- EJERCICIOS DE AMPLIACION DE GEOMETRIA -

Curso 04-05

Nota previa: Los primeros 18 ejercicios constituyen un repaso de los conceptos de la asignatura GEOMETRIA, que se utilizarán profusamente a lo largo del curso y son, por tanto, indispensables.

Ejercicio 1.– Sean $P_1, \ldots, P_m$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)$. Probar que son linealmente dependientes si y sólo existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que P_i depende linealmente de $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m$.

Ejercicio 2.– Estudiar la posición relativa de dos variedades lineales de un espacio proyectivo de dimensión 3.

Ejercicio 3.– Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r que pasa por los puntos $(1 : -1 : 2)$ y $(2 : 1 : 1)$ de $\mathbb{P}_2(k)$. Hallar también el punto de intersección de r con la recta s de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por $r \cap s$.

Ejercicio 4.– Estudiar las posiciones relativas de tres rectas en un plano proyectivo.

Ejercicio 5.– Determinar las posiciones relativas de las siguientes ternas de rectas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & - & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ 3x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & - & x_1 & - & x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & + & 3x_1 & - & 3x_2 & = 0 \\ x_0 & & & + & 3x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & & & = 0 \\ x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ & & x_1 & + & x_2 & = 0 \end{array}.$$

Nota.- En los ejercicios siguientes se considerará el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(k)$.

Ejercicio 6.– Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos $(1 : 0 : -1 : 3)$, $(2 : 1 : -1 : 1)$ y $(1 : 1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 7.– Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por los puntos $(2 : 1 : 3 : 0)$ y $(0 : 1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 8.– Sean r y s dos rectas distintas. Probar que son equivalentes:

a) r y s se cruzan.

b) Si P_0, P_1, P_2, P_3 son puntos distintos con $P_0, P_1 \in r$, $P_2, P_3 \in s$, entonces $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 9.– Determinar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 5\lambda & + & \mu \\ x_1 & = & -2\lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 4\lambda & + & 2\mu \\ x_3 & = & 7\lambda & + & \mu \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 4\lambda & - & 5\mu \\ x_1 & = & \lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 2\lambda & + & \mu \\ x_3 & = & \lambda & & \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 5x_1 & + & 5x_2 & & & = 0 \\ 4x_0 & - & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array} \\ P+Q, \quad \text{con} \\ P = (7 : 5 : -2 : 0) \\ Q = (1 : 3 : 0 : -2) \end{array}$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ 4x_0 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ 10x_0 & - & x_1 & - & 9x_2 & & & = 0 \\ -3x_0 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{rcr} r = P + Q & , & s = R + S \\ P = (1 : 0 : 1 : 0) & , & Q = (1 : -1 : 0 : 0) \\ R = (0 : 1 : 0 : 1) & , & S = (0 : 0 : 1 : -1) \end{array}$$

Ejercicio 10.– Determinar las posiciones relativas de la recta r y del plano H en cada uno de los casos siguientes:

$$\text{a)}\ r \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 2x_0 & - & 6x_1 & + & 14x_2 & & & = 0 \\ 4x_0 & - & 26x_1 & + & 14x_2 & + & 14x_3 & = 0 \end{array} \right. \qquad H \left\{ \begin{array}{c} \text{plano determinado por los puntos:} \\ (1 : -1 : 2 : 3), (4 : 5 : -1 : 2), (3 : 1 : 0 : 1) \end{array} \right.$$

$$\text{b)}\ r \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\lambda + 2\mu \ , \ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda - \mu \ , \ x_3 = \lambda + \mu \end{array} \right. \qquad H \left\{ \ 3x_0 + 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0. \right.$$

Ejercicio 11.– Sea r la recta que pasa por los puntos $(5 : 4 : 1 : 6)$ y $(1 : -1 : 2 : 3)$, y s la recta que pasa por los puntos $(4 : 5 : -1 : 2)$ y $(3 : 1 : 0 : 1)$. Se pide:

a) Probar que r y s se cruzan.

b) Probar que el punto $P = (1 : 1 : 1 : 1)$ no está ni en r ni en s.

c) Determinar las ecuaciones de la recta t que pasa por P y que sea coplanaria con r y s (separadamente).

d) ¿Tendría solución el apartado c) si $P \in r$ ó $P \in s$ ó $r \cap s \neq \emptyset$?

Nota: Aunque este ejercicio está enunciado con unos datos particulares, debe ser entendido en general, es decir, pruébese que, dados un punto P y dos rectas r y s que se cruzan en $\mathbb{P}_3$, hay una recta (única, si $P \notin r \cup s$) que se apoya en las tres variedades dadas.

Ejercicio 12.– Estudiar las posiciones relativas de dos planos de $\mathbb{P}_4(k)$, probando que dos planos se cortan en un punto si y sólo si no están contenidos en un mismo hiperplano.

Ejercicio 13.– Estudiar las posiciones relativas de una recta y plano en $\mathbb{P}_4(k)$.

