigue:

$$L = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. Hallar la dimensión y una base $\mathcal{C}$ de la variedad L.
2. Completar $\mathcal{C}$ a una base de V.
3. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de una variedad L' complementaria de L.

Ejercicio 4.36 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. Sean L_1 y L_2 las variedades lineales de V expresadas, respecto de la base $\mathcal{B}$, como sigue:

$$L_1 = L((1,-1,2,1),(0,1,-1,3),(2,0,1,-1))$$
$$L_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. Calcular la dimensión y una base de L_1, L_2, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.
2. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de L_1, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.

Ejercicio 4.37 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideramos los subconjuntos siguientes:

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$$
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x + z = 0\}$$

Probar que:

1. G y H son variedades lineales de $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

Ejercicio 4.38 Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y consideremos los subconjuntos de V:

$$G = \{f \in V : f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$
$$H = \{f \in V : f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Probar que:

1. G y H son variedades lineales de V.
2. $G \cap H = \{f_0\}$, siendo $f_0 \in V$ la aplicación definida por: $f_0(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.
3. $V = G \oplus H$.

Ejercicio 4.39 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, \mathbf{u'}_3, \mathbf{u'}_4\}$ dos bases de V relacionadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{u'}_1 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u'}_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u'}_3 & = & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u'}_4 & = & -\mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \end{array}\right.$$

1. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ se dan:

   $$\mathbf{a}_{\mathcal{B}} = (1, 2, 0, 1),\ \mathbf{b}_{\mathcal{B}} = (3, -1, 2, 1),\ \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (0, 1, -2, 3),\ \mathbf{d}_{\mathcal{B}} = (1, 2, 1, 2).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$.

2. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$ se dan:

   $$\mathbf{a'}_{\mathcal{B}'} = (0, 1, 1, -1);\ \mathbf{b'}_{\mathcal{B}'} = (2, 1, 0, 1);\ \mathbf{c'}_{\mathcal{B}'} = (-1, 2, 0, 6)$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 4.40 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, \mathbf{u'}_3\}$ dos bases de V relacionadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{u'}_1 & = & \mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_2 & - & 3\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u'}_2 & = & & & \mathbf{u}_2 & + & 2\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u'}_3 & = & & & & & \mathbf{u}_3 \end{array}\right.$$

Sea L la variedad lineal de V dada por:

1. Sus generadores: $2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_2} + \mathbf{2u_3}$.
2. Sus ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Sus generadores: $3\mathbf{u'}_1 - \mathbf{u'}_2$, $\mathbf{u'}_1 + \mathbf{u'}_2 - \mathbf{u'}_3$.
4. Sus ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}'$: $3x' - y' + 2z' = 0$

Hallar, en cada caso, un sistema de ecuaciones implícitas de L respecto de la otra base.

Ejercicio 4.41 Sea V un k-espacio vectorial de dimensión p, L un subespacio vectorial de V de dimensión q y $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vectores de V. Demostrar que son equivalentes:

1. $\{\mathbf{v}_1 + L, \dots, \mathbf{v}_n + L\}$ es un conjunto linealmente independiente de V/L.
2. Existe una base $\mathcal{B}$ de L y unos vectores $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{p-q} \in V$ tales que el conjunto:

   $$\mathcal{B} \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v_{p-q}}\}$$

   es una base de V.

Ejercicio 4.42 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y L_1, L_2 las variedades lineales de V definidas por:

$$L_1 \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & & & & & x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \left\{ x_1 - x_4 = 0 \right.$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ los vectores cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son $(0, 0, 0, 0, 1)$ y $(2, -1, -1, 2, -1)$, respectivamente.

1. Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ¿son linealmente independientes módulo L_1?.
2. Calcular una base de L_2/L_1 que contenga a $\mathbf{x} + L_1$.

3. Calcular las coordenadas de $(1,1,1,1,1)+L_1$ respecto de la base anteriormente considerada.

Ejercicio 4.43 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión n y L una variedad lineal de V de dimensión $r<n$. Probar que existen $n-r$ variedades lineales $H_1,\cdots,H_{n-r}$ de V tales que:

1. $\dim H_i = n-1$ $(i=1,\cdots,n-r)$.

2. $L = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-r}$.

Sección 5 Aplicaciones lineales

Ejercicio 5.1 Dadas las aplicaciones siguientes:

1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y)=(x-y,x+y,-x+y)$.

2. $f:\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x+y,y,z^3)$.

3. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(3x-5y,4y-x)$.

4. $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x)=2x+4$.

5. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(z,x+y+z,2y)$.

6. $f:\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x,y,z)=(3x+z,x+3z)$.

7. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x)=(x+y,1)$.

8. $f:\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x,y,z)=(y,0,2y-z)$.

9. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x+y+z,x+y,x+y+z)$.

10. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $f(x,y)=3x-2iy$ (considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).

Se pide:

1. Estudiar si dichas aplicaciones son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.

2. Determinar cuáles son lineales.

3. En las aplicaciones lineales obtenidas, hallar el núcleo y la imagen, así como la matriz asociada respecto de las bases canónicas correspondientes. Comprobar en cada caso que

$$\dim(\text{espacio de partida}) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Img}(f)).$$

Ejercicio 5.2 Se consideran los $\mathbb{Q}$–espacios vectoriales $\mathbb{Q}^2$ y $\mathbb{Q}^3$ y el homomorfismo $f:\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ de matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas de $\mathbb{Q}^3$ y $\mathbb{Q}^2$, respectivamente. Se pide:

