- RELACION COMPLEMENTARIA DE AMPLIACION DE GEOMETRIA -

Curso 04-05

Ejercicio 1.– *Junio 98*

En el espacio proyectivo ordinario de dimensión 4, se consideran dos rectas, r y s, que se cruzan. Probar la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Para cualquier recta t existe al menos un punto desde el que se puede trazar una recta que se apoye a la vez en r y en s".

Ejercicio 2.– Sea L una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}_n$ dada por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r0}x_0 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Probar que un hiperplano H contiene a L si y sólo si su ecuación es de la forma

$$\lambda_1(a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + \lambda_r(a_{r0}x_0 + \ldots + a_{rn}x_n) = 0,$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ no todos nulos.

Ejercicio 3.– *Enero 00*

1). Hallar n tal que dos variedades lineales cualesquiera L_r y L_s de $\mathbb{P}_n$, de dimensiones respectivas $r > 1$ y $s > 1$, se corten como mínimo en una recta. ¿Cuántos n verifican esa condición?

En $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ se da el punto $P = (1:0:1:1:0)$, la variedad lineal L_1 engendrada por los puntos $(0:1:0:1:1), (1:1:1:0:0)$ y la variedad lineal L_2 engendrada por los puntos $(1:0:1:1:1), (0:0:0:1:1), (1:0:0:1:0)$

2). Usando la fórmula de la dimensión con $P + L_1$ y $P + L_2$ demostrar que existe una única recta r que pasa por P y se apoya sobre (i.e., corta a) L_1 y L_2.

3) Hallar los pies de r sobre L_1 y L_2, es decir $r \cap L_1$ y $r \cap L_2$.

Nota: Se suministran como datos las ecuaciones implícitas respectivas de $P + L_1$ y $P + L_2$, por si se considera conveniente utilizarlos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 0$$

Ejercicio 4.– *diciembre 00*

Se considera en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4; U\}$. Sea π el plano que pasa por los puntos P_0, P_2 y P_4. Se pide:

1. Probar que todo plano que pasa por la recta $r = P_1P_3$ corta a π en un punto.
2. Si $V = \pi \cap (r + U)$, probar que $\mathcal{R}_\pi = \{P_0, P_2, P_4; V\}$ es un sistema de referencia en π. Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$, del punto $(x_0 : x_1 : x_2)_{\mathcal{R}_\pi}$.
3. Si definimos la razón doble de 4 planos que pasan por r como la razón doble de sus puntos de corte con π, hallar el cuarto armónico de los planos L_1, L_2, L_3, siendo $L_i = r + Q_i$, $i = 1, 2, 3$ y $Q_1 = (1:1:0:0:0)_{\mathcal{R}}$, $Q_2 = (0:0:1:1:0)_{\mathcal{R}}$ y $Q_3 = (2:1:1:0:0)_{\mathcal{R}}$.

Ejercicio 5.– *diciembre 00*

Sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una homología de eje e y centro (incidente) $O \in e$. Se pide:

1. Supongamos que e tiene por ecuación $x_0 = 0$. ¿Qué forma tiene la matriz de F?
2. Dado un punto $P \notin e$, probar que la razón doble $|OPF(P)F^2(P)|$ es independiente del punto P elegido.
3. Si G es otra homología de eje e pero de centro (no incidente) $O' \notin e$, ¿qué podemos decir de la composición $G \circ F$? ¿Es también una homología? En caso afirmativo, ¿de qué tipo?

Ejercicio 6.– *Enero 00*

A) En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se da la homografía cuya matriz respecto del sistema de referencia canónico es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar los puntos y rectas dobles de esta homografía.

B) Consideremos la homología F del plano proyectivo real de eje e, centro no incidente O y razón $\frac{1}{2}$.

1. Sabiendo que si $|ABCD| = \mu$ entonces $|ACDB| = \frac{1}{1-\mu}$, diseñar razonadamente un procedimiento para construir el punto $F(A)$ para cualquier A del plano.
2. En el dibujo adjunto, construir $F(A)$ utilizando dicho procedimiento. Construir también $F^2(A)$.

Ejercicio 7.– *Sept 00*

1). Hallar el mínimo n tal que en $\mathbb{P}_n$ existan dos planos π y π' que no se corten.

En $\mathbb{P}_5(\mathbb{Q})$ se da el punto $P = (1 : -2 : 0 : -2 : 2 : 1)$, el plano π que pasa por los puntos $(2 : 0 : -1 : 1 : 0 : -2), (-3 : 1 : 1 : -3 : -3 : -2), (3 : -1 : -1 : -3 : 2 : 3)$ y el plano π' que pasa por los puntos $(-1 : -2 : 1 : -3 : 2 : 3), (-2 : -2 : 0 : 0 : 0 : -3), (-1 : 2 : 1 : 0 : 1 : -2)$

2). Demostrar que hay una única recta r que pase por P y corte a ambos planos.

3). Hallar los pies de r sobre π y π', es decir $r \cap \pi$ y $r \cap \pi'$.

Nota: Se suministran como datos las ecuaciones implícitas respectivas de $P+\pi$ y $P+\pi'$, por si se considera conveniente utilizarlos.

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 13 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & -11 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -36 & 21 & -92 & 0 & 34 & 10 \\ -12 & 0 & -19 & 21 & 23 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ejercicio 8.– Hallar las ecuaciones de la homografía de la recta proyectiva real tal que, respecto de un sistema de referencia, transforma $(1 : 2), (2 : 5), (-1 : 1)$ en $(3 : 1), (0 : 3), (2 : -3)$ respectivamente.

Ejercicio 9.– Sea F una homografía del espacio proyectivo real de dimensión 3, de matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R}$. Se pide:

a) Calcular $F(L)$ siendo $L = \{x_0 + x_1 = 0\}$.

b) Calcular $F(L')$ siendo $L' = \{x_2 + x_3 = 0\}$.

c) Calcular $F(r)$ siendo $r = L \cap L'$.

d) Idem a los apartados anteriores con F^{-1}.