Ejercicio 14.– Determinar las posiciones relativas de las siguientes variedades de $\mathbb{P}_4(k)$:

$$L \left\{ \begin{array}{rcl} x_0 - x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad M \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \mu \\ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda + \mu \end{array} \right.$$

$$N = (1 : 1 : 0 : 1 : 1)$$

Ejercicio 15.– Consideremos las rectas de $\mathbb{P}_3(k)$ siguientes:

$$t \left\{ \begin{array}{l} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad a \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$b \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \quad c \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{array} \right. \quad d \left\{ \begin{array}{l} 2x_0 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

Se pide:

a) Probar que por cada punto de t pasa una única recta r que se apoya en a y en c y una única recta s que se apoya en b y d.

b) Con la notación anterior, sea $P = (1 : 1 : 0 : 0)$, $A = r \cap a$, $C = r \cap c$, $B = s \cap b$, $D = s \cap d$. Calcular $Q = AB \cap CD$.

c) Dado cualquier otro punto de t, ¿se siguen cortando AB y CD? Razónese la respuesta.

Ejercicio 16.– Para las variedades afines que se dan se pide:

a) Hallar unas ecuaciones implícitas independientes de las mínimas variedades proyectivas que contienen a su imagen por φ.

b) Hallar, para cada una, un sistema de puntos l.i. que las generen, y que el mayor número de ellos esté en el infinito.

$$L_1 \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \end{array} \right. \qquad L_2 \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$L_3 \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 6. \end{array} \right.$$

Ejercicio 17.– En cada uno de los casos siguientes se da una variedad lineal proyectiva M_i generada por los puntos que se indican. Hallar un sistema de puntos en k^4, independientes, que generen $\varphi^{-1}(M_i)$ y unas ecuaciones implícitas independientes de esta variedad lineal afín:

$$\begin{array}{ll} M_1 & : (0 : 3 : 1 : 2 : 4), (0 : 2 : 1 : 1 : 1), (1 : 1 : 1 : -2 : 1) \\ M_2 & : (0 : -2 : 1 : 1 : 1), (1 : -1 : 2 : 0 : 1), (3 : 1 : 4 : -2 : 1), (0 : 1 : 1 : -2 : 1) \\ M_3 & : (0 : 1 : 2 : 1 : 1), (0 : 1 : 1 : 1 : 1). \end{array}$$

Ejercicio 18.– Con el mismo enunciado que el ejercicio anterior y las M_i dadas por sus ecuaciones implícitas:

$$M_1 \left\{ \begin{aligned} x_0 + 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 - 4x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad M_2 \left\{ \begin{aligned} x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_0 + x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$M_3 \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_1 &= 0 \\ x_0 + x_1 &= 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Fin de los ejercicios de repaso

Ejercicio 19.– En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_7(k)$ se consideran tres planos H_1, H_2 y H_3 tales que se cruzan dos a dos y no existe ningún hiperplano que contenga a los tres. Se pide:

a) Calcular $\dim((H_1 + H_2) \cap H_3)$.

b) Determinar el número de rectas que son secantes a los tres planos.

Ejercicio 20.– Sea L una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}_n(k)$ dada por las ecuaciones implícitas

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r0}x_0 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Probar que un hiperplano contiene a L si y sólo si tiene una ecuación de la forma:

$$\mu_1(a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + \mu_r(a_{r0}x_0 + \ldots + a_{rn}x_n) = 0$$

con $\mu_1, \ldots, \mu_r \in k$ no todos nulos.

Ejercicio 21.– Dado un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}_2(k)$ probar que $\{(1:2:0), (1:1:2), (1:2:1), (1:0:1)\}$ es otro sistema de referencia. Calcular una base normalizada asociada a este otro sistema.

Ejercicio 22.– Dados los siguientes sistemas de referencia en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{R} = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)\}$, $\mathcal{R}' = \{(2:1:0), (1:0:1), (0:2:1), (1:1:1)\}$, se pide:

a) Encontrar dos bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

b) Encontrar las ecuaciones del cambio de sistemas de referencia.

Ejercicio 23.– Se da el espacio proyectivo $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ y un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, U\}$ en él, respecto del cual se tomarán coordenadas.

a) Se da una recta r, un punto $P \notin r$ y un plano L tal que $P \notin L$. Se trata de hallar todas las rectas que pasen por P y sean secantes a r y a L. Discutir la existencia y el número de soluciones del problema según la posición de P, r y L.

b) Sea r la recta de ecuaciones implícitas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$P : (0:0:1:0:0)$ y L el plano que pasa por los puntos $P_0 : (1:-1:-2:0:0)$, $P_1 : (1:1:0:2:0)$ y $P_2 : (1:0:0:0:-1)$. Hallar todas las rectas que pasan por P y son secantes a L y a r.

c) Sea $U' : (0:-5:-4:-6:-1)$. Probar que $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2, U'\}$ es un sistema de referencia en L.

d) Sea r' la recta determinada por los puntos de coordenadas $(3:-1:2:5:4)$ y $(2:-1:3:4:4)$. Probar que r' es secante a L y calcular las coordenadas de $r' \cap L$ respecto de $\mathcal{R}'$.

e) Sea L' el plano determinado por r' y el punto de coordenadas $(-2:-5:-4:-6:1)$. Probar que $L\cap L'$ es una recta y hallar su ecuación respecto de $\mathcal{R}'$.

Ejercicio 24.– Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en el espacio proyectivo tridimensional real. Sea L un plano de ecuación $x_0+x_1=0$. Encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}_L$ de L. Expresar las coordenadas del punto $P=(1:-1:0:2)_{\mathcal{R}}\in L$ respecto de $\mathcal{R}_L$. Dado el punto $Q\in L$ de coordenadas respecto de $\mathcal{R}_L$ $(1:1:2)$, hallar sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}$.