1. Hallar la imagen por f de un vector arbitrario (x,y) de $\mathbb{Q}^2$ por f.

2. Hallar $f(1,2)$, $f(-3,1)$, $f(2,-5)$.

3. Hallar $f^{-1}(5,3,3)$, $f^{-1}(1,1,-1)$, $f^{-1}(0,0,1)$.

4. Probar que f no es suprayectivo y hallar $\mathrm{Img}(f)$.

5. Probar que f es inyectivo.

Ejercicio 5.3 Se consideran las aplicaciones lineales $f, f' : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ y $g, g' : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ cuyas matrices, respecto de las bases canónicas, son :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar las matrices, respecto de las bases canónicas, de las aplicaciones lineales:

$$(f+f')\circ g \ ; \ (f+f')\circ g' \ ; \ f\circ(g+g') \ ; \ f'\circ(g+g') \ ; \ g\circ(f+f')$$

$$g'\circ(f+f') \ ; \ (g+g')\circ f' \ ; \ (g+g')\circ(f+f') \ ; \ (f+f')\circ(g+g').$$

2. Estudiar la inyectividad, suprayectividad y biyectividad de las anteriores aplicaciones lineales.

Ejercicio 5.4 Se considera el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M}(2,2)$ de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}(2,2) & \to & \mathcal{M}(2,2) \\ A & \to & A^t - A \end{array}$$

1. Probar que f es un homomorfismo.

2. Determinar las ecuaciones de f respecto de la base canónica de $\mathcal{M}(2,2)$.

Ejercicio 5.5 Sean V y V' dos $\mathbb{Q}$–espacios vectoriales de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dos bases de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, \mathbf{u'}_3\}$ y $\mathcal{C}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ dos bases de V'. Sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u'}_1 & + & \mathbf{u'}_2 & + & \mathbf{u'}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u'}_1 & + & 2\mathbf{u'}_2 & - & 2\mathbf{u'}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & 2\mathbf{u'}_1 & + & 5\mathbf{u'}_2 & + & \mathbf{u'}_3 \end{array}\right.$$

Las relaciones entre las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y las bases $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ vienen dadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{v}_1 & = & \mathbf{u}_1 & & & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & 2\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 & = & -\mathbf{u}_1 & & & + & 2\mathbf{u}_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{v}'_1 & = & -\mathbf{u'}_1 & - & \mathbf{u'}_2 & + & \mathbf{u'}_3 \\ \mathbf{v}'_2 & = & 2\mathbf{u'}_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & 2\mathbf{u'}_3 \\ \mathbf{v}'_3 & = & & & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u'}_3 \end{array}\right.$$

Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

Ejercicio 5.6 Sean V y V' dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ un base de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V'. Sea $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación lineal dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 & + & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u}'_1 & + & 2\mathbf{u}'_2 & - & 2\mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & 2\mathbf{u}'_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & 3\mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Hallar la factorización canónica de f.

Ejercicio 5.7 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea $F : V \to V$ el endomorfismo de V dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} F(\mathbf{u}_1) & = & 3\mathbf{u}_1 & - & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 & & \\ F(\mathbf{u}_2) & = & 15\mathbf{u}_1 & - & 5\mathbf{u}_2 & + & 13\mathbf{u}_3 & + & 6\mathbf{u}_4 \\ F(\mathbf{u}_3) & = & 21\mathbf{u}_1 & - & 5\mathbf{u}_2 & + & 3\mathbf{u}_3 & + & 8\mathbf{u}_4 \\ F(\mathbf{u}_4) & = & -12\mathbf{u}_1 & + & 3\mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 & & \end{array}\right.$$

Calcular las ecuaciones de F respecto de la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2\mathbf{u'}_3, \mathbf{u'}_4\}$, siendo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{u'}_1 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u'}_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u'}_3 & = & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}'_4 & = & -\mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 5.8 Se considera el espacio vectorial $\mathcal{M}(2,2)$ de las matrices 2×2 con coeficientes racionales y en él la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sea $f : \mathcal{M}(2,2) \to \mathcal{M}(2,2)$ definida así: $f(X) = A \cdot X$ para cada $X \in \mathcal{M}(2,2)$. Se pide:

1. Probar que f es un endomorfismo de espacios vectoriales.

2. Hallar las ecuaciones de f respecto de la base canónica de $\mathcal{M}(2,2)$.

3. ¿Es f un automorfismo?.

Ejercicio 5.9 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Consideramos las variedades L y L' de V, y el endomorfismo f definidos por:

$$L = \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & t & = & 0 \end{array} \right. \qquad L' = L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & & & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & + & \mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & \mathbf{u}_1 & - & 2\mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 & & \\ f(\mathbf{u}_3) & = & & & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_4) & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & + & 3\mathbf{u}_3 & + & 10\mathbf{u}_4 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas de $\mathrm{Img}(f)$ respecto de $\mathcal{B}$ y una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de las siguientes variedades lineales: L, L', $L \cap L'$ y $L + L'$.

3. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de las variedades $f(L)$, $f(L+L')$ y $f(L \cap L')$.

4. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ de la variedad $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 5.10 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea f el endomorfismo de V dado por:

$$\mathbf{f(u_1) = f(u_2) = -f(u_3) = (1/2)u_1 + (1/2)u_2,\ f(u_4) = 0}$$

1. Hallar una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3, \mathbf{u}'_4\}$ de V tal que

$$\mathrm{Img}(f) = L(\mathbf{u}'_1) \text{ y } \mathrm{Ker}(f) = L(\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3, \mathbf{u}'_4)$$

2. Sea $\mathcal{B}''$ una base arbitraria de V y A la matriz de f respecto de $\mathcal{B}''$. Demostrar que $A^2 = A$.

Ejercicio 5.11 Sea $V(3)$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}[X]$ cuyos elementos son los polinomios de grado menor o igual que 3. Dados los polinomios $Q_1(x) = x^4 - 1$ y $Q_2(x) = x^4 - x$, se considera la aplicación $\varphi : V(3) \to V(3)$ definida así:

$$\varphi(P(x)) = \text{resto de la division del polinomio } Q_1(x) \cdot P(x) \text{ por el polinomio} Q_2(x)$$

Probar que φ es un endomorfismo de $V(3)$ y determinar $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Img}(\varphi)$.

