Tema 2. Espacios vectoriales.

Sección 1. Definición de Espacio vectorial.

Ejercicio 2.1 Demostrar que el conjunto $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, con la suma de matrices y el producto de matrices por números reales, es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial. Además, si consideramos las matrices

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

demostrar que el conjunto $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y, por tanto, que este espacio vectorial tiene dimensión 6.

Ejercicio 2.2 Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos del cuerpo K. Probar que:

1. $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ con la suma de matrices y producto por elementos de K es un K–espacio vectorial.
2. El conjunto $\{E_{i,j};\ 1 \leq i, j \leq n\}$, donde $E_{i,j}$ es la matriz con un 1 en la posición (i, j) y 0 en las restantes, es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
3. $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(K)) = mn$.

Ejercicio 2.3 Sea W el subconjunto de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ formado por las matrices simétricas. Se pide:

1. Demostrar que W es un espacio vectorial.
2. Obtener una base y la dimensión de W.
3. Idem para el subconjunto $U \subset \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de las matrices antisimétricas.

Ejercicio 2.4 Demostrar que el conjunto

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$$

posee estructura de $\mathbb{Q}$–espacio vectorial respecto de las operaciones inducidas en dicho conjunto por la suma y el producto de números reales. Hallar una base y la dimensión de dicho $\mathbb{Q}$–espacio vectorial.

Ejercicio 2.5 Dado el conjunto $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, probar que:

1. V es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial, respecto de las operaciones usuales.
2. V es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial, respecto de las operaciones usuales.
3. El conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ constituye una base del $\mathbb{C}$–espacio vectorial V.
4. El conjunto $\{(1, 1), (1, i), (i, 1), (i, -i)\}$ constituye una base del $\mathbb{R}$–espacio vectorial V.

Ejercicio 2.6 Se considera el conjunto $V = \mathbb{R}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes reales.

- Comprobar que V es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial con la suma de polinomios y el producto de polinomios por números reales.
- Si $n > 0$ es un número natural y notamos $V(n)$ al conjunto de los polinomios de V de grado no superior a n, probar que $V(n)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.
- ¿Es V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión finita?.

Ejercicio 2.7 Con las notaciones del ejercicio 2.6 averiguar si los conjuntos siguientes son bases de $V(3)$:

$$\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$$

$$\{1 - x + x^2 - x^3, 1 + x + x^2 + x^3, 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3, -2 - x - x^2 - x^3\}$$

Sección 2. Dependencia lineal.

Ejercicio 2.8 En el K–espacio vectorial K^2 ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(0,1),(0,2)\}$.
2. $\{(1,1),(2,2),(-1,1)\}$.
3. $\{(1,1),(0,2),(3,1)\}$.

En el caso en que el conjunto sea linealmente dependiente, expresar uno de los vectores como combinación lineal de los demás.

Ejercicio 2.9 ¿Existe algún valor de α para el cual sean linealmente dependientes los vectores de $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a} = (\alpha, -1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, \alpha, -1, 1)$ y $\mathbf{c} = (1, 0, -1, 2)$?

Ejercicio 2.10 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V. Consideremos los vectores de V cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son:

1. $\mathbf{a}_1 = (2,3,5),\ \mathbf{a}_2 = (3,7,8),\ \mathbf{a}_3 = (1,-6,1),\ \mathbf{b} = (7,-2,m)$
2. $\mathbf{a}_1 = (4,4,3),\ \mathbf{a}_2 = (7,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (4,1,6),\ \mathbf{b} = (5,9,m)$
3. $\mathbf{a}_1 = (3,4,2),\ \mathbf{a}_2 = (6,8,7),\ \mathbf{b} = (9,12,m)$
4. $\mathbf{a}_1 = (3,2,5),\ \mathbf{a}_2 = (2,4,7),\ \mathbf{a}_3 = (5,6,m),\ \mathbf{b} = (1,3,5)$
5. $\mathbf{a}_1 = (3,2,6),\ \mathbf{a}_2 = (7,3,9),\ \mathbf{a}_3 = (5,1,3),\ \mathbf{b} = (m,2,5)$

En cada caso, hallar m para que el vector $\mathbf{b}$ sea combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_i$.

Ejercicio 2.11 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$A = \{(1,5,1),(2,1,0)\}, \quad C = \{(1,5,1),(2,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

Se pide:

1. Probar que A es un conjunto linealmente independiente y que C es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.
2. Encontrar una base $\mathcal{B}$ que contenga al conjunto A y esté contenida en el conjunto C.