Ejercicio 25.– En la situación del ejercicio anterior, sea L de ecuación $x_0=0$. Encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}_L$ de L de modo que un punto $P\in L$ coordenadas $(0:a:b:c)$ respecto de $\mathcal{R}$ tenga coordenadas $(a:b:c)$ respecto de $\mathcal{R}_L$.

Ejercicio 26.– En el plano proyectivo real se considera la homografía F que respecto de un sistema de referencia tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que para todo P, la recta $P+F(P)$ pasa por el punto $(1:-1:1)$.

b) Probar que para todo par de puntos P,Q las rectas $P+Q$ y $F(P)+F(Q)$ se cortan sobre la recta de ecuación $2x_0-x_1+2x_2=0$.

c) Sabiendo que $F(1:1:-1)=(0:1:-1)$, obtener $F(1:1:0)$ sin usar la matriz de F.

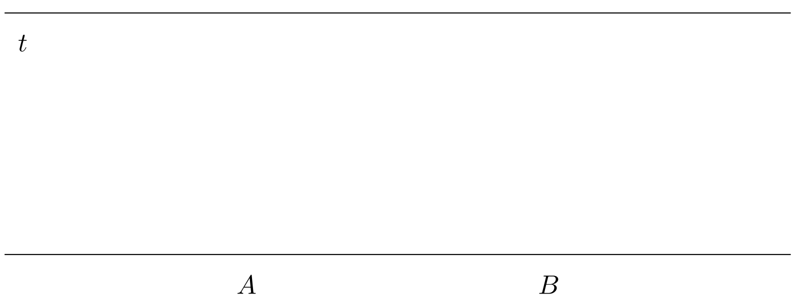
Ejercicio 27.– Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, P,Q puntos distintos de una recta r, de coordenadas $(a_0:\ldots:a_n)$, $(b_0:\ldots:b_n)$ respectivamente. Sea $R\in r$ un punto distinto de los anteriores: $R:(a_0+\alpha b_0:\ldots:a_n+\alpha b_n)$ con $\alpha\neq 0$. Demostrar que el cuarto armónico de P,Q,R es el punto $S:(a_0-\alpha b_0:\ldots:a_n-\alpha b_n)$.

Ejercicio 28.– Dado un cuadrivértice plano, probar que dos puntos diagonales cualesquiera separan armónicamente al par de puntos de intersección con la recta que determinan y los lados que pasan por el otro punto diagonal. Como consecuencia deducir que, dados tres puntos alineados distintos A,B,C, se puede construir, usando sólo una regla, un cuarto punto D tal que $|ABCD|=-1$.

Ejercicio 29.– Se considera la inmersión natural $\varphi:\mathbb{R}^n\hookrightarrow\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ del espacio afín real en el espacio proyectivo real. Se pide:

1. Sean $A,B,C\in\mathbb{R}^n$ tres puntos distintos dos a dos y alineados. Se recuerda que la razón simple (CBA) es el único escalar tal que $\vec{CA}=(CBA)\,\vec{CB}$. Probar que $(CBA)=|\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)D|$ donde D es el punto del infinito de la recta afín $A+B$.

2. Consideremos el dibujo adjunto como una parte del plano afín real $\mathbb{R}^2$. Dar un procedimiento geométrico para calcular (usando sólo una regla no graduada) el punto medio del segmento AB. (*Utilizar la recta t, paralela a $A+B$*)



Ejercicio 30.– *Junio 02*

1. Dados los puntos A, B y C alineados, **justificar** un procedimiento geométrico, usando únicamente una regla no graduada, para calcular un punto D con $|ABCD|=2$. La respuesta no es únicamente un dibujo.

2. Dados cuatro planos H_1, H_2, H_3 y H_4 de $P_3(R)$ conteniendo una recta fija s, y dada otra recta r que se cruce con s, se llama razón doble de H_1, H_2, H_3, H_4 a

$$\big|(H_1 \cap r)(H_2 \cap r)(H_3 \cap r)(H_4 \cap r)\big|.$$

Sean

$$H_1 = \{x_3 = 0\}, \qquad H_2 = \{x_1 - x_3 = 0\}, \qquad H_3 = \{x_1 = 0\},$$

y r la recta de ecuaciones $\{x_0 = 0, \ \ x_1 + x_2 = 0\}$. Calcular el cuarto armónico de H_1, H_2, H_3.

EJERCICIO 31.– En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se considera un sistema de referencia $\mathcal{R}$ y respecto de él las cónicas cuyas ecuaciones son:

a) $x_1^2 - x_0^2 + x_1x_2 - x_2^2 = 0$. b) $3x_0^2 - x_0x_1 + x_1x_2 - 4x_0x_2 + x_2^2 = 0$.

c) $5x_1^2 + 5x_0^2 + x_2^2 - 8x_0x_1 + 4x_1x_2 - 2x_0x_2 = 0$. d) $2x_1^2 - 2x_0^2 + x_2^2 + 6x_0x_1 - 2x_1x_2 - 2x_0x_2 = 0$.

Clasificarlas.

EJERCICIO 32.– Sea Q la cuádrica en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ que respecto de un sistema de referencia tiene por ecuación $xAx^t = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Clasificarla y dar una ecuación reducida.

b) Calcular los planos polares de (1:0:0:0) y (0:1:0:0), y los polos de $x_0 + x_3 = 0$, y $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

c) Calcular la variedad polar de $L = \{x_0 = x_1 = 0\}$.

d) Idem con $L' = \{x_0 + x_1 = x_2 = 0\}$, $L + L'$, $L \cap L'$.