Ejercicio 5.12 Sean $V = \mathcal{M}(2,2)$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ la base canónica de V y $f : V \to V$ el endomorfismo definido por la relación $f(X) = A \cdot X - X \cdot A$, donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{B}$.

2. Probar que $V = \mathrm{Img}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

3. Usando el apartado anterior, probar que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^2)$. Deducir de aquí que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^n)$, para cada $n > 0$.

Ejercicio 5.13 Sea $f : V \to V'$ un homomorfismo entre los K–espacios vectoriales V y V', y sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V. Probar que:

1. f es inyectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

2. f es suprayectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es un sistema de generadores de V'.

3. f es biyectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de V'.

Ejercicio 5.14 Sea V un k–espacio vectorial y f un endomorfismo de V. Se pide:

1. Probar que si V es de dimensión finita, entonces son equivalentes:

   f es suprayectivo.

   f es inyectivo.

   f es biyectivo.

2. Comprobar que en el apartado anterior, la condición ”dimensión finita” es necesaria.

Ejercicio 5.15 Sea $V = \mathbb{R}[X]$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios en la indeterminada X con coeficientes reales. Consideremos la aplicación $D : V \to V$ definida así:

$$D(P(X)) = \text{derivada de } P(X) \text{respecto de } X$$

Se pide:

1. Probar que D es un endomorfismo de V.

2. Hallar $\mathrm{Ker}(D)$ e $\mathrm{Img}(D)$.

3. Averiguar si D es inyectiva o suprayectiva.

4. Comprobar que $V(n)$ es un subespacio de V **invariante** por D, para todo $n > 0$ (es decir: $D(V(n)) \subseteq V(n)$).

Ejercicio 5.16 Sea $V = \mathbb{R}[X]$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la aplicacion $\varphi_a : V \to V$ por:

$$\varphi_a(P(X)) = P(X - a)$$

1. Demostrar que φ_a es un automorfismo de V, para cada $a \in \mathbb{R}$.

2. Calcular:
$$\varphi_2(X^3 - X^2 + X + 1) \; ; \; \varphi_2^{-1}(X^3 - X^2 + X + 2)$$

3. Comprobar que la aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(V)$ definida por: $F(a) = \varphi_a$ (para cada $a \in \mathbb{R}$), no es un homomorfismo de espacios vectoriales.

4. Demostrar que $V(n)$ es un subespacio de V invariante por φ_a para cada $a \in \mathbb{R}$ y para todo $n > 0$.

Ejercicio 5.17 Sean V y W dos K–espacios vectoriales de dimensiones respectivas m y n, y $f : V \to W$ un homomorfismo.

1. Sean $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p \in \mathrm{Img}(f)$ linealmente independientes, y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ tales que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

   (a) Probar que $H = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ es linealmente independiente.

   (b) Probar que si $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ es una base de $\mathrm{Img}(f)$, entonces H es una base de V.

2. Probar que existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de V y W respectivamente tales que la matriz de f respecto de dichas bases sea de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \\ \mathbf{0}_{(m-p)\times p} & \mathbf{0}_{(m-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}$$

en donde $p = \dim \operatorname{Img}(f)$ e $I, \mathbf{0}$ son las matrices identidad y nula, respectivamente, de los órdenes que se indican.

Ejercicio 5.18 Sean V y W dos k–espacios vectoriales, y $f : V \to W$ una aplicación. Sean L y L' dos variedades lineales de V tales que $V = L + L'$, y supongamos que $f_{|L} : L \to W$ y $f_{|L'} : L' \to W$ son lineales. ¿Puede afirmarse que la aplicación f es lineal?.

Ejercicio 5.19 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión n y sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Consideremos la aplicación $\varphi : V \to V \times V$ definida por: $\varphi(\mathbf{v}) = (f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v}))$. Se pide:

1. Demostrar que φ es lineal.
2. ¿Puede ser φ inyectiva? ¿y suprayectiva?.
3. Sea $V = \mathbb{Q}^2$, $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{Q}^2$ y $\mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{Q}^4 = \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2$. Si f y g son endomorfismos de V tales que:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ y estudiar para qué valores de a, b es inyectiva la aplicación φ.

Ejercicio 5.20 Sean V un K–espacio vectorial, L_1 y L_2 subespacios de V tales que $V = L_1 \oplus L_2$. Sean $f_1 \in \operatorname{End}(L_1)$, $f_2 \in \operatorname{End}(L_2)$, y consideremos la aplicación $f : V \to V$ definida por $f(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}_1) + f_2(\mathbf{v}_2)$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{v}_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 \in L_2$. Probar que:

1. $f \in \operatorname{End}(V)$.
2. $\operatorname{Img}(f) = \operatorname{Img}(f_1) \oplus \operatorname{Img}(f_2)$.
3. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f_1) \oplus \operatorname{Ker}(f_2)$.

