Tema 4. Aplicaciones lineales.

Sección 1. Definición y expresión matricial.

Ejercicio 4.1 Dadas las aplicaciones siguientes:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x - y, x + y, -x + y)$.
2. $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, y, z^3)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (3x - 5y, 4y - x)$.
4. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = 2x + 4$.
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (z, x + y + z, 2y)$.
6. $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x, y, z) = (3x + z, x + 3z)$.
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x + y, 1)$.
8. $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y, z) = (y, 0, 2y - z)$.
9. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x + y + z)$.
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $f(x, y) = 3x - 2iy$ (considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).

Se pide:

1. Determinar cuáles son lineales.
2. Estudiar si dichas aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
3. En las aplicaciones lineales obtenidas, hallar el núcleo y la imagen, así como la matriz asociada respecto de las bases canónicas correspondientes. Comprobar en cada caso que
$$\dim(\text{espacio de partida}) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ejercicio 4.2 Se consideran los $\mathbb{Q}$–espacios vectoriales $\mathbb{Q}^2$ y $\mathbb{Q}^3$ y el homomorfismo $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ de matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas de $\mathbb{Q}^3$ y $\mathbb{Q}^2$, respectivamente. Se pide:

1. Hallar la imagen por f de un vector arbitrario (x, y) de $\mathbb{Q}^2$ por f.
2. Hallar $f(1, 2)$, $f(-3, 1)$, $f(2, -5)$.
3. Hallar $f^{-1}(5, 3, 3)$, $f^{-1}(1, 1, -1)$, $f^{-1}(0, 0, 1)$.
4. Probar que f no es sobreyectivo y hallar $\mathrm{Im}(f)$.
5. Probar que f es inyectivo.

Ejercicio 4.3 Se consideran las aplicaciones lineales $f, f' : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ y $g, g' : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ cuyas matrices, respecto de las bases canónicas, son :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar las matrices, respecto de las bases canónicas, de las aplicaciones lineales:

$$(f+f')\circ g\ ;\ (f+f')\circ g'\ ;\ f\circ(g+g')\ ;\ f'\circ(g+g')\ ;\ g\circ(f+f')$$

$$g'\circ(f+f')\ ;\ (g+g')\circ f'\ ;\ (g+g')\circ(f+f')\ ;\ (f+f')\circ(g+g').$$

2. Estudiar la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las anteriores aplicaciones lineales.

Ejercicio 4.4 Se considera el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M}(2,2)$ de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathcal{M}(2,2) & \to & \mathcal{M}(2,2) \\ A & \to & A^t - A \end{array}$$

1. Probar que f es un homomorfismo.

2. Determinar las ecuaciones de f respecto de la base canónica de $\mathcal{M}(2,2)$.

Ejercicio 4.5 Se considera el espacio vectorial $\mathcal{M}(2,2)$ de las matrices 2×2 con coeficientes racionales y en él la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sea $f:\mathcal{M}(2,2)\to\mathcal{M}(2,2)$ definida así: $f(X) = A\cdot X$ para cada $X\in\mathcal{M}(2,2)$. Se pide:

1. Probar que f es un endomorfismo de espacios vectoriales.

2. Hallar las ecuaciones de f respecto de la base canónica de $\mathcal{M}(2,2)$.

3. ¿Es f un automorfismo?.

Ejercicio 4.6 Sea $V=\mathbb{R}[X]$. Para cada $a\in\mathbb{R}$ definimos la aplicación $\varphi_a : V\to V$ por:

$$\varphi_a(P(X)) = P(X-a)$$

(es decir, φ_a sustituye X por $X-a$ en el polinomio P).

1. Demostrar que φ_a es un automorfismo de V, para cada $a\in\mathbb{R}$.

2. Calcular:
$$\varphi_2(X^3-X^2+X+1)\ ;\ \varphi_2^{-1}(X^3-X^2+X+2)$$

3. Demostrar que $V(n)$ es un subespacio de V invariante por φ_a, es decir, $\varphi_a(V(n))\subset V(n)$ para cada $a\in\mathbb{R}$ y para todo $n>0$.

   Nota: $V(n)$ es el subespacio vectorial de V formado por los polinomios de grado menor o igual a n.