Ejercicio 10.– Sea $G : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ la homografía cuya matriz (resp. del s.r. canónico) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular sus puntos, planos y rectas dobles.

Ejercicio 11.– Se considera en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ un sistema de referencia $\mathcal{R}$ y una homografía F de matriz respecto de $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Calcular los puntos y planos dobles de F.

b) Encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}_L$ en el plano $L : \{x_0 = 0\}$ lo más simple posible.

c) Demostrar que L es un plano doble de F y encontrar unas ecuaciones de la restricción F' de F a L.

d) Clasificar F' y obtener su configuración invariante a partir del apartado a).

e) Demostrar que F' es involutiva.

Ejercicio 12.– Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos de una recta proyectiva r de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, con razón doble $\lambda = |A\ B\ C\ D|$. Determinar geometricamente un punto $E \in r$ tal que $|A\ B\ C\ E| = 1/(1-\lambda)$.

(Nota: Se recuerda que la razón doble verifica: $|B\ A\ C\ D| = 1/|A\ B\ C\ D|$; $|C\ D\ A\ B| = |A\ B\ C\ D|$; $|A\ C\ B\ D| = 1 - |A\ B\ C\ D|$.*)*

Ejercicio 13.– Probar que en una homología plana, las rectas que unen pares de puntos correspondientes son dobles y pasan todas por el centro de homología. Probar que rectas correspondientes se cortan sobre el eje de homología.

Ejercicio 14.– En el plano proyectivo real se considera la homografía F que respecto de un sistema de referencia tiene por matriz:

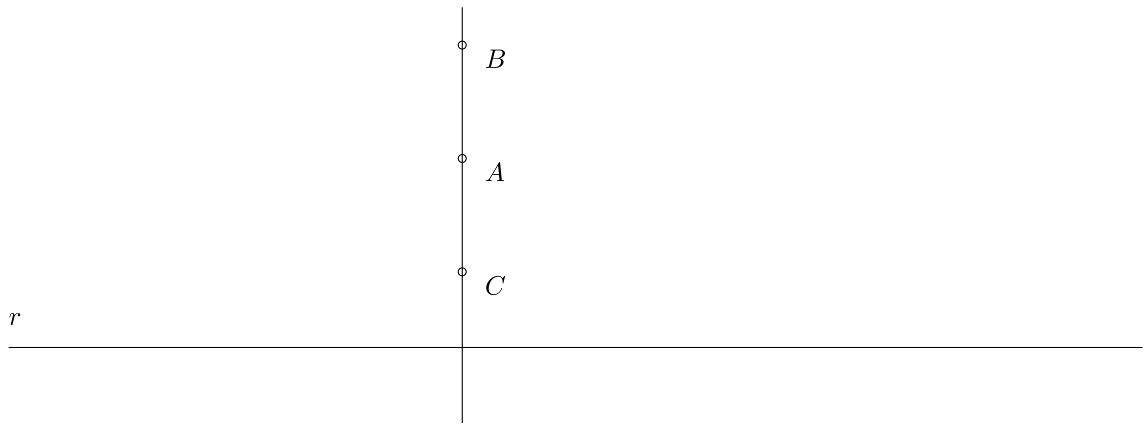
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que para todo punto P, la recta $P + F(P)$ pasa por el punto $(1 : -1 : 1)$.

b) Probar que para todo par de puntos P, Q las rectas $P + Q$ y $F(P) + F(Q)$ se cortan sobre la recta de ecuación $2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.

c) Sabiendo que $F(1 : 1 : -1) = (0 : 1 : -1)$, obtener $F(1 : 1 : 0)$ sin usar la matriz de F.

Ejercicio 15.– En el plano proyectivo real se consideran una recta r y tres puntos alineados $A, B, C \notin r$ distintos entre sí. ¿Cuántas homologías H de eje r y que transformen A en B existen? ¿Y que además sean de centro incidente? Si H es una de éstas últimas, calcular geométricamente $H(C)$.



EJERCICIO 16.–

a) Encontrar una ecuación de la homografía parabólica f de la recta real tal que deja invariante al punto $(1:1)$ y que $f(1:2) = (1:0)$.

b) Sean A, B, C, D puntos distintos de la recta real. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

   1) Existe una homografía f tal que $f(A) = B, f(B) = A, f(C) = C, f(D) = D$.
   2) $|ABCD| = -1$.

EJERCICIO 17.– Demostrar que si f es una homografía de la recta proyectiva tal que existe un punto P que verifica que $f(P) = P' \neq P$ y $f(P') = P$, entonces f es una involución.

EJERCICIO 18.–

a) Se consideran tres puntos no alineados O, O', O'' del plano proyectivo real. Sean $A, B \in O + O'$ dos puntos distintos entre sí y distintos de O, O', y $A'', B'' \in O + O''$ dos puntos distintos entre sí y distintos de O, O''. Pongamos $A' = (A + A'') \cap (O' + O''), B' = (B + B'') \cap (O' + O'')$. Probar que

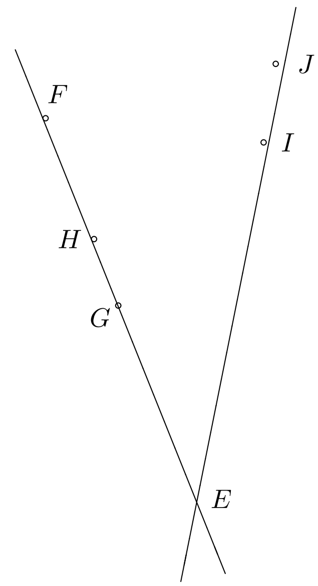
$$|OO''B''A''| = |OO'BA| \cdot |O'O''B'A'|.$$

(*Indicación: Tomar un sistema de referencia adecuado*)

b) Se dan 4 puntos alineados distintos dos a dos, E, F, G, H, y otros dos puntos I, J distintos entre sí y alineados con E. Construir geométricamente el punto K de la recta $E + I + J$ tal que

$$|EIJK| = -|EFGH|.$$

Razonar la respuesta.