Ejercicio 5.21 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 3, $f \in \operatorname{End}(V)$ tal que $f^3 = 0$ y $f^2 \neq 0$. Consideremos un vector $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ tal que $f^2(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

1. Probar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{f^2}(\mathbf{a})\}$ es una base de V.
2. Hallar la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 5.22 Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V. Se consideran las variedades lineales L_1, L_2, L_3 y L_4 de V engendradas por los vectores cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ se indican:

$$L_1 = L((1,2,3),(3,6,7)) \quad L_2 = L((2,-3,1),(3,-1,5),(1,-4,3))$$

$$L_3 = L((4,-2,6),(6,-3,9)) \quad L_4 = L((5,4,3),(3,3,2),(8,1,3))$$

Sea V^* el espacio dual de V y $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*\}$ la base dual de B. Hallar la dimensión y una base de las siguientes variedades lineales de V^* : $\omega(L_1), \omega(L_2), \omega(L_3)$ y $\omega(L_4)$.

Ejercicio 5.23 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V, y $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{u}_4^*\}$ la base dual de $\mathcal{B}$. Dados los vectores siguientes:

$$\mathbf{a} = \mathbf{3u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3} - \mathbf{u_4}, \ \mathbf{b} = \mathbf{u_1} + \mathbf{2u_2} + \mathbf{u_3}, \ \mathbf{c} = -\mathbf{5u_1} + \mathbf{5u_2} + \mathbf{u_3} + \mathbf{3u_4},$$

$$\mathbf{d} = -3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3} + \mathbf{2u_4}, \ \mathbf{a}^* = \mathbf{u_1^*} - \mathbf{u_2^*} + \mathbf{u_3^*} + \mathbf{2u_4^*}$$

se consideran las variedades lineales $L_1 = L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ y $L_2 = L(\mathbf{a}^*)$. Se pide:

1. Hallar la dimensión de L_1 y de $\omega(L_1)$. Obtener una base de $\omega(L_1)$.
2. Hallar una base de $\omega(L_2)$.

3. Dar un sistema de ecuaciones implícitas de L_1 (respecto de $\mathcal{B}$) y de L_2 (respecto de $\mathcal{B}^*$).

4. Hallar una base de $L_1 \cap \omega(L_2)$ y otra de $L_1 + \omega(L_2)$.

5. Hallar una base de $\omega(L_1 \cap \omega(L_2))$ y otra de $\omega(L_1 + \omega(L_2))$.

Ejercicio 5.24 Sea $V = \mathcal{M}(2,2)$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{B}$ la base canónica de V y $f : V \to V$ la aplicación definida por: $f(X) = AX - XA^{-1}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que f es lineal.

2. Hallar las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{B}$.

3. Probar que $V = \mathrm{Img}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

4. Usar 3) para probar que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^2)$. Deducir de aquí que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^n)$, para cada $n > 0$.

5. Sean $\mathbf{v}^*, \mathbf{w}^* : V \to \mathbb{Q}$ las aplicaciones definidas por:

   $$\mathbf{v}^*(C) = a - d \ , \mathbf{w}^*(C) = b - c$$

   para toda matriz perteneciente a V

   $$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Probar que $\mathbf{v}^* \in V^*$, $\mathbf{w}^* \in V^*$ y ver si son o no linealmente independientes.

Ejercicio 5.25 Sean V y W dos k-espacios vectoriales, de dimensiones m y n respectivamente, y V^* y W^* sus duales.

1. Probar que si $\mathbf{w} \in W$ es un vector distinto de 0, entonces existe un $\mathbf{w}^* \in W^*$ tal que $\mathbf{w}^*(\mathbf{w})$ es distinto de 0.

2. Probar que la aplicación $F : V \to (V^*)^*$ que a cada $\mathbf{v} \in V$ le asocia el elemento $F(\mathbf{v}) \in (V^*)^*$ definido por : $F(\mathbf{v})(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^*(\mathbf{v})$, para cada $\mathbf{w}^* \in V^*$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

3. Sea $f \in Hom(V, W)$. Definimos $f^t : W^* \to V^*$ por: $f^t(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^* \circ f$, para cada $\mathbf{w}^* \in W^*$. Demostrar que f^t es lineal.

4. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V y W respectivamente, y A es la matriz de f^t respecto de ellas, calcular la matriz de f respecto de $(\mathcal{B}')^*$ y $\mathcal{B}^*$.

5. Demostrar que $\mathrm{Ker}(f^t) = \omega(\mathrm{Img}(f))$ e $\mathrm{Img}(f^t) = \omega(\mathrm{K}er(f))$.

6. Probar que f^t es inyectiva (resp. suprayectiva) si y sólo si f es suprayectiva (resp. inyectiva).

7. Sea $T : Hom(V, W) \to Hom(W^*, V^*)$ la aplicación definida por : $T(f) = f^t$, para cada $f \in Hom(V, W)$. Probar que F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejercicio 5.26 Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n, y sean $L_1, L_2 \subseteq V$ dos variedades lineales tales que $V = L_1 \oplus L_2$.

1. Probar que $V^* = \omega(L_1) \oplus \omega(L_2)$.

2. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base del espacio vectorial V tal que

   $$L_1 = L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r), \quad L_2 = L(\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n),$$

   y sea $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*\}$ la base dual. Probar que $\omega(L_1) = L(\mathbf{u}_{r+1}^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*)$ y $\omega(L_2) = L(\mathbf{u}_1^*, \ldots, \mathbf{u}_r^*)$.

Ejercicio 5.27 Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ donde:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, -1), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Sea V^* el espacio vectorial dual de V y $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^* \in V^*$, definidos por:

$$\mathbf{x}_1^*(a, b, c, d) = 2a - b + c - d$$

$$\mathbf{x}_2^* = 2\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_3^* + \mathbf{u}_4^*$$

donde $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{u}_4^*\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$. Se pide:

1. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, calcular $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x})$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
2. Si $L = \langle (1, 1, -1, -1), (1, 0, -1, 1) \rangle$ (con respecto a la base canónica), calcular las ecuaciones de L respecto de la base $\mathcal{B}$ y un sistema de ecuaciones implícitas de $\omega(L)$ respecto de la base $\mathcal{B}^*$.
3. Si $E^* = \langle \mathbf{x}_2^* \rangle$, calcular, respecto de $\mathcal{B}^*$, un sistema de ecuaciones de $\omega(E^*)$ y de $\omega(L + \omega(E^*))$.
4. Calcular las coordenadas de $\mathbf{x}_1^*$ respecto de la base $\mathcal{B}^*$.

