Tema 3. Variedades lineales.

Sección 1. Definición.

Ejercicio 3.1 Estudiar si son subespacios vectoriales los siguientes subconjuntos de los espacios $\mathbb{R}^n$ indicados:

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y - 3\} \subset \mathbb{R}^2$.
3. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = x - t\} \subset \mathbb{R}^4$.
4. $A = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : x = t, z = y + u\} \subset \mathbb{R}^5$.
5. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.2 Consideremos el K–espacio vectorial K^n, y los subconjuntos

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

¿Es A un subespacio vectorial de K^n? ¿Y B?

Ejercicio 3.3 Justificar razonadamente la veracidad o falsedad de los siguientes asertos:

1. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{a}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{\mathbf{a} + \mathbf{u}_1, \mathbf{a} + \mathbf{u}_2, \mathbf{a} + \mathbf{u}_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.
3. Si $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$, entonces $r < n$.
4. El subespacio vectorial $\{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3.
5. La variedad lineal de $\mathbb{R}^3$ generada por el conjunto $\{(1, 2, 1), (2, 2, 1)\}$ es
$$\{(2x, 2x + 2y, x + y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$
6. Si F, G son variedades lineales de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces
$$F \subset G \Longleftrightarrow \dim(F) \leq \dim(G).$$
7. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces no pueden existir cuatro vectores linealmente independientes en la variedad lineal $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

Ejercicio 3.4 Hallar α y α' para que los vectores $\mathbf{a} = (-1, 5, 4)$ y $\mathbf{b} = (\alpha, -2, -2)$ generen el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que los vectores $\mathbf{c} = (\alpha', 3, 2)$ y $\mathbf{d} = (5, 1, 0)$.

Ejercicio 3.5 Determinar α para que los vectores

$$\mathbf{a} = (\alpha, 8, 4), \ \mathbf{b} = (-1, 2, 0), \ \mathbf{c} = (0, 1, 2)$$

satisfagan la condición: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

Ejercicio 3.6 Hallar α y α' para que el vector $\mathbf{a} = (1, 4, \alpha, \alpha')$ pertenezca al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, -1, 2)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 1)$.

Ejercicio 3.7 En $\mathbb{Q}^3$ consideremos los siguientes subconjuntos:

$$A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}, \quad B = \{(2, 3, 2), (1, 0, 1)\}.$$

Comprobar que $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.

Ejercicio 3.8 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores

$$\mathbf{a} = (3, 2, \alpha, 5),\ \mathbf{b} = (2, -3, 5, \alpha),\ \mathbf{c} = (0, 13, \alpha', 7)$$

Hallar α y α' para que la dimensión de la variedad lineal generada por dichos vectores sea 2.

Ejercicio 3.9 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 3 y consideremos los vectores de V : $\mathbf{a} = (\alpha, 1, -2), \mathbf{b} = (1, \alpha, 2), \mathbf{c} = (2\alpha, 1, 0)$. Se pide:

1. ¿Para qué valores de α constituyen una base de V?
2. ¿Existe algún valor de α para el cual $\dim\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = 1$?.
3. Estudiar, en función de α, los distintos valores que puede tener $\dim\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$.

2. Coordenadas

Ejercicio 3.10 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base de V. Se consideran las variedades lineales L_1, L_2, L_3, L_4 de V engendradas por los vectores que se indican:

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 6\mathbf{v} + 7\mathbf{w}\rangle \\ L_2 &= \langle 4\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w}, 6\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}\rangle \\ L_3 &= \langle 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 5\mathbf{w}, \mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}\rangle \\ L_4 &= \langle 5\mathbf{u} + 4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}, 8\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w}\rangle \end{aligned}$$

Hallar la dimensión de cada una de ellas y una base contenida en el sistema de generadores dado.

