Tema 5. Endomorfismos.

Sección 1. Endomorfismos diagonalizables.

Ejercicio 5.1 Dadas las matrices complejas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 1 & 12 \\ -13 & 0 & 12 \\ -17 & 1 & 15 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Hallar los autovalores y los subespacios de autovectores correspondientes a dichas matrices y, en el caso que proceda, calcular una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de dicha matriz, la correspondiente matriz diagonal D y una matriz de paso a la forma diagonal.
2. Calcular C^n para todo entero positivo n.

Ejercicio 5.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.
2. Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $D = P^{-1}AP$.
3. Demostrar que A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5.3 Estudiar para qué valores de a y b es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En los casos afirmativos, hallar una forma diagonal D y obtener una matriz invertible real $P \in \mathcal{M}(3,3)$ tal que $P^{-1}AP = D$.

Ejercicio 5.4 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Comprobar que es diagonalizable y calcular una matriz diagonal J semejante a la matriz A.
2. Calcular una base de autovectores de f.
3. Calcular una matriz invertible P, tal que $J = P^{-1}AP$.

Ejercicio 5.5 Sea V un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión 4, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de matriz A con respecto a la base $\mathcal{B}$. Probar que f es diagonalizable y calcular, en el caso en que A sea una de las matrices siguientes, una forma diagonal D de A así como una base $\mathcal{C}$ de V respecto de la cual $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = D$.

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d)\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.6 Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

a) Los autovalores de f son 1 y -1.

b) $G = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$, es un subespacio propio de f.

c) $f(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

Se pide:

1. Probar que f es diagonalizable.
2. Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calcular $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Calcular A^n para todo entero positivo n.

Ejercicio 5.7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{pmatrix},$$

1. Calcular los valores de a para los cuales la matriz A es diagonalizable.
2. Para $a = 0$, calcular una forma diagonal D de A así como una matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 5.8 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(5 \times 5, \mathbb{R}),$$

donde

$$|\lambda I - A| = (\lambda - a)^3(\lambda + a)^2,$$

se pide:

1. Calcular los valores de a y b para los cuales la matriz A es diagonalizable.
2. Calcular, en cada caso, una forma diagonal de A así como una matriz de paso Q, tal que $D = Q^{-1}AQ$.

Ejercicio 5.9 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V y f un endomorfismo de V definido por

$$\begin{array}{rcccl} f(\mathbf{u}_1) & = & f(\mathbf{u}_n) & = & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_n \\ f(\mathbf{u}_i) & = & \mathbf{u}_i & \text{si} & 1 < i < n \end{array}$$

1. Demostrar que los autovalores de f son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$.
2. Averiguar si f es diagonalizable y calcular la forma canónica de f, una base canónica y una matriz de paso.
3. Descomponer V como suma directa de tres subespacios invariantes.

Ejercicio 5.10 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V y f un endomorfismo de V definido por

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{u}_n \\ f(\mathbf{u}_n) & = & \mathbf{u}_1 \\ f(\mathbf{u}_i) & = & \mathbf{u}_i \quad \text{si} \quad 1 < i < n \end{array}$$

1. Demostrar que los autovalores de f son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$.

2. Probar que f es diagonalizable y calcular su forma diagonal, así como una base que diagonalice f y la correspondiente matriz de paso.

Ejercicio 5.11 En los apartados siguientes $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ y es diagonalizable.

1. Si r un entero positivo, probar que A^r es también diagonalizable. ¿Cuáles son sus autovalores?

2. Si A es invertible, probar que A^{-1} es también diagonalizable. ¿Cuáles son sus autovalores?

Ejercicio 5.12 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f, g \in \mathrm{End}(V)$ cuyas matrices respecto de cierta base $\mathcal{B}'$ de V son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sean L_1, L_2 y L_3 variedades lineales de V cuyas ecuaciones respecto de $\mathcal{B}'$ son:

$$L_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_3 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Probar que $V = L_1 \oplus L_2$ y que $V = L_1 \oplus L_3$.