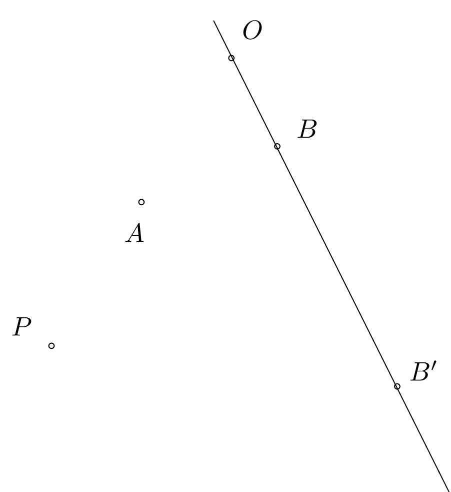
Ejercicio 19.– De una homología F en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, de centro y eje no incidentes, se conoce:

1. Su centro O
2. Un punto P de su eje
3. La imagen B' de un punto $B \neq O, P$ tal que $P \notin (O + B)$
4. Su razón, que es igual a -1.

Se pide:

a) Hallar gráficamente (en el dibujo adjunto) el punto $F(A)$, donde A es un punto alineado con O y P.

b) Describir un procedimiento geométrico para calcular un punto P' del eje, tal que $P' \in (A + B)$. Hallar gráficamente el eje de F.

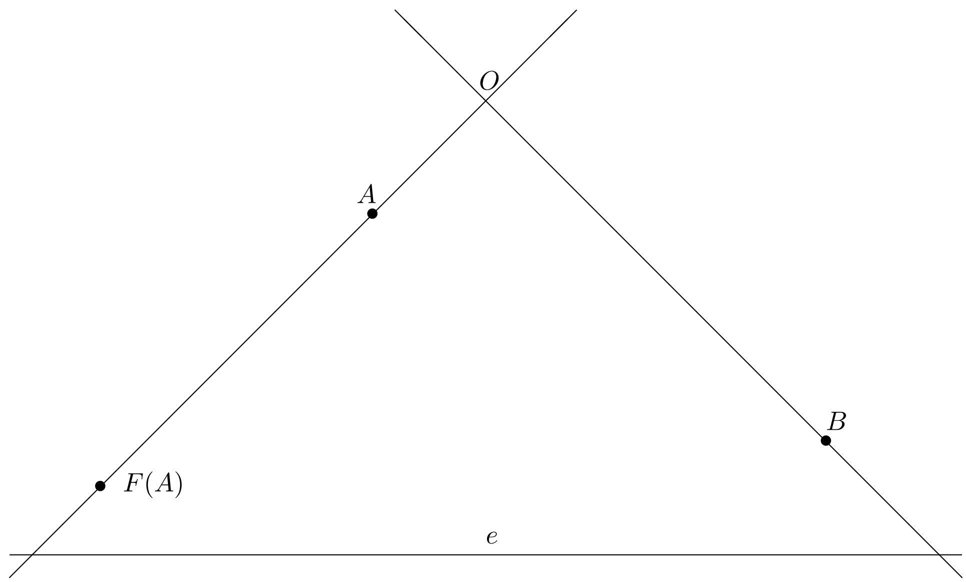


Ejercicio 20.– *Sept 00*

1. Sean A, B, C, D, E puntos distintos alineados. Probar que $|ABCD| = |ABCE||ABED|$.

2. Sean F, G dos homologías de centro O, eje e, $O \notin e$, y razones λ, μ, respectivamente, con $\lambda\mu \neq 1$. Demostrar que el producto FG es otra homología de centro O, eje e y razón $\lambda\mu$. ¿Qué será FG si $\lambda\mu = 1$?

3. Sea F la homología dada por los datos de la figura posterior: el centro O, el eje e, A y $F(A)$. Utilizando una homología G de razón -1, construir $H(B)$, siendo H la homología de centro O, eje e y razón$(H) = -$razón(F).



Ejercicio 21.– Se considera el espacio afín $\mathbb{R}^3$ inmerso en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de la forma habitual, y en ambos los sistemas de referencia canónicos, respecto de los cuales se tomarán coordenadas y ecuaciones. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la afinidad de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

y $\overline{F} : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ la homografía asociada. Se pide

a) Hallar los puntos, planos y rectas dobles de $\overline{F}$.

b) ¿Existen planos dobles de la afinidad F cuya restricción sea una homotecia? En caso afirmativo, calcularlos y dar el centro y la razón de dichas homotecias.

Ejercicio 22.– Sea $F : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ una homografía que, en una cierta referencia $\mathcal{R}$, viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide

a) Hallar los puntos y planos dobles de F.

b) Describir, sin efectuar cálculos, las rectas dobles de F. A continuación, expresar, en $\mathcal{R}$, unas ecuaciones que las determinan.

Ejercicio 23.–

1. Dados 4 puntos distintos A, B, C, D de una recta proyectiva, verificar que $|ACBD| = 1 - |ABCD|$.
2. (Ver dibujo adjunto) Se considera la homología F del plano proyectivo real de centro O no incidente y de razón 2. Conociendo la imagen $F(A)$ del punto A y la imagen $F(r)$ de la recta r, determinar gráficamente el eje de la homología, así como la imagen del punto B.

Ejercicio 24.–

1. Sea F una homología de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de razón $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que F es involutiva si y sólo si $\lambda = -1$.
2. Sea F una homología involutiva dada por su eje e y tal que $F(r) = r'$ y $F(s) = s$ (ver figura posterior). Construir geométricamente el centro de F.