Ejercicio 5.28 Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre K y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea f la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$, definida por:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}_1 & - & \mathbf{u}_2 & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & 2\mathbf{u}_1 & & & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & -4\mathbf{u}_1 & - & 2\mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & & \\ f(\mathbf{u}_4) & = & -\mathbf{u}_1 & - & 3\mathbf{u}_2 & + & 4\mathbf{u}_3 & + & 5\mathbf{u}_4 \end{array}$$

Se sabe además que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 20 \\ 2 & -2 & 10 & 10 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1. Calcular una base y un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $\ker(f)$ e $\operatorname{img}(f)$.
2. Probar que $V = \ker(f) \oplus \operatorname{img}(f)$.
3. Usando como dato la igualdad (1), resolver las siguientes cuestiones:
   (a) Demostrar que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + \ker(f), -2\mathbf{u}_3 + 3\mathbf{u}_4\}$, es una base de $V/\ker(f)$.
   (b) Calcular las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}'$, de la clase:
   $$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 + \ker(f)$$
   (c) Calcular las ecuaciones, respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de la aplicación lineal canónica:
   $$p : V \longrightarrow V/\ker(p)$$

Sección 6 Autovalores y autovectores

Ejercicio 6.1 Los siguientes polinomios tienen todas sus raíces racionales o complejas con coeficientes racionales. Hallarlas.

1. $f_1 = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.
2. $f_2 = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$.
3. $f_3 = 8x^5 + 15x^4 - 26x^3 - 29x^2 + 36x - 4$.
4. $f_4 = 25x^6 - 10x^5 - 149x^4 + 260x^3 - 161x^2 + 38x - 3$.
5. $f_5 = 8x^5 - 12x^4 - 26x^3 + 47x^2 - 24x + 4$.

6. $f_6 = 4x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 56x + 40$.

7. $f_7 = 25 - 20x - 4x^3 + 14x^2 + x^4$.

8. $f_8 = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4$.

9. $f_9 = 16x^6 + 32x^5 + 216x^4 + 400x^3 + 825x^2 + 1250x + 625$.

10. $f_{10} = 900x^6 - 1140x^5 + 361x^4 + 60x^3 - 38x^2 + 1$.

Ejercicio 6.2 Las matrices siguientes tienen polinomios característicos con raíces racionales y complejas con componentes racionales. Hallar estos polinomios característicos y los autovalores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 37 & -9 \\ 2 & 12 & 8 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 33 & 26 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 67 & 59 & -9 \\ 2 & -16 & -20 & -5 \\ -2 & 28 & 31 & 4 \\ 3 & 31 & 24 & -8 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 17 & 9 & -9 \\ 2 & 16 & 12 & -5 \\ -2 & -12 & -9 & 4 \\ 3 & 17 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad A4 = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 37 & -9 \\ 2 & 10 & 6 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 32 & 25 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 3 & 31 & 23 & -9 \\ 2 & 7 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 21 & 14 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 42 & 34 & -9 \\ 2 & -29 & -33 & -5 \\ -2 & 38 & 41 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 19 & 11 & -9 \\ 2 & 8 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & -3 & 4 \\ 3 & 12 & 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad A8 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{85}{2} & \frac{69}{2} & -9 \\ 2 & \frac{57}{4} & \frac{41}{4} & -5 \\ -2 & \frac{-29}{4} & \frac{-17}{4} & 4 \\ 3 & \frac{67}{2} & \frac{53}{2} & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 42 & 34 & -9 \\ 2 & 47 & 43 & -5 \\ -2 & -42 & -39 & 4 \\ 3 & 55 & 48 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 51 & 43 & -9 \\ 2 & -20 & -24 & -5 \\ -2 & 30 & 33 & 4 \\ 3 & 16 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.3 Hallar los autovalores y los espacios de autovectores correspondientes de la matriz compleja:

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 1 & 12 \\ -13 & 0 & 12 \\ -17 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

¿Existe una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de dicha matriz?.

Ejercicio 6.4 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

2. Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$

3. Demostrar que A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6.5 Estudiar para qué valores de a y b es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En los casos afirmativos, hallar su forma diagonal D y obtener una matriz invertible real $P \in \mathcal{M}(3,3)$ tal que $P^{-1}AP = D$

Ejercicio 6.6 Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, $\mathcal{B}$ una base de V y $f,\ g,\ h \in \mathrm{End}(V)$ de matrices, respecto de $\mathcal{B}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & -20 & -32 \\ -1 & 7 & -9 & -15 \\ 1 & 10 & -19 & -30 \\ -1 & -4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Se pide:

1. Probar que f es diagonalizable y calcular una base de V respecto de la cual la matriz de f sea diagonal.
2. Probar que g es linealmente equivalente a f y calcular una matriz de paso.
3. Probar que h no es linealmente equivalente a f (ó a g).

Ejercicio 6.7 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -21 & -18 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -3 \\ 15 & -6 & -6 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Probar que A y B son semejantes.