EJERCICIO 33.– Sea C una cónica-lugar no degenerada del plano proyectivo real no vacía. Se dice que un punto que no pertenece a C es interior (resp. exterior) si y sólo si su polar no corta a C (resp. su polar corta a C en dos puntos distintos). Se pide:

a) Probar que por un punto exterior a C pasan dos tangentes a la cónica.

b) Probar que por un punto interior a C no pasa ninguna tangente a la cónica y que toda recta que pasa por él corta a la cónica en dos puntos distintos.

EJERCICIO 34.– Sea Q una cuádrica de puntos elípticos, $P \notin \mathcal{V}(Q)$, y r una recta que pasa por P y corta a $\mathcal{V}(Q)$ en dos puntos distintos. Probar que el conjugado armónico de P respecto de los puntos $r \cap \mathcal{V}(Q)$ está en el plano polar de P.

EJERCICIO 35.– Sea Q una cuádrica real no degenerada de $\mathbb{P}_3$, $P \notin \mathcal{V}(Q)$, L su plano polar. Supongamos que $L \cap \mathcal{V}(Q) \neq \emptyset$ y $P' \in L \cap \mathcal{V}(Q)$. Se pide:

a) Probar que la recta PP' es tangente a Q en P'.

b) Probar que el conjunto de rectas que pasa por P y cortan a $\mathcal{V}(Q)$ en un punto de L es una cuádrica degenerada que tiene a P como punto singular, llamada *cono tangente* a Q en P.

EJERCICIO 36.– Se considera en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ la cuádrica Q de ecuación $xAx^t = 0$ respecto de un sistema de referencia, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Clasificar Q y hallar sus puntos singulares.

b) Demostrar que todos sus puntos no singulares son parabólicos, i.e. el plano tangente corta a $\mathcal{V}(Q)$ en una cónica de rango y signatura 1.

c) Sea r la recta de ecuaciones $x_1 + x_3 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Demostrar que los planos polares de todos sus puntos (salvo uno) coinciden. Calcúlese este plano común

d) Demostrar que toda recta que pase por el punto singular verifica lo anterior

e) Sea s la recta de ecuaciones $x_1 + x_3 = 0$, $x_0 - x_1 + x_3 = 0$. Demostrar que los planos polares de sus puntos son todos distintos, y pasan por una recta que contiene a un punto singular. Calcúlese esta recta.

f) Demostrar que toda recta que no pase por un punto singular verifica lo anterior.

g) Compruébese que el plano polar obtenido en el apartado c) es el determinado por las rectas de contacto de los planos tangentes a Q que pasan por r.

Ejercicio 37.– Sea Q una cónica real no degenerada y A, B, C, $D \in Q$ un cuadrivértice plano inscrito en Q. Probar que los puntos diagonales forma un trivértice autoconjugado (i.e. la polar de cada vértice es la recta que pasa por los otros dos). Indicación: usar el haz de cónicas de base A, B, C, D.

Ejercicio 38.– Determinar las cónicas del plano real que pasan por los puntos $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (1 : 0 : 2)$, $C = (1 : 2 : 0)$, $D = (1 : 2 : 10)$ y son tangentes a $r : x_0 = 0$.

Ejercicio 39.– Determinar las cónicas tangentes a las cinco rectas siguientes: $r_1 : x_1 + 3x_2 = 0$, $r_2 : 2x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$, $r_3 : 2x_0 + 5x_1 + 3x_2 = 0$, $r_4 : x_1 - x_2 = 0$, $r_5 : x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$.

Ejercicio 40.– Determinar las cónicas que pasan por el punto (3:1:2) y son tangentes a las rectas $x_0 - x_1 - x_2 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 - x_2 = 0$.

Ejercicio 41.– Determinar las cónicas que pasan por los puntos (3:2:1), (4:2:1), (5:3:2), (6:5:2) y son tangentes a la recta $x_0 + 2x_1 - 7x_2 = 0$.

Ejercicio 42.– Determinar las cónicas que pasan por los puntos (1:0:1), (3:-2:0) y son tangentes a las rectas $x_0 + 2x_1 = 0$, $x_1 = 0$, $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$.

Ejercicio 43.– Determinar las cónicas que pasan por los puntos (1:0:2), (3:1:2) y son tangentes a las rectas $x_1 = 0$, $x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$.

Ejercicio 44.– Determinar las cónicas que tienen un contacto de orden 2 (osculatrices) con la cónica de ecuación $x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$ en el punto (0:1:0) y que pasa por los puntos $(3 : 6 : -2)$,$(1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 45.– Determinar las cónicas que tienen un contacto de 2^{o} orden en el punto (1:1:0) con la cónica de ecuación $-x_0^2 + 2x_0x_1 + 4x_0x_2 - x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$ y pasan por (1:1:-1) y (2:1:2).

Ejercicio 46.– Determinar las cónicas que tienen un contacto de orden 3 (super-osculatrices) con la cónica de ecuación $x_0^2 - x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_0x_1 = 0$ en el punto (1:1:1) y que pasan por (1:2:1).

Nota.- Los siguientes ejercicios se refieren al espacio afín como subespacio del proyectivo.

Ejercicio 47.– En el plano proyectivo real y respecto de un sistema de referencia dado se consideran las cónicas de matrices siguientes:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -15 \\ -5 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

Sea H la recta $x_0 = 0$. Clasificar las cónicas afines en el plano afín resultante de quitar H. Calcular centros, diámetros, asíntotas, ejes y focos, cuando los haya.