Ejercicio 4.7 Sea V un K–espacio vectorial de dimensión 3, $f\in\operatorname{End}(V)$ tal que $f^3=0$ y $f^2\neq 0$. Consideremos un vector $\mathbf{a}\in V$ tal que $f^2(\mathbf{a})\neq\mathbf{0}$.

1. Probar que $\mathcal{B}=\{\mathbf{a}, f(\mathbf{a}), f^2(\mathbf{a})\}$ es una base de V.

2. Hallar la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 4.8 Sea $f:V\to V'$ un homomorfismo entre los K–espacios vectoriales V y V', y sea $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ una base de V. Probar que:

1. f es inyectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

2. f es sobreyectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)\}$ es un sistema de generadores de V'.

3. f es biyectivo $\Longleftrightarrow \{f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de V'.

Ejercicio 4.9 Sean V y V' dos $K-$espacios vectoriales de dimensiones respectivas n y m. Consideremos el conjunto $\operatorname{Hom}(V,V')$. Sobre $\operatorname{Hom}(V,V')$ se definen las siguientes operaciones:

1. adición
$$\forall f, g \in \mathrm{Hom}(V, V'),\ (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

2. multiplicación por un escalar
$$\forall \lambda \in K,\ (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big).$$

Se pide:

1. Probar que $\mathrm{Hom}(V, V')$, con dichas operaciones, es un espacio vectorial sobre K.

2. Probar que los espacios vectoriales $\mathrm{Hom}(V, V')$ y $\mathcal{M}(m \times n, K)$ son isomorfos y deducir de ello que $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, V')\big) = mn$.

Ejercicio 4.10 Con las notaciones del ejercicio anterior, sea $V' = K$. Es decir, consideremos el $K-$espacio vectorial $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ (llamado espacio vectorial dual del espacio vectorial V y cuyos elementos se llaman *formas lineales* y se denotarán usando un asterisco, por ejemplo $\mathbf{x}^*$). Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V. Consideremos las aplicaciones
$$\mathbf{u}_i^* : V \longrightarrow K, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
definidas por
$$\forall \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}) = x_i,$$
donde x_i es la coordenada $i-$ésima del vector $\mathbf{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Se pide:

1. Probar que $\mathbf{u}_i^*,\ (i = 1, \ldots, n)$ son formas lineales sobre V.

2. Probar que el conjunto $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*\}$ es una base de V^* cuyos elementos verifican que
$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

(La base $\mathcal{B}^*$ de V^* por verificar las condiciones (1) recibe el nombre de *base dual de la base $\mathcal{B}$*.)

Sección 2. Núcleo e imagen.

Ejercicio 4.11 Sean $V = \mathcal{M}(2, 2)$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ la base canónica de V y $f : V \to V$ el endomorfismo definido por la relación $f(X) = A \cdot X - X \cdot A$, donde A es la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{B}$.

2. Probar que $V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

3. Usando el apartado anterior, probar que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Deducir de aquí que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^n)$, para cada $n > 0$.

Ejercicio 4.12 Sea $V = \mathbb{R}[X]$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios en la indeterminada X con coeficientes reales. Consideremos la aplicación $D : V \to V$ definida así:
$$D(P(X)) = \text{derivada de } P(X) \text{ respecto de } X$$

Se pide:

1. Probar que D es un endomorfismo de V.

2. Hallar $\mathrm{Ker}(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$.

3. Averiguar si D es inyectiva o sobreyectiva.

Ejercicio 4.13 Sea $V(3)$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}[X]$ cuyos elementos son los polinomios de grado menor o igual que 3. Dados los polinomios $Q_1(x) = x^4 - 1$ y $Q_2(x) = x^4 - x$, se considera la aplicación $\varphi : V(3) \to V(3)$ definida así:

$$\varphi(P(x)) = \text{resto de la division del polinomio } Q_1(x) \cdot P(x) \text{ por el polinomio } Q_2(x)$$

Probar que φ es un endomorfismo de $V(3)$ y determinar $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Ejercicio 4.14 Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre K y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea f la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$, definida por:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}_1 & - & \mathbf{u}_2 & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & 2\mathbf{u}_1 & & & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & -4\mathbf{u}_1 & - & 2\mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & & \\ f(\mathbf{u}_4) & = & -\mathbf{u}_1 & - & 3\mathbf{u}_2 & + & 4\mathbf{u}_3 & + & 5\mathbf{u}_4 \end{array}$$

Se sabe además que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 30 & 20 \\ 2 & -2 & 10 & 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Calcular una base y un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $\ker(f)$ e $\mathrm{Img}(f)$.