Ejercicio 6.8
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f, g \in \mathrm{End}(V)$ cuyas matrices respecto de cierta base $\mathcal{B}$ de V son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sean L_1, L_2 y L_3 variedades lineales de V cuyas ecuaciones recpecto de $\mathcal{B}$ son:

$$L_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Probar que $V = L_1 \oplus L_2$ y que $V = L_1 \oplus L_3$
2. Probar que L_1 y L_2 son invariantes por f y que L_1 y L_3 son invariantes por g.
3. Calcular una base $\mathcal{C}$ de V tal que la matriz de f respacto de $\mathcal{C}$ sea diagonal por cajas y calcular esta matriz. (La misma cuestión para g).
4. Calcular los autovalores de f y g y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a dichos autovalores y decidir si f y/o g son diagonalizables.
5. En el caso de que g sea diagonalizable, calcular una base de autovectores de g y una matriz P tal que $D = P^{-1}BP$ donde D es la matriz diagonal.

Ejercicio 6.9 Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar la forma canónica de Jordan de f y obtener, **razonadamente**, una base canónica para f y una matriz de paso.

2. Calcular A^{2000}.

Ejercicio 6.10 Sea V un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión 4 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de matriz A con respecto a la base $\mathcal{B}$. Calcular la forma canónica y una base canónica para f en el caso en que A sea una de las matrices siguientes:

$$a)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad f)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ -7 & -17 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$g)\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad h)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ -8 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$i)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 10 & 3 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad j)\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2+i \end{pmatrix}$$

$$k)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad l)\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES:
Autovalores a) 1; -1; i; -i. b) 1; -1; 0. c) 2; -1; 0. d) 1;-1 e) 1; 0. f) 1; -1. g) 1; -1 h) 1; -1. i) 1; -1. j) i. k) 0. l) 0
Partición de multiplicidades a) 1=1; 1=1; 1=1; 1=1. b) 2=2; 1=1; 1=1. c) 2=1+1; 1=1; 1=1 d) 3=3; 1=1. e) 3=2+1; 1=1. f) 3=1+1+1; 1=1. g) 2=2; 2=2. h) 2=1+1; 2=2. i) 2=1+1 ; 2=1+1. j) 4=3+1. k) 4=2+2. l) 4=1+1+1+1.
Formas canónicas

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad h)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$j)\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad k)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.11 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^5$$

1. Calcular la forma canónica de f, explicitando la partición de multiplicidades.
2. Calcular, **razonadamente**, una base canónica para f y una matriz de paso.

Ejercicio 6.12 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^5$$

1. Calcular la forma canónica de f, explicitando la partición de multiplicidades.
2. Calcular, **razonadamente**, una base canónica para f y una matriz de paso.

Ejercicio 6.13 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V, $f \in \mathrm{End}(V)$ cuya matriz respecto de B es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \lambda^5.$$

Sean L_1 , L_2 las variedades dadas por

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 = L((0,0,1,2,-2),(0,0,-1,0,2))$$

Se pide:

1. Calcular una base y unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Img}(f)$.
2. Sean $\mathbf{x} = (-1,1,0,-1,1) + \mathrm{Ker}(f)$, $\mathbf{y} = (0,1,0,0,1) + \mathrm{Ker}(f)$ dos elementos de $V/\mathrm{Ker}(f)$. ¿Son $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ linealmente independientes módulo $\mathrm{Ker}(f)$? Hallar una base de $V/\mathrm{Ker}(f)$ que contenga a $\mathbf{x}$.
3. Calcular la forma canónica de f y una base canónica para f.
4. Calcular una base y unas ecuaciones implícitas de $f(L_1)$, $f^{-1}(L_2)$, $L_1 \cap L_2$, y $L_1 + L_2$.

Ejercicio 6.14 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V , $f : V \to V$ el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sean L_1 , L_2 las variedades lineales de V dadas (respecto de $\mathcal{B}$) por:

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

y $L_2 = L((-1,2,0,-1,0),(0,1,1,-1,1),(1,0,2,-1,0))$ Se pide:

1. Calcular la dimensión y una base de $\mathrm{Img}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Dar unas ecuaciones de los homomorfismos que intervienen en la factorización canónica de f.

3. Calcular la dimensión y una base de $f(L_1)$, $f^{-1}(L_2)$, $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\omega(L_1)$.

4. Calcular la forma canónica de f y una base canónica, dando la matriz de paso. Descomponer V como suma directa de subespacios invariantes por f.

Ejercicio 6.15 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \lambda^5$$

Sea $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ la sucesión de subespacios asociada al autovalor 0, de bases respectivas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ siendo:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 0, 1, 1), (1, 2, 0, 1, 2)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}$$

Se pide:

1. Calcular la forma canónica de f, una base canónica para f y una matriz de paso.

2. Hallar

   (a) La dimensión, una base y unas ecuaciones implícitas independientes de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Img}(f)$.

   (b) Una base y unas ecuaciones implícitas independientes de las variedades lineales V_1 e $\mathrm{Img}(f) \cap V_1$.

Ejercicio 6.16 Sea A una matriz simétrica (resp. antisimétrica) real de orden n. Demostrar:

1. Los autovalores de A son números reales (resp. complejos imaginarios puros o bien nulos).

2. El determinante de A es siempre un número real (resp. un número real positivo o nulo).

Ejercicio 6.17 Sea V un K−espacio vectorial de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f^2 = f$. Se pide:

1. Probar que los únicos autovalores posibles de f son 0 y 1.

2. Probar que f es diagonalizable.

Ejercicio 6.18 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 4 y f un endomorfismo de V tal que $f^3 = 0$ y $f^2 \neq 0$. Se pide:

1. Probar que el único autovalor de f es el 0.

2. Hallar la forma canónica de f. (**Indicación**: Estudiar las posibles particiones de multiplicidades)

Ejercicio 6.19 Sea V un K-espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}(V)$. Consideremos la aplicación $\varphi_f : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ definida por $\varphi_f(g) = f \circ g$.