Ejercicio 48.– Se considera un sistema de referencia en el espacio proyectivo real de dimensión tres y, respecto de él, el plano H de ecuación $x_0 = 0$ y la cuádrica de ecuación:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 & -1 \\ 7 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Clasificar las cuádricas afines que resultan al quitar el plano H dando los centros, planos asintóticos.

Ejercicio 49.– Clasificar las familias de cuádricas afines:

a) $m - mx^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0$

b) $3x^2 + 4myz + 2x - 2y + m = 0$

c) $x^2 + (m+1)y^2 + mz^2 + 2xy - 2yz + 2x + 2z + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy - 2mx + 2y + 2z + 3 = 0.$

Ejercicio 50.– En el espacio proyectivo tridimensional real, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se consideran las cuádricas

$$Q : x_0^2 + 2x_0x_1 - x_2^2 + 2x_2x_3 = 0, \qquad Q' : x_0^2 - x_0x_1 - x_2^2 - x_2x_3 = 0$$

y el haz $\mathcal{H}$ determinado por ambas. Se pide:

a) Hallar las cuádricas degeneradas de $\mathcal{H}$. Si alguna de ellas fuese la unión de dos planos, escribir las ecuaciones (por separado) de cada uno de esos planos.

b) Clasificar las cuádricas de $\mathcal{H}$.

c) Hallar los puntos base de del haz $\mathcal{H}$.

d) Hallar los planos tangentes comunes a Q y Q'.

Ejercicio 51.– Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x+2y-2=0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1,0)$ es la recta $x+y-3=0$.

Ejercicio 52.– Hallar la ecuación de una cónica, cuyo centro es el punto (1,0), tiene por asíntota el eje OX y es tangente al eje OY en el punto (0,1).

Ejercicio 53.– Determinar la cónica que teniendo las mismas direcciones asintóticas que la

$$x^2 + 2xy - 2y^2 - x + y + 1 = 0$$

pase por el origen y tenga su centro en el punto (1,1).

Ejercicio 54.– Hallar la ecuación de la cónica que pase por el origen, tenga un foco en el punto $F = (1, -3)$ y su directriz correspondiente sea $x + 2y - 1 = 0$.

Ejercicio 55.– Determinar la hipérbola equilátera uno de cuyos focos es el punto (1,2) y la directriz correspondiente es $x - 2y + 1 = 0$.

Ejercicio 56.– Hallar la ecuación de una cónica tangente a la recta $2x - 1 = 0$, y cuyos focos son (1,3), $(-2, 1)$.

Ejercicio 57.– Hallar la ecuación de una hipérbola tangente a la cónica C siguiente, en los puntos de intersección de C con la recta $x - 2y = 0$ y teniendo una asíntota paralela al eje OY:

$$C : 3x^2 - 2xy + 5y^2 - x + y = 0$$

Ejercicio 58.– Consideremos la cuádrica real afín Q de ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 1 = 0,$$

el plano π de ecuación $z = 0$ y el par de rectas r, s de ecuaciones:

$$r = \{x - 1 = y - z = 0\} \qquad , \qquad s = \{y - 1 = x - z = 0\}.$$

Se pide:

a) Clasificar la cuádrica afín real Q. Hallar sus planos principales y ejes.

b) Hallar la posición relativa de la cónica $C = Q \cap \pi$ y del par de rectas $r \cup s$.

c) ¿Existe alguna cuádrica degenerada que contenga a $C \cup r \cup s$? Razonar la respuesta. En caso afirmativo, hallar la ecuación de una tal cuádrica.

d) Idem que el apartado c) para el caso de una cuádrica no degenerada.

Ejercicio 59.– En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, sumergido de la forma habitual en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, se pide:

1) Calcular la ecuación general de las hipérbolas cuyas asíntotas son las rectas

$$x + 2y = 0, \qquad 2x - y = 0.$$

2) Calcular los focos reales de cada una de las hipérbolas del apartado anterior. ¿Qué lugar geométrico determinan?

Ejercicio 60.–

a) Probar que dos parábolas superosculatrices en su punto del infinito tienen el mismo eje. ¿Es cierto el recíproco?

b) Comprobar que las parábolas de ecuaciones

$$y - x^2 = 0, \qquad y - x^2 + x = 0$$

son osculatrices en su punto del infinito.

Ejercicio 61.– Calcular la ecuación general de las parábolas de $\mathbb{R}^2$ cuyo eje es la recta $x = 0$ y cuyo foco es el punto $(0, 1)$.

Ejercicio 62.–

a) Probar que dos parábolas osculatrices en su punto del infinito tienen ejes distintos.

b) Dado un haz de cónicas $\mathcal{H}$ de tipo V en un plano proyectivo complejo, probar que los duales de las cónicas no degeneradas de $\mathcal{H}$ forman parte de un haz de cónicas del plano dual del mismo tipo. (*Indicación: trabajar en un sistema de referencia adecuado*)

Ejercicio 63.– Calcular las secciones circulares del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$.