2. Probar que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Img}(f)$.

3. Usando como dato la igualdad (1), resolver las siguientes cuestiones:

   a) Demostrar que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + \ker(f), -2\mathbf{u}_3 + 3\mathbf{u}_4 + \ker(f)\}$, es una base de $V/\ker(f)$.

   b) Calcular las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}'$, de la clase:

   $$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 + \ker(f)$$

   c) Calcular las ecuaciones, respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de la aplicación lineal canónica:

   $$p : V \longrightarrow V/\ker(f)$$

Ejercicio 4.15 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea f el endomorfismo de V dado por:

$$f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = -f(\mathbf{u}_3) = (1/2)\mathbf{u}_1 + (1/2)\mathbf{u}_2,\ f(\mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$$

1. Hallar una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, \mathbf{u'}_3, \mathbf{u'}_4\}$ de V tal que

   $$\mathrm{Im}(f) = L(\mathbf{u'}_1) \text{ y } \mathrm{Ker}(f) = L(\mathbf{u'}_2, \mathbf{u'}_3, \mathbf{u'}_4)$$

2. Sea $\mathcal{B}''$ una base arbitraria de V y A la matriz de f respecto de $\mathcal{B}''$. Demostrar que $A^2 = A$.

Ejercicio 4.16 Sean V un K–espacio vectorial, L_1 y L_2 subespacios de V tales que $V = L_1 \oplus L_2$. Sean $f_1 \in \mathrm{End}(L_1)$, $f_2 \in \mathrm{End}(L_2)$, y consideremos la aplicación $f : V \to V$ definida por $f(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}_1) + f_2(\mathbf{v}_2)$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{v}_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 \in L_2$. Probar que:

1. $f \in \mathrm{End}(V)$.

2. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2)$.

3. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_1) \oplus \mathrm{Ker}(f_2)$.

Ejercicio 4.17 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión n y sean $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Consideremos la aplicación $\varphi : V \to V \times V$ definida por: $\varphi(\mathbf{v}) = (f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v}))$. Se pide:

1. Demostrar que φ es lineal.

2. ¿Puede ser φ inyectiva? ¿y sobreyectiva?.
3. Sea $V = \mathbb{Q}^2$, $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{Q}^2$, $\mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{Q}^4 = \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2$. Si f y g son endomorfismos de V tales que:
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$
Hallar $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ y estudiar para qué valores de a, b es inyectiva la aplicación φ.

Sección 3. Imagen e imagen inversa de variedades lineales.

Ejercicio 4.18 Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 3 y V' un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 4. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\mathbf{u}'_3, \mathbf{u}'_4\}$ una base de V'. Consideremos la variedad lineal L de V cuyas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ son:
$$L \equiv \{x + z = 0\}.$$
Consideremos además la variedad L' de V' dada por:
$$L' = \langle \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}'_4,\ 3\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + 2\mathbf{u}'_3 + 2\mathbf{u}'_4,\ 2\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}'_4\rangle.$$
Por último, sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal determinada por los siguientes datos:
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_4 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_2 + 2\mathbf{u}'_3 - \mathbf{u}'_4 \end{array}\right.$$
Calcular una base y unas ecuaciones implícitas independientes de $f(L)$ y de $f^{-1}(L')$.

Ejercicio 4.19 Sea V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Consideramos las variedades L y L' de V, y el endomorfismo f definidos por:
$$L \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ 2x - y - t & = & 0 \end{array}\right. \qquad L' = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4\rangle$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{u}_4) & = & 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 + 10\mathbf{u}_4 \end{array}\right.$$
Se pide:

1. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im}(f)$ respecto de $\mathcal{B}$ y una base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de las siguientes variedades lineales: L, L', $L \cap L'$ y $L + L'$.
3. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de las variedades $f(L)$, $f(L + L')$ y $f(L \cap L')$.
4. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ de la variedad $f^{-1}(L)$.