1. Probar que φ_f es un endomorfismo de $\mathrm{End}(V)$.

2. Probar que f y φ_f poseen los mismos autovalores.

Ejercicio 6.20 Sean A y B dos matrices reales de $\mathcal{M}(n \times n)$. Demostrar que las propiedades siguientes son equivalentes:

1. Existe una matriz real $P \in \mathcal{M}(n \times n)$ invertible tal que $P^{-1}AP = B$.

2. Existe una matriz compleja $Q \in \mathcal{M}(n \times n)$ invertible tal que $Q^{-1}AQ^{=}B$.

Ejercicio 6.21 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Probar que son equivalentes:

1. Existe un entero $r > 0$ tal que $f^r = 0$.

2. El único autovalor de f es el cero. En el caso en que se verifique una de las condiciones anteriores, ¿se puede decir algo acerca del menor entero $r > 0$ tal que $f^r = 0$?.

Ejercicio 6.22 Sea A una matriz cuadrada diagonalizable y r un entero positivo. Probar que A^r es también diagonalizable. ¿Cuáles son sus autovalores?

Ejercicio 6.23 Los siguientes apartados son independientes:
1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 6, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de f cuya multiplicidad es $m = 6$. Sea $V_1 = \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$ tal que $n_1 = \dim(V_1) = 3$.
Determinar las posibles particiones de la multiplicidad m y describir para cada una de ellas la correspondiente forma canónica de Jordan.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ una base de V y $f \in \mathrm{End}(V)$ cuyas ecuaciones respecto de la base $\mathcal{B}$ son:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de f es: $P(f, \lambda) = (\lambda - 1)^5$.
Se sabe además que las bases de los subespacios asociados al autovalor λ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(1,1,0,1,0), (1,0,0,0,1)\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{(0,1,0,1,-1), (2,1,0,1,1), (1,2,0,0,0), (2,1,1,1,1)\}, \\ \mathcal{B}_3 &= \mathcal{B} \end{aligned}$$

Calcular **razonadamente** la forma canónica J de f, una base canónica de V para f y una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$, donde A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 6.24 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}\}$ una base de V y $f \in \mathrm{End}(V)$. Sea A la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ la sucesión de subespacios invariantes asociados al único autovalor de f, $\lambda = 1 + i$. $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ son, respectivamente, bases de dichos subespacios las cuales hay que seleccionar entre los siguientes subconjuntos de vectores:

$$\mathcal{B}_1 = \{(0,0,1,0,0)\}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{(0,0,1,0,0), (1,0,0,0,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1,0,1), (1,0,2,0,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1,0,1), (1,0,2,0,1), (0,0,0,1,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1,0,1), (1,0,2,0,1), (0,0,0,1,1), (1,0,2,0,2)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}$$

Se sabe además que:

$$-(\lambda I - A) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Deducir, razonadamente, la partición de la multiplicidad del autovalor λ.
2. Calcular la forma canónica de Jordan de f.
3. Obtener una base canónica de V para f.
4. Calcular la matriz A del endomorfismo f.

Ejercicio 6.25 Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores.
2. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B}$ una base y $f : V \to V$ el endomorfismo cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$
Tiene un autovalor λ_1 de multiplicidad 5, y
$$V_1 = \ker(\lambda_1 \mathrm{id}_V - f) = L((1,2,0,1,0),(0,0,1,0,0),(0,1,0,0,1)),$$
$$V_2 = \ker(\lambda_1 \mathrm{id}_V - f)^2 = L((-3,0,0,1,0),(-2,0,0,0,1),(2,1,0,0,0),(2,1,-1,0,0)),$$
$$V_3 = \ker(\lambda_1 \mathrm{id}_V - f)^3 =$$
$$= L((3,1,1,-2,4),(-1,2,-2,3,-5),(0,0,3,0,0),(2,1,3,-1,6),(1,1,2,-3,8)).$$
Calcular la forma canónica de A y una base canónica de V para f.
3. Sea J la forma canónica de A. Mediante permutaciones de filas y columnas (transformaciones elementales de tipo 3), probar que J y J^t son semejantes. Deducir que A y A^t tienen la misma forma canónica.

Ejercicio 6.26 Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ una base de V y $f \in \mathrm{End}(V)$ cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de f es $P(f,\lambda) = (\lambda^2+4)^3$

1. Comprobar que f es diagonalizable y calcular sus formas canónicas compleja y real.
Dato: La forma reducida por filas de la matriz $2iI - A$, es:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Calcular sendas bases canónicas, compleja y real de V para f así como las correspondientes matrices de paso.

Ejercicio 6.27 Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ una base de V y $f \in \text{End}(V)$ cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $P(A, \lambda) = (\lambda^2 + 1)^3$
Se sabe además que las bases de los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = i$, son:

$$\mathcal{B}_{11} = \{(i, 1, i, 1, 0, 0), (2, 1, 2, 0, 0, i)\}$$

$$\mathcal{B}_{12} = \{(i, 1, i, 1, 0, 0), (1 - i, i, 1, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 0, 0, i)\}$$

Se pide:

1. La forma canónica compleja $J_{\mathcal{C}}$ de f, una base canónica compleja de V para f y una matriz de paso Q tal que $J_{\mathcal{C}} = Q^{-1}AQ$.

2. La forma canónica real $J_{\mathcal{R}}$ de f, una base canónica real de V para f y una matriz de paso real P tal que $J_{\mathcal{R}} = P^{-1}AP$.