Ejercicio 64.– Consideremos, en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, la familia $\mathcal{F}$ de cónicas no degeneradas con focos reales $F_1 = (1, 1)$ y $F_2 = (3, 3)$, considerando el espacio afín $\mathbb{C}^2$ inmerso en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de la forma habitual. Se pide:

a) Dar una ecuación general de la familia. Hallar los otros dos focos de cada una de las cónicas de $\mathcal{F}$.

b) Probar que toda cónica de la familia es tangente a cuatro rectas fijas y dar una ecuación de cada una de estas rectas.

c) Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ la familia de cónicas afines reales inducida por $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^2$. Clasificar las cónicas de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ (considerando $\mathbb{R}^2$ inmerso en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de la forma habitual, es decir, con $x_0 = 0$ como recta del infinito).

d) ¿Cuántas cónicas de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ pasan por cada punto de $\mathbb{R}^2$? ¿De qué tipo son? Deducir de aquí si $\mathcal{F}$ puede estar incluida en un haz de cónicas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

e) Determinar la(s) hipérbola(s) de $\mathbb{R}^2$ con focos reales $F_1 = (1, 1)$ y $F_2 = (3, 3)$ y tales que la recta $2y - x - 2 = 0$ sea una de sus asíntotas. Calcular, para cada una de estas hipérbolas, la otra asíntota.

Ejercicio 65.– Consideremos la cuádrica afín de ecuación:

$$1 + 2x + x^2 + 2xz + 2y^2 + z^2 = 0$$

Clasificarla. Hallar su(s) direccion(es) principal(es) y diámetro(s) principal(es). Calcular su(s) eje(s) y el cono tangente a ella desde el punto $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 66.– En el plano proyectivo real $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se considera la familia $\mathcal{F}$ de cónicas definidas por la matriz

$$A_m = \begin{pmatrix} m^2 & -m & m \\ -m & m-1 & -1 \\ m & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

donde $m \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Probar que la familia $\mathcal{F}$ no es un haz de cónicas proyectivo y clasificar las cónicas de $\mathcal{F}$.
2. Se considera, a partir de ahora, el plano $\mathbb{R}^2$ inmerso en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tomando $x_0 = 0$ como recta del infinito. Sea $\mathcal{F}_a$ la familia de cónicas afines en $\mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{F}$. Clasificar las cónicas de $\mathcal{F}_a$.
3. Hallar los ejes de las cónicas no degeneradas de la familia $\mathcal{F}_a$.
4. Hallar los puntos de $\mathbb{R}^2$ por los que pasan dos cónicas de $\mathcal{F}_a$.
5. Hallar las asíntotas (si existen) y los focos (si existen) de la cónica que se obtiene para $m = 1$.

Ejercicio 67.– Se da la familia $\mathcal{F}$ de cuádricas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de ecuaciones siguientes:

$$\lambda^2 x_0 x_2 + \lambda x_1 x_2 + x_0 x_3 = 0$$

con λ un parámetro real. Se pide:

1. Clasificar las cuádricas degeneradas de $\mathcal{F}$.
2. Deducir si $x_0 = 0$ es un plano tangente a todas las cuádricas de $\mathcal{F}$, y hallar los puntos de tangencia en su caso.
3. Usando lo anterior, dar la clasificación de todas las cuádricas de $\mathcal{F}$, en función del parámetro λ.
4. Deducir si la recta $r : x_0 = x_1, x_2 = x_3$ es tangente a alguna cuádrica de $\mathcal{F}$.

Ejercicio 68.– Hallar la ecuación general de la familia de parábolas cuya tangente en el vértice es la recta s de ecuación $x + 2y = -4$. ¿La familia es un haz de cónicas afines?
b) Hallar la ecuación de la(s) parábola(s) de vértice $V = (0, -2)$ y de tangente en V la recta s. ¿Cuáles de estas parábolas pasan por el punto $(4, 0)$?

Ejercicio 69.– Consideremos la cuádrica afín Q de ecuación $2 + 2x - 2xy - y^2 - z^2 = 0$

1. Clasificarla y hallar su centro.
2. Calcular las rectas contenidas en Q que pasan por el punto $(-1, 0, 0)$.
3. Calcular la ecuación del cono tangente a Q desde el punto $(0, 0, 1)$.
4. Consideremos la familia de cuádricas afines de ecuación

$$2 + 2x - 2xy - y^2 - z^2 + \lambda(1 + x + y) = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

utilizando exclusivamente los apartados anteriores junto con razonamientos <u>geométricos</u> (tanto en el afín como en el proyectivo) se pide clasificar todas las cuádricas de la familia.

Ejercicio 70.–

Sea la cónica afín Q de ecuación $x^2 + 2x + 2y = 0$. Clasificarla. Sea $\overline{Q}$ la cónica proyectiva asociada y consideremos el cuadrivértice P_1, P_2, P_3, P_4, con $P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (1 : -2 : 0), P_3 = (1 : 2 : -4), P_4 = (0 : 0 : 1)$. Calcular los puntos diagonales de este cuadrivértice y comprobar que la polar del punto diagonal alineado con P_1 y P_2 es la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales (digamos P, P').

Ejercicio 71.– Consideremos la cuádrica afín Q de ecuación $2x^2 + y^2 + z^2 + 6yz + 2 = 0$. Se pide:

1. Clasificarla, hallar sus planos principales, ejes y sus vértices.

2. ¿Qué tipos de cónicas afines se pueden obtener al cortar la cuádrica Q por un plano? Dar la ecuación de algún plano afín L que corte a Q en un par de rectas imaginarias (secantes en un punto real).