Ejercicio 25.– Se consideran cuatro puntos A, A', B, y B' no alineados tres a tres en el plano proyectivo X y notemos $F : X \longrightarrow X$ la homología involutiva de centro no incidente del plano que transforma A en A' y B en B'. Se pide:

1. Describir razonadamente un procedimiento para calcular el centro de F.
2. Describir razonadamente un procedimiento para calcular el eje de F

Ejercicio 26.– Se considera en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ un sistema de referencia $\mathcal{R}$ y las homografías definidas por las matrices, respecto de $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

donde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Se pide:

a) Indicar para qué valores de m las homografías anteriores tienen puntos y planos dobles. Calcular éstos en el caso particular $m = -4$.

Sea G la homografía definida para el valor $m = 1$.

b) Comprobar que G es una involución cuyas rectas dobles son precisamente las de la familia $\mathcal{F}$ definida, en $\mathcal{R}$, por las ecuaciones:

$$\mathcal{F} \left\{ \begin{array}{lcl} (c^2 + d^2)(ax_0 + bx_1) & = & (a^2 + b^2)(cx_2 + dx_3) \\ (c^2 + d^2)(ax_1 - bx_0) & = & (a^2 + b^2)(cx_3 - dx_2) \end{array} \right.$$

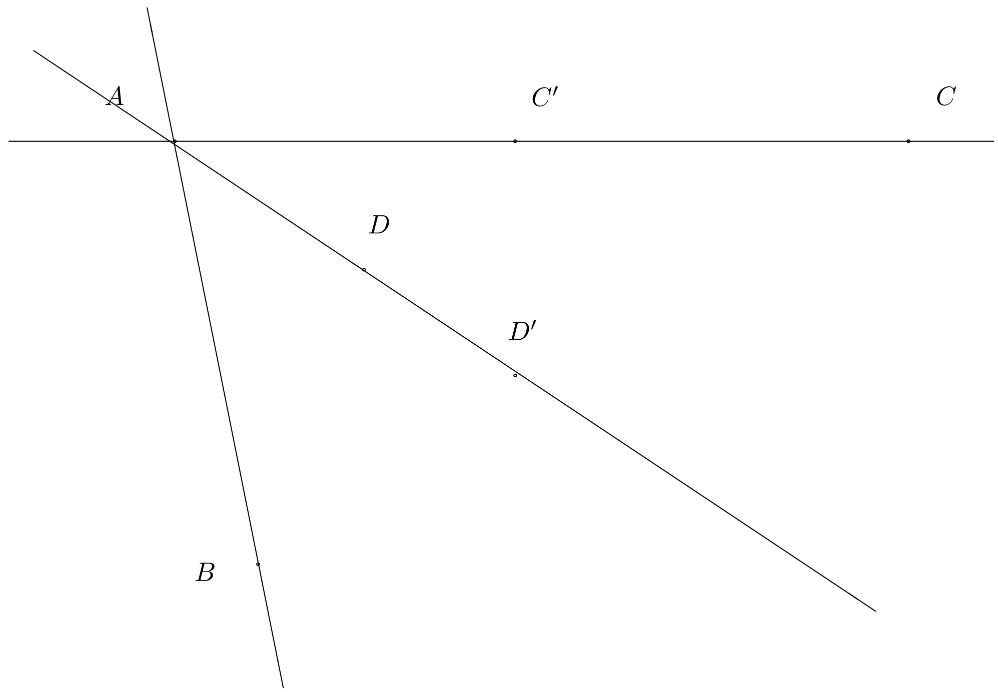
donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b), (c, d) \neq (0, 0)$

c) Razonar la validez de las siguientes afirmaciones:
c.1) "Dos rectas distintas de $\mathcal{F}$ se cruzan siempre"
c.2) "$\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ es la unión disjunta de las rectas de $\mathcal{F}$, consideradas como conjuntos de puntos".

Ejercicio 27.– *Setiembre 96*

Consideremos el dibujo adjunto como parte del plano proyectivo X, y en él los puntos A, B, C, D, C', D' tales que $\{A, B, C, D\}$ y $\{A, B, C', D'\}$ forman dos sistemas de referencia, A, C, C' están alineados y A, D', D también están alineados. Consideremos la única homografía $F\colon X \to X$ tal que $F(A) = A, F(B) = B, F(C) = C', F(D) = D'$. Se pide:

1. ¿Por qué podemos afirmar que F es una homología? ¿Cuál es su centro?
2. Construir geométricamente el punto $F(C')$.



Ejercicio 28.– *Setiembre 01*

Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3; U\}$ un sistema de referencia cualquiera en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se pide:

1. Hallar las ecuaciones, respecto de $\mathcal{R}$, de las variedades H_0, H_1, H_2, H_3 de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, dadas por

$$H_0 = L_p(P_1, P_2, P_3), \quad H_1 = L_p(P_2, P_3, U), \quad H_2 = L_p(P_1, P_3, U), \quad H_3 = L_p(P_1, P_2, U).$$

2. Deducir razonadamente la dimensión de la variedad L_A de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ cuyas ecuaciones respecto de $\mathcal{R}$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0x_2 - a_1x_1 = 0 \\ a_0x_3 - a_2x_1 = 0 \\ a_1x_3 - a_2x_2 = 0 \end{array} \right. ,$$

donde $A = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

3. Establecer una relación entre $\{L_A, A \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\}$ y el conjunto de todas las rectas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ que pasan por P_0.
4. Obtener los puntos $A \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{R}_A = \{P_0, L_A \cap H_0; L_A \cap H_1\}$ es un sistema de referencia en L_A. En ese caso, hallar la razón doble $\rho = |L_A \cap H_0, L_A \cap H_1, L_A \cap H_2, L_A \cap H_3|$, cuando esté definida. Deducir que el conjunto de puntos A de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tales que $\rho = -1$ es el lugar de una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ cuya ecuación se pide.