Ejercicio 3.11 Se pide:

1. Determinar el subconjunto F de $\mathbb{R}^3$ caracterizado por la siguiente condición:
$$(x, y, z) \in F \Longleftrightarrow \text{la matriz} \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \text{conmuta con} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Demostrar que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, hallar una base de F y completarla hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.12 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base de V. Se consideran las variedades lineales de V engendradas por los vectores que se indican:

$$L_1 = \langle 4\mathbf{t} - 5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w}, 2\mathbf{t} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w}, 6\mathbf{t} - 3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}, 4\mathbf{t} - \mathbf{u} + 5\mathbf{v} + 6\mathbf{w}\rangle$$

$$L_2 = \langle \mathbf{t} + 2\mathbf{u} - 6\mathbf{v} - 3\mathbf{w}, -\mathbf{t} - 4\mathbf{v} - 5\mathbf{w}, 3\mathbf{t} + 4\mathbf{u} - 8\mathbf{v} - \mathbf{w}, 2\mathbf{t} + \mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 6\mathbf{w}\rangle$$

Se pide:

1. Hallar la dimensión de cada una de ellas y una base contenida en el sistema de generadores dado.
2. Expresar los restantes vectores que generan la variedad, como combinación lineal de los vectores de la base obtenida.

Ejercicio 3.13 Encontrar un sistema de ecuaciones implícitas independientes para las siguientes variedades lineales.

1. $L = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 2)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
2. $L = \langle (1, 1, 1), (2, 2, -1), (0, 0, 3)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
3. $L = \langle (1, 0, -2), (-2, 0, 4)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
4. $L = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.
5. $L = \langle (0, 2, 0, 3), (1, 1, 1, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.
6. $L = \langle (0, 1, -1, 3), (0, -2, 2, -6)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.14 Encontrar una base de cada una de las siguientes variedades lineales de $\mathbb{R}^4$.

1. $L \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

2. $L \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \end{array} \right.$

3. $L \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

4. $L \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

Ejercicio 3.15 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ dos bases de V relacionadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{u}'_1 & = & \mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_2 & - & 3\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}'_2 & = & & & \mathbf{u}_2 & + & 2\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}'_3 & = & & & & & \mathbf{u}_3 \end{array} \right.$$

Sea L la variedad lineal de V dada por:

1. Sus generadores: $2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\ ,\ \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

2. Sus ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

3. Sus generadores: $3\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2\ ,\ \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_3$.

4. Sus ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}' : 3x' - y' + 2z' = 0$

Hallar, en cada caso, un sistema de ecuaciones implícitas de L respecto de la otra base.

Sección 3. Intersección y suma de variedades lineales.

Ejercicio 3.16 Sea V un K–espacio vectorial y F, G dos variedades lineales de V, distintas de V. Probar que el conjunto $F \cup G$ es distinto de V.

Ejercicio 3.17 Sea V un K–espacio vectorial y F, G dos variedades lineales de V. Probar que son equivalentes las condiciones siguientes:

1. $F \cup G$ es una variedad lineal de V.

2. $F \subset G$ o bien $G \subset F$.

¿Puede ser V igual a la unión de dos variedades lineales distintas de V?.

Ejercicio 3.18 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión finita y sean A, B dos conjuntos de vectores linealmente independientes de V. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $A \cup B$ es un conjunto linealmente independiente.

2. $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

Ejercicio 3.19 Poner ejemplos que prueben que si H y G son subconjuntos del K–espacio vectorial V de dimensión finita, entonces:

1. $\langle H \cup G \rangle \neq \langle H \rangle \cup \langle G \rangle$

2. $\langle H \rangle \cap \langle G \rangle \neq \langle H \cap G \rangle$.

Ejercicio 3.20 Sea V un K–espacio vectorial. Probar que si la dimensión de la suma de dos variedades de V es una unidad mayor que la dimensión de su intersección entonces la suma coincide con una de ellas y la intersección con la otra.

Ejercicio 3.21 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. En cada uno de los casos siguientes, se consideran las variedades lineales L_1 y L_2 engendradas por los vectores cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ se dan:

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1 & = & \langle (1,2,0,1),(1,1,1,0)\rangle \\ L_2 & = & \langle (1,0,1,0),(1,3,0,0)\rangle \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1 & = & \langle (1,2,1,-2),(2,3,1,0),(1,2,2,-3)\rangle \\ L_2 & = & \langle (1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,3,0,-4)\rangle \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1 & = & \langle (1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\rangle \\ L_2 & = & \langle (1,0,1,0),(0,2,1,1),(1,2,1,2)\rangle \end{array}\right.$$

Hallar la dimensión y una base de L_1+L_2 y $L_1\cap L_2$.