Ejercicio 6.28 Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ una base de V y $f \in \text{End}(V)$ cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $P(A, \lambda) = (\lambda^2 + 1)^3$
Se sabe además que las bases de los subespacios asociados al autovalor $\lambda_1 = i$, son:

$$\mathcal{B}_{11} = \{(-i, 1, 1, 0, 1, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_{12} = \{(0, 0, i, 1, 0, 0), (-i, 1, 1, 0, 1, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_{13} = \{(0, 0, i, 1, 0, 0), (-i, 1, 1, 0, 1, 0), (-1, 1 - i, -2i, 0, 0, 1)\}$$

Se pide:

1. La forma canónica compleja $J_{\mathcal{C}}$ de f, una base canónica compleja de V para f y una matriz de paso Q tal que $J_{\mathcal{C}} = Q^{-1}AQ$.

2. La forma canónica real $J_{\mathcal{R}}$ de f, una base canónica real de V para f y una matriz de paso real P tal que $J_{\mathcal{R}} = P^{-1}AP$.

Sección 7 Formas bilineales

Ejercicio 7.1 En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz de la forma bilineal simétrica $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) & = & 5 \\ \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) & = & 1 \\ \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) & = & 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & = & 0 \\ \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & = & 4 \\ \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) & = & -1 \end{array} \right.$$

siendo: $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.

Ejercicio 7.2 Sea $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ sea diagonal.

Ejercicio 7.3 Hallar una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}(4 \times 4; \mathbb{R})$ congruente con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

y obtener una matriz P no singular tal que $D = P^t \cdot A \cdot P$.

Ejercicio 7.4 Demostrar que son congruentes sobre $\mathbb{R}$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Son congruentes sobre $\mathbb{Q}$?.

Ejercicio 7.5 Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar una base de V tal que la matriz de φ respecto de ella sea diagonal.

Ejercicio 7.6 Sea φ la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Demostrar que φ es un producto escalar.
2. Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal (respecto de φ).

Ejercicio 7.7 Se considera la forma bilineal simetrica $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que φ es un producto escalar.
2. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$(respecto de φ).

Ejercicio 7.8 Sea $V(3)$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios en la variable X con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & V(3) \times V(3) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (f(X), g(X)) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(X)g(X)\,dx \end{array}$$

1. Demostrar que φ es un producto escalar.

2. Hallar una base ortonormal de $V(3)$ (respecto de φ).

Ejercicio 7.9 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V. Se considera la forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar una base de V respecto de la cual la matriz de f sea una matriz diagonal D con 1, -1 ó 0 en la diagonal principal.

2. Calcular una matriz P tal que $D = P^t \cdot A \cdot P$.

3. ¿Es f un producto escalar?.

Ejercicio 7.10 Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix}$$

Si $p \in \mathbb{R}$, se pide:

1. Obtener una base de $\mathbb{R}^2$ respecto de la cual la matriz de φ sea diagonal.

2. Calcular el rango y la signatura de φ en función de los valores de p. En cada caso, hallar una base de $\mathbb{R}^2$ respecto de la cual la matriz de φ sea diagonal con $0, 1$, ó -1 en la diagonal principal.

3. ¿Para qué valores de p es φ un producto escalar?. Para dichos valores, encontrar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \varphi)$.

Ejercicio 7.11 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión finita, $\varphi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y U, W dos subespacios vectoriales de V. Probar:

1. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

2. Si φ es un producto escalar, entonces $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Ejercicio 7.12 Sea $(V, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Probar que:

1. Para endomorfismo f de V existe un único endomorfismo f^* tal que $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot f^*(\mathbf{y})$ (f^* se denomina endomorfismo **adjunto** de f).

2. La matriz de f^* en una cierta base ortonormal es la traspuesta de la matriz de f.

3. $\mathrm{Img}(f^*) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$.

4. $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Img}(f))^\perp$.

Ejercicio 7.13 Sea $(V, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores de V. Demostrar que:

1. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

2. $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

3. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$.

4. $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \iff (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} - \mathbf{v})$

5. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Ejercicio 7.14 Sea $(V, \cdot)$ un espacio euclídeo y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores de V ortogonales dos a dos. Probar que si el único vector de V ortogonal a todos los elementos de $\mathcal{B}$ es el $\mathbf{0}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de V.

Sección 8 Matrices especiales

Ejercicio 8.1 Sea $(V, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base ortonormal de $(V, \bullet)$ y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Probar que f es un endomorfismo simétrico.
2. Calcular una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V tal que la matriz D de f respecto de ella sea diagonal.
3. Calcular una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejercicio 8.2 Sea $(V, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base ortonormal de $(V, \bullet)$ y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 3)^2$$

1. Probar que f es un endomorfismo simétrico.
2. Calcular una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V tal que la matriz D de f respecto de ella sea diagonal.
3. Calcular una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejercicio 8.3 Sea $(V, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base ortonormal de $(V, \bullet)$ y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Probar que f es un endomorfismo ortogonal.
2. Clasificar f hallando una forma canónica.
3. Hallar una base canónica ortonormal de V para f.

Ejercicio 8.4 Sea $(V, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base ortonormal de $(V, \bullet)$ y $f, g \in \mathrm{End}(V)$ cuyas matrices respecto de $\mathcal{B}$ son, respectivamente,:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$|\lambda I - A| = \frac{1}{25}(\lambda - 1)(5\lambda^2 - 8\lambda + 5)(5\lambda^2 - 6\lambda + 5) \text{ y } |\lambda I - B| = \frac{1}{25}(\lambda - 1)(5\lambda^2 - 6\lambda + 5)^2$$

Se pide:

1. Probar que f y g son endomorfismos ortogonales.
2. Clasificar f y g hallando sus formas canónicas.
3. Hallar bases canónicas ortonormales de V para f y para g.