Ejercicio 29.– Se dan los puntos $A = (0,0)$, $B = (2,2)$ y $C = (3,3)$ del plano afín $\mathbb{R}^2$, que se considera sumergido en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ del modo usual. Sea r la recta afín AB.

1. En la clausura proyectiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A, B; C\}$; hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ de r_∞, punto del infinito de r.

2. Construir geométricamente el cuarto armónico D de los puntos A, B, C. Calcular las coordenadas de D como punto de $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $P = (x, x)$ un punto genérico de r y $P' = (y, y)$ el cuarto armónico de A, B, P (cuando esté definido). Demostrar que se verifica que $xy - x - y = 0$.

4. Clasificar la ecuación anterior en $\mathbb{R}^2$. Hallar sus asíntotas, si las tiene.

EJERCICIO 30.– Determinar las cónicas que pasan por los puntos (1:0:0), (1:1:0), (1:0:1) y son tangentes a las rectas $3x_1 - x_2 = 0$, $3x_0 - 3x_1 + 5x_2 = 0$.

EJERCICIO 31.– Determinar las cónicas que pasan por los puntos (1:0:1), (2:1:3), (3:1:5) y son tangentes a las rectas $x_1 = 0$, $x_0 - 2x_1 = 0$.

EJERCICIO 32.–

a) Determinar la(s) cónica(s) proyectiva(s) que pasan por los puntos $(0 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)$ y son tangentes a las rectas $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ y $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

b) Sean C y D dos cónicas del plano euclídeo, no degeneradas, de ejes comunes e_1 y e_2. Razonar si los ejes de las cónicas no degeneradas del haz lineal definido por C y D son los mismos. Problema análogo cuando C y D tienen focos comunes F_1 y F_2.

EJERCICIO 33.– *junio 99*

Se considera el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sumergido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ al modo usual, siendo $H : x_0 = 0$ la recta del infinito.

1. Sean r_1, r_2, r_3, r_4 cuatro rectas afines concurrentes en un punto O. Si L_1 y L_2 son rectas proyectivas que no pasan por O, probad que

$$|\overline{r}_1 \cap L_1, \overline{r}_2 \cap L_1, \overline{r}_3 \cap L_1, \overline{r}_4 \cap L_1| = |\overline{r}_1 \cap L_2, \overline{r}_2 \cap L_2, \overline{r}_3 \cap L_2, \overline{r}_4 \cap L_2|$$

A este número común se denominará, por tanto, razón doble de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4, y lo notaremos $|r_1, r_2, r_3, r_4|$.

2. Sean m_1, m_2, m_3, m_4 las pendientes de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4, respectivamente. Hallad las coordenadas de los puntos $\overline{r}_i \cap H$, i =1,2,3,4. Probad que

$$|r_1, r_2, r_3, r_4| = \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_4)(m_2 - m_3)}$$

3. Construid geométricamente el cuarto armónico del eje de abcisas (r_1), el eje de ordenadas (r_2) y la bisectriz del primer cuadrante (r_3).

EJERCICIO 34.– *Subir nota junio 99*

Se considera el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sumergido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ al modo usual, siendo $H : x_0 = 0$ la recta del infinito.

1. Sean r_1, r_2, r_3, r_4 cuatro rectas afines concurrentes en un punto O. Si L_1 y L_2 son rectas proyectivas que no pasan por O, probad que

$$|\overline{r}_1 \cap L_1, \overline{r}_2 \cap L_1, \overline{r}_3 \cap L_1, \overline{r}_4 \cap L_1| = |\overline{r}_1 \cap L_2, \overline{r}_2 \cap L_2, \overline{r}_3 \cap L_2, \overline{r}_4 \cap L_2|$$

A este número común se denominará, por tanto, razón doble de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4, y lo notaremos $|r_1, r_2, r_3, r_4|$.

2. Sea ABC un triángulo cualquiera, a' la paralela a BC por A, demostrad que el cuarto armónico de AB, AC y a' es la mediana del triángulo desde A.

3. Sean m_1, m_2, m_3, m_4 las pendientes de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4, respectivamente. Probad que

$$|r_1, r_2, r_3, r_4| = \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_4)(m_2 - m_3)}$$

4. Sean $A=(1,0)$, $B=(-1,0)$, $C=(0,1)$, $D=(0,-1)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ sea Γ_λ el lugar de los puntos P tales que $|PA, PB, PC, PD| = \lambda$. Hallad una cónica Q_λ que contiene a Γ_λ. Demostrad que todas las cónicas Q_λ forman parte de un haz $\mathcal{H}$ cuya base hay que hallar.

Ejercicio 35.– En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ se pide:
a) Probar que la tangente a una cónica no degenerada en un vértice V es perpendicular al eje que pasa por V.
b) Hallar las hipérbolas equiláteras con vértice $V=(1,0)$ y asíntota $y=2x$.

Ejercicio 36.–

1. Deducir razonadamente si dos parábolas superosculatrices en el mismo punto del infinito tienen el mismo eje.
2. Determinar las cónicas euclídeas que tienen $F_1=(0,0)$ y $F_2=(2,2)$ como focos y tienen una asíntota paralela a la recta $2y-x=0$.

Ejercicio 37.– Calcular la ecuación de la(s) parábola(s) osculatrices con la cónica $3x+x^2-y^2=0$ en el punto $(0,0)$ y pasan por el punto $(1,2)$.

Ejercicio 38.– *subir nota junio 98*

Sea C un cono proyectivo de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Sea $P_0 \in \mathcal{V}(C)$ un punto no singular. Mediante razonamiento geométrico, determinar la variedad polar de una recta que pase por P_0. (Considérense los distintos casos que pueden presentarse).