2. Probar que L_1 y L_2 son invariantes por f y que L_1 y L_3 son invariantes por g.

3. Calcular los autovalores de f y g y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a dichos autovalores y decidir si f y/o g son diagonalizables.

4. En el caso de que g sea diagonalizable, calcular una base de autovectores de g y una matriz P tal que $D = P^{-1}BP$ donde D es diagonal.

Ejercicio 5.13 Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n, $f, g \in \mathrm{End}(V)$ y $f \times g$ un endomorfismo de $V \times V$ definido por

$$(f \times g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})).$$

Se pide:

1. Probar que si $\mathbf{u} \in V$ es un autovector para f, entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ es un autovector para $f \times g$.

2. Probar que si f y g son diagonalizables, entonces $f \times g$ también lo es.

Ejercicio 5.14 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y f un endomorfismo de V tal que $f^2 = f$. Se pide:

1. Probar que los únicos autovalores de f son 0 y 1.

2. Probar que el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $V(1) = \mathrm{img}(f)$.

3. Probar que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{img}(f)$ y deducir de ello que f es diagonalizable.

Sección 2. Formas canónicas de Jordan

Ejercicio 5.15 Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar la forma canónica de Jordan J de f y obtener una base canónica para f y una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

2. Calcular A^{2007}.

Ejercicio 5.16 Sea V un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión 4 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de matriz A con respecto a la base $\mathcal{B}$. Calcular la forma canónica y una base canónica para f en el caso en que A sea una de las matrices siguientes:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ -7 & -17 & -3 & -11 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ -8 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 10 & 3 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad f) \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2+i \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h) \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES:
Formas canónicas

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.17 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es una de las siguientes:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad d)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular, en cada caso:

1. La forma canónica J de f.
2. Una base canónica de V para f y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

SOLUCIONES.
Formas canónicas

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.18 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^5$$

1. Calcular la forma canónica J de f.
2. Calcular una base canónica para f y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

Ejercicio 5.19 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ una base de V y f el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^5$$

1. Calcular la forma canónica J de f.

2. Calcular una base canónica para f y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

Ejercicio 5.20 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V, $f \in \mathrm{End}(V)$ cuya matriz respecto de B es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \lambda^5.$$

Sean L_1 , L_2 las variedades dadas por

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 = L((0,0,1,2,-2),(0,0,-1,0,2))$$

Se pide:

1. Calcular una base y unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Img}(f)$.
2. Sean $\mathbf{x} = (-1,1,0,-1,1) + \mathrm{Ker}(f)$, $\mathbf{y} = (0,1,0,0,1) + \mathrm{Ker}(f)$ dos elementos de $V/\mathrm{Ker}(f)$. ¿Son $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ linealmente independientes módulo $\mathrm{Ker}(f)$? Hallar una base de $V/\mathrm{Ker}(f)$ que contenga a $\mathbf{x}$.
3. Calcular la forma canónica de f y una base canónica para f.
4. Calcular una base y unas ecuaciones implícitas de $f(L_1)$, $f^{-1}(L_2)$, $L_1 \cap L_2$, y $L_1 + L_2$.

Ejercicio 5.21 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5\}$ una base de V , $f : V \to V$ el endomorfismo de V cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sean L_1 , L_2 las variedades lineales de V dadas (respecto de $\mathcal{B}$) por:

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

y $L_2 = L((-1,2,0,-1,0),(0,1,1,-1,1),(1,0,2,-1,0))$ Se pide:

1. Calcular la dimensión y una base de $\mathrm{Img}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Dar unas ecuaciones de los homomorfismos que intervienen en la factorización canónica de f.
3. Calcular la dimensión y una base de $f(L_1)$, $f^{-1}(L_2)$, $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\omega(L_1)$.
4. Calcular la forma canónica J de f y una base canónica, dando una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.