Ejercicio 72.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ consideramos la cuádrica $\mathcal{Q}$ de ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 10yz + 4z^2 - 1 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla.
2. Calcular su centro, sus direcciones principales, sus planos principales y sus ejes.
3. Calcular su cono asintótico (es decir, el cono tangente con vértice en el centro).

Ejercicio 73.– *(Enero 01)*

Se dan los puntos $A = (0,0)$, $B = (2,2)$ y $C = (3,3)$ del plano afín $\mathbb{R}^2$, que se considera sumergido en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ del modo usual. Sea r la recta afín AB.

1. En la clausura proyectiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A, B; C\}$; hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ de r_∞, punto del infinito de r.
2. Sea $P = (x,x)$ un punto genérico de r y $P' = (y,y)$ el cuarto armónico de A, B, P (cuando esté definido). Demostrar que se verifica que $xy - x - y = 0$.
3. Clasificar la ecuación anterior en $\mathbb{R}^2$. Hallar sus asíntotas, si las tiene.

Ejercicio 74.– *(Enero 01)*

A.- Teniendo en cuenta que la tangente en el vértice a una cónica es perpendicular al eje al que pertenece, determinar la(s) parábola(s) de eje $2x + y = 0$ y vértice $(0,0)$ que pasan por el punto $(-1,-3)$.

B.- Se considera la familia de cónicas afines de ecuación

$$Q_\alpha : 2\alpha x - x^2 + 2\alpha xy - y^2 = 0$$

Se pide:

1. Clasificarlas.
2. Hallar las direcciones principales y los ejes de Q_α en cada caso.
3. Para el caso $\alpha = 1$, calcular los focos de la cónica obtenida.

Ejercicio 75.– *(Enero 01)*

Se considera fijo el espacio proyectivo tridimensional real $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y, dentro de él, el espacio euclídeo de dimensión 3, sumergido de la forma usual respecto de un sistema de coordenadas. Responder a las cuestiones siguientes:

1. Sea Q una cuádrica proyectiva no degenerada (es decir, de rango 4) y real (es decir, de signatura proyectiva 2 ó 0). ¿Se puede averiguar si Q es de puntos elípticos o hiperbólicos (es decir, signatura 2, ó 0 respectivamente) cortando por planos transversales (es decir, no tangentes) a Q? En caso de respuesta afirmativa, decir cómo.
2. En un paraboloide elíptico de revolución Q, ¿de qué tipo es la cónica del infinito Q_∞ de Q? ¿Cuál de los puntos fundamentales del haz $\mathcal{H}$ determinado por el absoluto Ω y Q_∞ es el de tangencia del plano del infinito?
3. Dada la cuádrica Q de ecuación $x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_3 - x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - 2x_3x_1 = 0$, de la que se sabe que es no degenerada, demostrar que la recta r que pasa por los puntos $P_1 = (1:0:1:0), P_2 = (1:0:0:1)$ está contenida en ella. ¿Cuál es la signatura proyectiva de esa cuádrica?.
4. Hallar el plano tangente L a la cuádrica Q en P_1. La intersección $L \cap \mathcal{V}(Q)$ son dos rectas; hallar ecuaciones implícitas de cada una de ellas.

5. Razonar por qué los planos tangentes a Q en los puntos de r forman el haz de planos $\mathcal{P}$ de base r.

Ejercicio 76.– *(Septiembre 01)*

1. Describir la configuración de los puntos base y fundamentales de todos los haces de cónicas complejas.
2. Calcular la(s) parábola(s) superosculatrices (tipo 5) con $2x + 2xy - x^2 - 1 = 0$ en el punto $(1, 0)$. Para cada solución hallada, calcular el eje y el foco.

Ejercicio 77.– *(Sept. 01)*

Se considera el espacio proyectivo tridimensional real $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se da la familia de cuádricas proyectivas

$$\lambda(x_0^2 - 4x_1^2) + \mu(x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3^2) = 0\,.$$

Se pide:

1). Clasificarla según los valores de λ y μ.

2). Para $\lambda = \mu = 1$ obtenemos una cuádrica de puntos hiperbólicos. Se sabe que el punto $P = (2 : 1 : 1 : 1)$ pertenece a la cuádrica lugar. Hallar dos puntos Q_1, Q_2 de la cuádrica lugar, distintos de P, tales que las rectas PQ_1 y PQ_2 sean las generatrices que pasan por P.

3). Se considera el espacio euclídeo sumergido en el proyectivo a la manera usual, es decir, tomando como hiperplano del infinito $x_0 = 0$. Las coordenadas afines serán designadas por x, y, z. Se pide clasificar la familia afín correspondiente según los valores de λ y μ.

4). Para $\lambda = \mu = 1$ obtenemos una cuádrica afín. Hallar su centro y su cono asintótico.

Ejercicio 78.– *(Febrero 02)*

Dados cuatro planos H_1, H_2, H_3 y H_4 de $P_3(R)$ conteniendo una recta fija s, y dada otra recta r que se cruce con s, se llama razón doble de H_1, H_2, H_3, H_4 a

$$\big|(H_1 \cap r)(H_2 \cap r)(H_3 \cap r)(H_4 \cap r)\big|.$$

Sean

$$H_1 = \{x_3 = 0\}, \qquad H_2 = \{x_1 - x_3 = 0\}, \qquad H_3 = \{x_1 = 0\},$$

y r la recta de ecuaciones $\{x_0 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0\}$. Calcular el cuarto armónico de H_1, H_2, H_3.