Ejercicio 39.– *subir nota junio 98*

Si una cónica no degenerada Q es tangente a dos rectas secantes r_1 y r_2, probar que el producto de las distancias de un punto cualquiera de Q a las dos tangentes está en una relación constante con el cuadrado de la distancia de ese punto a la cuerda de contacto. *Indicación: considerar el haz de cónicas bitangentes a r_1 y r_2 en los puntos de contacto con Q.*

Ejercicio 40.– Se considera el espacio afín euclídeo $X=\mathbb{R}^3$ inmerso en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de la forma habitual. Notemos $\mathcal{H}$ el haz de cuádricas proyectivas generado por

$$\begin{array}{ll} Q_1: & x_3^2 - x_1^2 + x_0x_2 - 2x_0x_3 \\ Q_2: & x_3^2 - x_0x_3 \end{array}$$

Se pide:

a) Calcular las cuádricas degeneradas de $\mathcal{H}$ y clasificarlas. Describir sus puntos base y fundamentales y su posición relativa, ayudados por un dibujo

b) Clasificar las cuádricas afines determinadas por las cuádricas de $\mathcal{H}$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus vértices.

c) Consideremos los planos $\pi_0=\{z=0\}, \pi_1=\{z=1\}$ y en ellos las parábolas

$$C_0=\{z=0, y-x^2=0\}, \qquad C_1=\{z=1, y-x^2-1=0\}.$$

Hallar un paraboloide que las contenga y que pase por el punto $(0,0,3)$. ¿De qué tipo de paraboloide se trata?

Ejercicio 41.– En $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran cuatro puntos A,B,C,D en posición general. Sea $\mathcal{F}$ la familia de cuádricas proyectivas reales que contienen a la reunión:

$$(A+B)\cup(B+C)\cup(C+D)\cup(D+A).$$

Se pide:

1. Probar que $\mathcal{F}$ no contiene ni conos ni cuádricas de puntos elípticos. (*Indicación: Puede ser útil usar razonamientos de tipo geométrico*).
2. Probar que $\mathcal{F}$ es un haz de cuádricas y que sólo contiene dos cuádricas degeneradas, a saber, los pares de planos

$$(A+r)\cup(C+r) \quad y \quad (B+s)\cup(D+s)$$

donde $r=B+D$ y $s=A+C$. (*Indicación: Puede ser útil usar razonamientos de tipo algebraico*).

3. Para los apartados que siguen supondremos que $A = (0:0:1:0), B = (1:0:0:0), C = (1:1:1:1)$, $D = (0:0:0:1)$. Se considera $\mathbb{R}^3$ inmerso en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de la manera habitual (i.e. con $(x_0 = 0)$ como plano del infinito). Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ la familia de cuádricas afines inducida por $\mathcal{F}$. Clasificar las cuádricas de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

4. Probar que $P = (1:1:2:1)$ es un punto fundamental del haz $\mathcal{F}$. Calcular la ecuación del cono tangente, de vértice P, a cada una de las cuádricas no degeneradas de $\mathcal{F}$.

5. Sea π el plano $(x_2 = 0)$. Sea $\mathcal{H}$ la familia de cónicas que se obtiene al cortar las cuádricas de $\mathcal{F}$ con π.
   (a) Probar que $\mathcal{H}$ es un haz de cónicas en el plano π.
   (b) ¿ De qué tipo es ?
   (c) Hallar las cónicas degeneradas, los puntos base y los puntos fundamentales de $\mathcal{H}$.
   (d) Hallar el lugar geométrico de los centros de las cónicas afines inducidas por las de $\mathcal{H}$.

6. Sea Q la cónica de $\mathcal{H}$ que pasa por el punto $R = (0:4:0:-3) \in \pi$. Clasificar la cónica afín correspondiente y calcular su(s) foco(s) (si lo(s) tuviera).

Ejercicio 42.– En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ se considera la familia $\mathcal{F}$ de cuádricas definida por la ecuación:

$$(1+\lambda)x_0^2 + 2\lambda x_0x_1 + 2\lambda x_0x_3 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + \lambda x_3^2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:
a) Probar que la familia $\mathcal{F}$ no es un haz de cuádricas en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y probar que forma parte de un haz $\mathcal{H}$ de cuádricas en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Hallar las cuádricas degeneradas de $\mathcal{F}$.
b) Hallar la ecuación de un plano tangente común a todas las cuádricas de $\mathcal{F}$ y clasificar las cuádricas de la familia $\mathcal{F}$.
c) Se considera el espacio afín $\mathbb{R}^3$ sumergido en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ tomando el plano de ecuación $x_0 = 0$ como plano del infinito. Sea $\mathcal{F}_a$ la familia de cuádricas afines obtenida de $\mathcal{F}$. Clasificar las cuádricas de $\mathcal{F}_a$.
d) Hallar, si existe, la ecuación de un paraboloide elíptico en $\mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(0,-1,-1)$ y cuya sección por el plano $x+y=1$ sea la cónica de ecuación $3-2y+2z+z^2=0$. ¿Cuántos paraboloides elípticos cumplen las condiciones anteriores?
e) En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ se consideran las curvas $[F]$ y $[G]$ definidas por $F = x_0^3 + 2x_0^2x_1 + 2x_0^2x_2 + x_0x_2^2$, $G = 2x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_2^2$. Hallar la multiplicidad de intersección de $[F]$ y $[G]$ en el punto $(0:1:0)$.

Ejercicio 43.–

1. Deducir razonadamente si un plano tangente a dos cuádricas proyectivas distintas lo es también a todas las del haz que generan.

2. Clasificar y hallar el centro, planos principales y cono asintótico de la cuádrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $1 - 2x + 2xz + y^2 = 0$.