Ejercicio 3.22 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea L la variedad lineal de V expresada, respecto de la base $\mathcal{B}$, como sigue:

$$L=\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. Hallar la dimensión y una base $\mathcal{C}$ de la variedad L.
2. Completar $\mathcal{C}$ a una base de V.
3. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de una variedad L' complementaria de L.

Ejercicio 3.23 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V. Sean L_1 y L_2 las variedades lineales de V expresadas, respecto de la base $\mathcal{B}$, como sigue:

$$\begin{array}{lcl} L_1 & = & L((1,-1,2,1),(0,1,-1,3),(2,0,1,-1)) \\ L_2 & = & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Se pide:

1. Calcular la dimensión y una base de $L_1,\ L_2,\ L_1+L_2$ y $L_1\cap L_2$.
2. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $L_1,\ L_1+L_2$ y $L_1\cap L_2$.

Ejercicio 3.24 En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideramos los subconjuntos siguientes:

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y-z=0\}$$

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0, x+z=0\}$$

Probar que:

1. G y H son variedades lineales de $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathbb{R}^3=G\oplus H$.

Sección 4. Espacio producto.

Ejercicio 3.25 Consideremos el espacio producto $U\times V$, donde U y V son k-espacios vectoriales de bases respectivas $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1\}$. Determinar si el conjunto

$$\{(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1),(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1),(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1)\}$$

es una base de $U\times V$.

Ejercicio 3.26 Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, y consideremos el espacio producto $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$. Determinar cuáles de los siguientes vectores de $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ pertenecen a la variedad lineal generada por $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, 1\right)$ y $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, 2\right)$.

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, 0\right)$.
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, 1\right)$.

Ejercicio 3.27 Sean V_1 y V_2 dos k-espacios vectoriales, sea L_1 una variedad lineal de V_1 de dimensión d_1, y L_2 una variedad lineal de V_2 de dimensión d_2. En el espacio producto $V_1 \times V_2$, se define el subconjunto

$$L_1 \times L_2 = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2);\ \mathbf{v}_1 \in L_1,\ \mathbf{v}_2 \in L_2\}.$$

Demostrar que $L_1 \times L_2$ es una variedad lineal de $V_1 \times V_2$, y calcular su dimensión.

Ejercicio 3.28 Dar un ejemplo de una variedad lineal L, en un espacio producto $U \times V$, que no sea de la forma $L_1 \times L_2$ descrita en el Ejercicio 3.27.

Sección 5. Espacio cociente.

Ejercicio 3.29 Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sea L la variedad lineal definida por

$$L \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

1. Dar una base del espacio cociente V/L.
2. Determinar si los vectores $(2,1,3) + L$ y $(0,-1,1) + L$ son linealmente independientes en V/L.
3. Calcular una base de V/L que contenga al vector $(2,1,3) + L$.

Ejercicio 3.30 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y L_1, L_2 las variedades lineales de V definidas por:

$$L_1 \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \equiv x_1 - x_4 = 0$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ los vectores cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son $(0,0,0,0,1)$ y $(2,-1,-1,2,-1)$, respectivamente.

1. Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ¿son linealmente independientes en el cociente L_2/L_1?.
2. Calcular una base de L_2/L_1 que contenga a $\mathbf{x} + L_1$.
3. Calcular las coordenadas de $(1,1,1,1,1) + L_1$ respecto de la base anteriormente considerada.

Ejercicio 3.31 Sea V un k-espacio vectorial de dimensión p, L un subespacio vectorial de V de dimensión q y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vectores de V. Demostrar que son equivalentes:

1. $\{\mathbf{v}_1 + L, \ldots, \mathbf{v}_n + L\}$ es un conjunto linealmente independiente de V/L.
2. Existe una base $\mathcal{B}$ de L y unos vectores $\mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p-q} \in V$ tales que el conjunto:

$$\mathcal{B} \cup \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p-q}\}$$

es una base de V.

Ejercicio 3.32 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean L_1 y L_2 dos variedades lineales verificando $L_1 + L_2 = V$. Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base de L_1. Probar que son equivalentes:

1. $L_1 \oplus L_2 = V$.
2. $\{\mathbf{v}_1 + L_2, \ldots, \mathbf{v}_r + L_2\}$ es base de V/L_2.