Ejercicio 79.– *(Febrero 02)* a) Defina centro de una hipercuádrica afín y enuncie sus propiedades de simetría.

b) Pruebe que las cónicas afines de centro (0,0) y cuya tangente en $(-1, 1)$ es la recta $x - y + 2 = 0$ forman parte de un haz de bitangentes.

c) Determine las cónicas de centro (0,0), cuya tangente en $(-1, 1)$ es la recta $x - y + 2 = 0$ y que pasen por el punto $(-2, 3)$.

Ejercicio 80.– *Febrero 02*

Dada la cuádrica Q en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + y - z - x^2 + z^2 = 0$, se pide:

a) Clasificarla.

b) Calcular su centro, planos principales y ejes, si los hay.

c) Calcular las ecuaciones de cada una de las rectas contenidas en el lugar de Q que pasan por el origen de coordenadas, si las hay.

d) Calcular el cilindro tangente a Q de dirección $\langle(1, 0, 0)\rangle$. Para ello calcular el cono tangente a $\overline{Q}$ desde $(0 : 1 : 0 : 0)$.

Ejercicio 81.– *(Sept 02)*

Consideremos la familia de cuádricas en $\mathbf{R}^3$, de ecuación

$$Q_\lambda : x^2 - z^2 + x + y + z + \lambda(x + y + z) = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

1.- Cuántas cuádricas degeneradas hay en la familia? Clasificarlas.

2.- Es el plano $\pi : x + y + z = 0$ tangente a todas las cuádricas no degeneradas de la familia?

3.- Clasificar $(Q_\lambda)_\infty$ para cada valor de λ.

4.-*Sin hacer cálculos,* clasificar las cuádricas Q_λ.

5.- Calcular los centros y ejes de cada una de las cuádricas no degeneradas de la familia.

Ejercicio 82.– *(Sept 02)*

1. Sea Q una cónica afín no degenerada en $\mathbf{R}^2$. Defina el concepto de asíntota de Q. Deduzca, según sea $\mathcal{V}(Q_\infty)$, el número de asíntotas de Q.
2. Calcule las ecuaciones de las cónicas que tienen la asíntota $x = 1$ y el foco $(0, 0)$.
3. Verifique que la ecuación $1 - 2x - 2y + 2xy = 0$ es de una cónica del apartado anterior, hallando sus asíntotas y sus focos.

Ejercicio 83.–

Consideremos en el espacio proyectivo real tridimensional $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ el haz de cuádricas $\{Q_{\lambda,\mu} \ / \ (\lambda : \mu) \in \mathbf{P}_1(\mathbf{R})\}$, con

$$Q_{\lambda,\mu} = \lambda(x_0x_1 + x_0x_2) + \mu(-x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

a) $Q_{1,0}$ es un par de planos. Calcular sus polos respecto de $Q_{0,1}$ y deducir de la posición de éstos respecto de $Q_{0,1}$ los puntos base del haz, especificando si son reales o imaginarios.

b) Sin hacer cálculos, determinar cuántas cuádricas proyectivas degeneradas hay en el haz, y clasificarlas.

c) Sin hacer cálculos, clasificar las cuádricas afines no degeneradas $(Q_{\lambda,\mu})_a$ del espacio afín.

d) Calcular unas ecuaciones implícitas del lugar geométrico de los centros de las cuádricas afines anteriores.

Ejercicio 84.– *Enero 00* Contestar brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos una recta.

b) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos dos rectas que se cruzan.

c) Enumerar los tipos de cuádricas afines reales cuyo lugar es vacío.

d) ¿Existen paraboloides elípticos de revolución? ¿Y paraboloides hiperbólicos de revolución? Contestar razonadamente.

e) Enumerar los tipos afines de cuádricas del espacio euclídeo tridimensional que pueden ser de revolución.

f) ¿Cuántos ejes tiene un cono afín real en el espacio euclídeo tridimensional que no sea de revolución? Contestar razonadamente.

Ejercicio 85.– *(Sep. 03)*
En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ se dan tres rectas L_1, L_2, L_3 tales que $(L_i + L_j) \cap L_k = \emptyset$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

1. Pruebe que $n > 4$, hallando la dimensión de la suma de las tres rectas.
2. En ese caso, pruebe que no existe ningún plano que contenga a una de las rectas y corte a las otras dos.

Ejercicio 86.– *(Sep. 04)* Sean A y B dos puntos distintos del plano afín, y C el punto del infinito de la recta AB.

1. Indique razonadamente un procedimiento geométrico para construir, con escuadra y cartabón, el punto D tal que $|ACBD| = \frac{1}{2}$.
2. Si D es el punto anterior, demuestre que un punto E verifica que $|ACBE| = \frac{1}{4}$ si y sólo si $|ACDE| = \frac{1}{2}$. Usando lo anterior, indique un procedimiento geométrico para construir un punto E tal que $|ACBE| = \frac{1}{4}$.
3. Si $A = (0, 0)$ y $B = (1, 2)$, calcule las coordenadas de los puntos D y E anteriores.

Ejercicio 87.– *(Dic 03)*

Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2x + y^2 + 2yz + z^2 = 0$. Se pide:

1.- Clasifíquela. Calcule sus centros, planos principales y ejes, si los hay.

2.- Consideremos la cónica afín $Q_{|\pi}$, restricción de Q al plano $\pi : x + y = 0$. Clasificar esta cónica y calcular las coordenadas de su centro, focos y la ecuación de sus ejes (si los hubiera) respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$.