Ejercicio 44.– *Enero 00*

En el espacio afín eucídeo $\mathbb{R}^3$ consideramos la cuádrica $\mathcal{Q}$ de ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 10yz + 4z^2 - 1 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla.

2. Calcular su centro, sus direcciones principales, sus planos principales y sus ejes.

3. Calcular su cono asintótico (es decir, el cono tangente con vértice en el centro).

Ejercicio 45.– *diciembre 00*

Se da la cuádrica Q cuyo lugar tiene la ecuación siguiente en el espacio proyectivo tridimensional real:

$$x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 = 0\,.$$

Se pide:

1. Averiguar si el punto $(0:2:2:1)$ pertenece al lugar y, en caso afirmativo, hallar el plano tangente L a Q en él.
2. Clasificar la cónica intersección de L y Q.
3. Clasificar Q en el espacio proyectivo.
4. Consideremos el espacio afín que resulta de quitar al proyectivo el hiperplano $x_0 = 0$. Dar la clasificación afín de la cuádrica afín Q_a.
5. Hallar centro, ejes y planos principales de Q_a.
6. Hallar el cono asintótico de Q_a.

RESPUESTAS

1) Pertenece y el plano tangente es $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

2) Par de rectas reales secantes.

3) Cuádrica de puntos hiperbólicos

4) Hiperboloide hiperbólico

5) Centro $(0, 0, 1)$. Autovalor 1 tiene direcc. pral: (1,0,1). Autovalor -1 (doble) tiene plano de direcciones prales: (0,1,0), (1,0,-1)

6) $x_1(x_3 - x_0) - x_2^2 = 0$

Ejercicio 46.– *Enero 00*

Contestar brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos una recta.

b) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos dos rectas que se cruzan.

c) Enumerar los tipos de cuádricas afines reales cuyo lugar es vacío.

d) ¿Existen paraboloides elípticos de revolución? ¿Y paraboloides hiperbólicos de revolución? Contestar razonadamente.

e) Enumerar los tipos afines de cuádricas del espacio eucídeo tridimensional que pueden ser de revolución.

f) ¿Cuántos ejes tiene un cono afín real en el espacio euclídeo tridimensional que no sea de revolución? Contestar razonadamente.

Ejercicio 47.– Se considera el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ sumergido en el proyectivo $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ al modo usual.

1. Sea Q una cuádrica afín no degenerada en $\mathbf{R}^3$. Responded verdadero o falso a las cuestiones siguientes:
   (a) Si un plano π corta a la cuádrica-lugar afín $\mathcal{V}_a(Q)$ o $\mathcal{L}_a(Q)$ en una circunferencia (real o imaginaria), entonces todo plano paralelo a π corta también a $\mathcal{V}_a(Q)$ en una sección circular.
   (b) Q es de revolución si y sólo si una matriz A de Q tiene un autovalor de multiplicidad 2. *Atención: no confundid A con A_0.*
   (c) Si C es un cilindro tangente a Q (i.e. $\overline{C}$ es un cono proyectivo tangente a $\overline{Q}$ desde un punto del infinito), entonces la cónica de tangencia $\mathcal{V}_a(C) \cap \mathcal{V}_a(Q)$ tiene el mismo centro que Q.
2. Sea la cuádrica afín $Q : 3x^2 - 5y^2 + z^2 - 2z = 0$. Clasificadla, hallad su centro, planos principales y ejes.
3. Hallad todas las secciones circulares de Q.
4. Hallad los cilindros tangentes a Q tales que la cónica de tangencia sea una circunferencia. ¿Son cilindros circulares?

Ejercicio 48.– Consideremos la cuádrica afín Q de ecuación

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 6yz + 2 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla, hallar sus planos principales, ejes y sus vértices.

2. ¿Qué tipos de cónicas afines se pueden obtener al cortar la cuádrica Q por un plano? Dar la ecuación de algún plano afín L que corte a Q en un par de rectas imaginarias (secantes en un punto real).

Ejercicio 49.– *junio 98*

En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, se consideran, en una cierta referencia $\mathcal{R}$, dos cuádricas $\overline{Q}$ y $\overline{Q'}$. Las cuádricas afines correspondientes se expresan:

$Q : x^2 - y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$; $Q' : xz + yz + x + y = 0$

a) Calcular los puntos base y los fundamentales del haz proyectivo $\mathcal{H}(\overline{Q}, \overline{Q'})$. Clasificar las cuádricas de dicho haz.

b) Clasificar las cuádricas afines del haz $\mathcal{H}(Q, Q')$.

c) Calcular la variedad de centros de la cuádrica Q, así como sus planos asintóticos.

d) Probar que ningún plano corta a Q en una circunferencia.

Ejercicio 50.– Consideremos en el espacio proyectivo real tridimensional $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ el haz de cuádricas $\{Q_{\lambda,\mu} \ / \ (\lambda : \mu) \in \mathbf{P}_1(\mathbf{R})\}$, con

$$Q_{\lambda,\mu} = \lambda(x_0x_1 + x_0x_2) + \mu(-x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

a) $Q_{1,0}$ es un par de planos. Calcular sus polos respecto de $Q_{0,1}$ y deducir de la posición de éstos respecto de $Q_{0,1}$ los puntos base del haz, especificando si son reales o imaginarios.

b) Sin hacer cálculos, determinar cuántas cuádricas proyectivas degeneradas hay en el haz, y clasificarlas.

c) Sin hacer cálculos, clasificar las cuádricas afines no degeneradas $(Q_{\lambda,\mu})_a$ del espacio afín.

d) Calcular unas ecuaciones implícitas del lugar geométrico de los centros de las cuádricas afines anteriores.