Sección 4. Cambio de base.

Ejercicio 4.20 Sean V y V' dos $\mathbb{Q}$–espacios vectoriales de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dos bases de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ y $\mathcal{C}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ dos bases de V'. Sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal dada por:
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2 - 2\mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & 2\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Las relaciones entre las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y las bases $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ vienen dadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{v}_1 & = & \mathbf{u}_1 & & & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & 2\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 & = & -\mathbf{u}_1 & & & + & 2\mathbf{u}_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{v}'_1 & = & -\mathbf{u}'_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{v}'_2 & = & 2\mathbf{u}'_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & 2\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{v}'_3 & = & & & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

Ejercicio 4.21 Sean V y V' dos $\mathbb{C}$–espacios vectoriales de dimensiones 2 y 3, respectivamente, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dos bases de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ y $\mathcal{C}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ dos bases de V'. Sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 & + & 2\mathbf{u}'_2 & + & 3\mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u}'_1 & + & 2\mathbf{u}'_2 & - & \mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Las relaciones entre las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y las bases $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ vienen dadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \mathbf{v}_1 & = & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 & = & & & \mathbf{u}_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{v}'_1 & = & \mathbf{u}'_1 & + & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{v}'_2 & = & & & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{v}'_3 & = & & & & & \mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

Ejercicio 4.22 Sean V un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V. Sea $F : V \to V$ el endomorfismo de V dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} F(\mathbf{u}_1) & = & 3\mathbf{u}_1 & & & - & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\ F(\mathbf{u}_2) & = & 15\mathbf{u}_1 & - & 5\mathbf{u}_2 & + & 13\mathbf{u}_3 & + & 6\mathbf{u}_4 \\ F(\mathbf{u}_3) & = & 21\mathbf{u}_1 & - & 5\mathbf{u}_2 & + & 3\mathbf{u}_3 & + & 8\mathbf{u}_4 \\ F(\mathbf{u}_4) & = & -12\mathbf{u}_1 & + & 3\mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 & & \end{array}\right.$$

Calcular las ecuaciones de F respecto de la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\mathbf{u}'_3, \mathbf{u}'_4\}$, siendo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{u}'_1 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}'_2 & = & 2\mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_3 & + & 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}'_3 & = & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & - & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}'_4 & = & -\mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_3 & + & 3\mathbf{u}_4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.23 Sean V y W dos K–espacios vectoriales de dimensiones respectivas m y n, y $f : V \to W$ un homomorfismo.

1. Sean $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p \in \mathrm{Im}(f)$ linealmente independientes, y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ tales que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ ($i = 1, \ldots, p$). Sea $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   a) Probar que $H = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ es linealmente independiente.
   b) Probar que si $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$, entonces H es una base de V.
2. Probar que existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de V y W respectivamente tales que la matriz de f respecto de dichas bases sea de la forma:
$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \\ \mathbf{0}_{(m-p)\times p} & \mathbf{0}_{(m-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}$$
   en donde $p = \dim \mathrm{Img}(f)$ e $I, \mathbf{0}$ son las matrices identidad y nula, respectivamente, de los órdenes que se indican.

Sección 5. Factorización canónica.

Ejercicio 4.24 Sean V y V' dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V'. Sea $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación lineal dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 & + & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{u}'_1 & + & 2\mathbf{u}'_2 & - & 2\mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_3) & = & 2\mathbf{u}'_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & 3\mathbf{u}'_3 \end{array}\right.$$

Hallar la factorización canónica de f, dando las matrices de los homomorfismos correspondientes.

Ejercicio 4.25 Sean V y V' dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensiones 2 y 3, respectivamente, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de V, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V'. Sea $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación lineal dada por:

$$\left\{ \begin{array}{lcrcrcr} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}'_1 & & & + & \mathbf{u}'_3 \\ f(\mathbf{u}_2) & = & 2\mathbf{u}'_1 & - & \mathbf{u}'_2 & + & \mathbf{u}'_3 \end{array} \right.$$

Hallar la factorización canónica de f, dando las matrices de los homomorfismos correspondientes.