Ejercicio 2.12 Dar un ejemplo de tres vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ que sean linealmente dependientes, y tales que $\mathbf{v}_1$ no dependa linealmente de $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Ejercicio 2.13 Sea V un K–espacio vectorial, y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente.
2. El sistema $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 2.14 Sea V un K–espacio vectorial, y sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El sistema $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.
2. El sistema $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_n, \cdots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 2.15 Sean V un K–espacio vectorial y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Sea $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4$, con $\alpha_i \in K (i = 1, \cdots, 4)$. Probar que son equivalentes:

1. El conjunto $\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}, \mathbf{u}_3 - \mathbf{a}, \mathbf{u}_4 - \mathbf{a}\}$ es linealmente independiente.
2. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 1$.

Ejercicio 2.16 Sean V un K–espacio vectorial y $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Sea $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$, con $\alpha_i \in K (i = 1, \cdots, n)$. Probar que son equivalentes:

1. El conjunto $\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{u_n} - \mathbf{a}\}$ es linealmente independiente.
2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 1$.

Sección 3. Sistemas de generadores y bases.

Ejercicio 2.17 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son sistema de generadores, cuáles son linealmente independientes y cuáles son bases:

1. $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,3)\}$.
2. $\{(-1,2,1),(1,0,2)\}$.
3. $\{(1,0,1),(2,-1,3),(0,1,-1)\}$.
4. $\{(1,2,-1),(1,2,0),(-1,1,3)\}$.
5. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Si algún conjunto es linealmente independientes, ampliarlo hasta una base. Si alguno es sistema de generadores, encontrar una base contenida en él.

Ejercicio 2.18 Determinar cuáles de estos conjuntos de $\mathbb{R}^3$ contienen una base y, en caso afirmativo, hallarla.

1. $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1),(1,2,3)\}$.
2. $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(0,1,2)\}$.
3. $\{(1,1,1),(0,0,0),(2,2,2),(1,2,2)\}$.
4. $\{(0,-1,2),(0,0,0),(1,0,1),(0,2,3)\}$.
5. $\{(2,-4,6),(0,1,2),(1,1,1),(3,4,3)\}$.

Ejercicio 2.19 Ampliar los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^4$ hasta una base, siempre que sea posible.

1. $\{(1,2,0,1)\}$.
2. $\{(2,1,4,-3),(0,0,0,0)\}$.
3. $\{(1,2,3,4),(1,4,6,8)\}$.
4. $\{(1,2,0,1),(0,1,0,1),(-1,2,1,3)\}$.
5. $\{(0,1,-2,4),(-3,5,1,2),(3,-4,-3,2)\}$.

Ejercicio 2.20 Sea V un K-espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Demostrar los siguientes enunciados.

1. Si S es un sistema linealmente dependiente y $\mathbf{v} \in V$, entonces $S \cup \{\mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente.
2. Si S es un sistema linealmente independiente y $\mathbf{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.
3. Si S es un sistema de generadores y $\mathbf{v} \in V$, entonces $S \cup \{\mathbf{v}\}$ es un sistema de generadores.
4. Si $\mathbf{0} \in S$, entonces S es linealmente dependiente.
5. Si S es un sistema de generadores y $\mathbf{v} \in V$, entonces $S \cup \{\mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente.
6. Si S es un sistema linealmente independiente y $\mathbf{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\mathbf{v}\}$ no es sistema de generadores.
7. Si una base de V está contenida dentro de otra, entonces son iguales.

Sección 4. Coordenadas.

Ejercicio 2.21 Sea $B = \{(1,0,1,3),(0,1,-1,0),(1,0,1,2),(-1,0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular las coordenadas de los siguientes vectores respecto de la base B.

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0), \quad \mathbf{v}_2 = (1,1,1,1), \quad \mathbf{v}_3 = (1,-1,2,1).$$

Ejercicio 2.22 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3, \mathbf{u}'_4\}$ dos bases de V relacionadas por:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{u}'_1 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 & & \\ \mathbf{u}'_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & & & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}'_3 & = & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 & & \\ \mathbf{u}'_4 & = & -\mathbf{u}_1 & & & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \end{array}\right.$$

1. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base B se dan:

   $$\mathbf{a}_B = (1,2,0,1), \ \mathbf{b}_B = (3,-1,2,1), \ \mathbf{c}_B = (0,1,-2,3), \ \mathbf{d}_B = (1,2,1,2).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de B'.

2. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base B' se dan:

   $$\mathbf{a}'_{B'} = (0,1,1,-1); \ \mathbf{b}'_{B'} = (2,1,0,1); \ \mathbf{c}'_{B'} = (-1,2,0,6)$$

   Determinar sus coordenadas respecto de B.

Ejercicio 2.23 Sean B_1, B_2, B_3 tres bases de un espacio vectorial V. Demostrar que las matrices de cambio de base verifican la siguiente igualdad:

$$A_{B_3,B_1} = A_{B_2,B_1} A_{B_3,B_2}.$$

Ejercicio 2.24 En $\mathbb{R}^3$, consideremos las bases $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B_2 = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}$. Calcular las matrices de cambio de base A_{B_1,B_2} y A_{B_2,B_1}.