Ejercicio 51.– Se da la familia $\mathcal{F}$ de cuádricas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de ecuaciones siguientes:

$$\lambda^2 x_0x_2 + \lambda x_1x_2 + x_0x_3 = 0$$

con λ un parámetro real. Se pide:

1. Clasificar las cuádricas degeneradas de $\mathcal{F}$.

2. Deducir si $x_0 = 0$ es un plano tangente a todas las cuádricas de $\mathcal{F}$, y hallar los puntos de tangencia en su caso.

3. Usando lo anterior, dar la clasificación de todas las cuádricas de $\mathcal{F}$, en función del parámetro λ.

4. Deducir si la recta $r : x_0 = x_1, x_2 = x_3$ es tangente a alguna cuádrica de $\mathcal{F}$.

Ejercicio 52.– En $\mathbf{R}^3$ se consideran las cuádricas de ecuaciones $Q_1 \equiv (2x+y^2+z^2 = 0)$, $Q_2 \equiv (-1+2x+2y^2+2z^2 = 0)$. Sea $\mathcal{H}$ el haz de cuádricas afines definido por Q_1 y Q_2. Se pide:

1. Clasificar las cuádricas de $\mathcal{H}$.

2. Calcular los diámetros principales de las cuádricas no degeneradas de $\mathcal{H}$.

3. Calcular la variedad de centros de las cuádricas no degeneradas de $\mathcal{H}$.

4. Calcular la ecuación de un paraboloide de vértice $(1, 0, 0)$ y pasando por la cónica de ecuaciones $(2x + 1 = 0, -1 + y^2 + z^2 = 0)$.

Ejercicio 53.– En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran, en un cierto sistema de referencia, dos cuádricas $\overline{Q}$ y $\overline{Q'}$. Las cuádricas afines correspondientes se expresan:

$$Q : x^2 - y^2 + 2x - 2y - 4 = 0; \qquad Q' : xz + yz + x + y = 0$$

Se pide:

1. Calcular los puntos base y los fundamentales del haz proyectivo $\mathcal{H}(\overline{Q}, \overline{Q'})$. Clasificar las cúadricas de dicho haz.
2. Clasificar las cuádricas afines que proceden de las proyectivas del haz anterior.
3. Calcular la variedad de centros de la cuádrica Q, así como sus planos asintóticos.

Ejercicio 54.– Probar que en la cuádrica de puntos elípticos se verifica:

a) No existen rectas autopolares.

b) Si una recta r corta a la cuádrica en dos puntos, su recta polar r' no la corta en ninguno, r y r' se cruzan, la involución de puntos conjugados sobre r es hiperbólica, y la involución de puntos conjugados sobre r' es elíptica.

c) El recíproco de b).

d) La recta polar de una recta r tangente a la cuádrica en P es asímismo tangente a la cuádrica en P.

Ejercicio 55.– Enunciar y probar los resultados análogos del ejercicio anterior para el caso de la cuádrica de puntos hiperbólicos.

Ejercicio 56.– En el plano proyectivo real y respecto de un sistema de referencia dado se consideran las cónicas de matrices siguientes:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 6 & -5 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 25 & -15 \\ 3 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

Sea H la recta $x_0 = 0$. Clasificar las cónicas afines en el plano afín resultante de quitar H. Calcular centros, diámetros, asíntotas, ejes y focos, cuando los haya.

Ejercicio 57.– *Sep. 03*
Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x - 2yz = 0$.

1. Clasifíquela.
2. Calcule sus centros, planos principales y ejes, si los hay.
3. Calcule las direcciones asintóticas. Deduzca un haz de planos paralelos, tales que cada uno de ellos corta a $\mathcal{V}(Q)$ en una única recta.
4. Sea $\overline{Q}$ la cuádrica proyectiva del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por Q, con la inmersión usual de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Compruebe que la familia $\mathcal{F}$ de rectas $\mathcal{F} = \{L_{\lambda\mu}\}_{(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}_1}$ definidas por
$$L_{\lambda\mu} \begin{cases} \lambda x_0 = 2\mu x_2 \\ \mu x_1 = \lambda x_3 \end{cases}$$
son rectas contenidas en $\mathcal{V}(\overline{Q})$. Se define la razón doble de 4 rectas de $\mathcal{F}$ como la razón doble de sus subíndices, i.e.
$$|L_{\lambda_1\mu_1} L_{\lambda_2\mu_2} L_{\lambda_3\mu_3} L_{\lambda_4\mu_4}| = |P_1 P_2 P_3 P_4| \quad \text{con} \quad P_i = (\lambda_i : \mu_i) \quad i = 1, 2, 3, 4.$$
5. Sea r la recta de ecuaciones $x_0 = x_2 = 0$ (una recta de la otra familia de $\overline{Q}$). Pruebe que
$$|L_{\lambda_1\mu_1} L_{\lambda_2\mu_2} L_{\lambda_3\mu_3} L_{\lambda_4\mu_4}| = |Q_1 Q_2 Q_3 Q_4| \quad \text{con} \quad Q_i = L_{\lambda_i\mu_i} \cap r \quad i = 1, 2, 3, 4.$$
6. Halle el cuarto armónico de las rectas: $s_1 \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad s_2 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad s_3 \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 58.– *(Dic. 03)*
1.- Calcular la ecuación general de la familia de circunferencias tangentes a la recta $y = 0$ en el origen.

2.- Calcular la ecuación del haz de cónicas superosculatrices a la parábola $x^2 - y = 0$ en su vértice.

3.- ¿Cuántas circunferencias del apartado 1 aparecen en el apartado 2? Concluir que la condición “ser superosculatriz” es una condición más restrictiva que “ser tangente”.

Ejercicio 59.– En el espacio proyectivo $\mathbb{P}_6(k)$ se considera una recta r y dos planos H_1, H_2 tales que las tres variedades se cruzan dos a dos y no existe ningún hiperplano que contenga a las tres. Se pide:

a) Calcular $\dim((r + H_1) \cap H_2)$.

b) Determinar el número de rectas secantes a las tres variedades.