Departamento de Álgebra

GEOMETRÍA

Curso 2005-06

Tema 1: El espacio afín

Ejercicio 1.–Dadas las rectas
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{4} \quad ; \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{5}$$
hallar la ecuación del plano que pasa por la primera y es paralelo a la segunda.

Ejercicio 2.–Dadas las rectas $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z \quad ; \quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$, hallar la ecuación de los planos que, pasando por cada una de ellas, son paralelos a la otra.

Ejercicio 3.–Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3,1,0)$ y es secante a las rectas
$$\left\{\begin{array}{rr} x= & 1+z \\ y= & 2z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rr} x= & -z \\ y= & 1+z \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.–Dado el tetraedro de vértices (2,3,1), $(4,-1,3)$, $(1,1,-2)$, (1,1,2), se pide hallar las ecuaciones de las rectas que unen los puntos medios de cada par de aristas opuestas. Comprobar que esas tres rectas pasan por un mismo punto, que se calculará.

Ejercicio 5.–Hallar la ecuación del lugar geométrico, de los puntos de las rectas
a) que cortan a la vez a las rectas $x=2$, $y=3$; $x=-2$, $z=-4$; $y=-3$, $z=4$.
b) paralelas al plano XOY y se apoyan en las rectas $y=2z$, $x=3$; $y=-2z$, $x=-3$.
c) paralelas al plano $3x+2y=0$ y se apoyan en las rectas $3x+2y-6z=0$, $3x-2y-6=0$; $3x+2y-12z=0$, $3x-2y-3=0$.

Ejercicio 6.–Dadas las tres rectas
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}, \quad \frac{x}{3}=y+3=\frac{z-1}{2}, \quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$$

a) Comprobar que son paralelas a un mismo plano, y hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a las tres rectas dadas.
b) Hallar todas las rectas coplanarias con las tres dadas y comprobar que todas son paralelas a un mismo plano que pasa por el origen, y cuya ecuación se pide.

Ejercicio 7.–Sea X un espacio afín de dimensión 4 ó 5 según los casos. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la variedad dada por un punto P y un sistema generador de su variedad de dirección, en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{llllll}
(a) & P=(1,0,1,0) & (b) & P=(2,0,0,-2) & (c) & P=(-1,1,0,0,1) \\
 & \mathbf{a}_1=(1,1,2,-1) & & \mathbf{a}_1=(1,1,0,1) & & \mathbf{a}_1=(1,1,2,-1,0) \\
 & \mathbf{a}_2=(0,1,-3,0) & & \mathbf{a}_2=(0,0,0,1) & & \mathbf{a}_2=(0,1,-3,0,1) \\
 & \mathbf{a}_3=(1,2,-1,1) & & \mathbf{a}_3=(1,0,1,2) & & \mathbf{a}_3=(-1,0,-5,1,1) \\
 & \mathbf{a}_4=(2,3,1,-2) & & \mathbf{a}_4=(2,1,1,4) & & \mathbf{a}_4=(0,2,-6,0,2)
\end{array}$$

Ejercicio 8.–En cada uno de los siguientes casos, dar un punto y una base de la variedad de dirección, las ecuaciones paramétricas, y un conjunto de puntos afínmente independientes que generen la variedad lineal afín dada.(El apartado (c) en dimensión 5).

$$\begin{array}{llllll}
(a) & x_1-x_2+x_4 & =0 & (b) & x_1+x_2+x_4 & =1 \\
 & 3x_1+2x_2-x_3-2x_4 & =1 & & x_2+x_3+x_4 & =2 \\
 & 2x_1+3x_2-x_3-3x_4 & =1 & & -x_1++x_3+x_4 & =1 \\
 & & & & x_1+2x_2+x_3+2x_4 & =3
\end{array}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \\ -x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned} \qquad (d)\quad \begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 3x_3 + 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Ejercicio 9.–Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de las variedades lineales afines generadas por los puntos:
a) $P_1 = (1,1,1,1),\ P_2 = (1,0,1,0),\ P_3 = (-1,1,0,-1),\ P_4 = (0,1,1,-1)$.
b) $P_1 = (0,-1,2,3),\ P_2 = (0,-1,2,3),\ P_3 = (1,-2,1,3),\ P_4 = (1,-3,3,6)$.
c) $P_1 = (1,0,0,4,0),\ P_2 = (1,-1,-1,-1,-1),\ P_3 = (2,0,0,0,0)$,
$P_4 = (1,0,1,0,1),\ P_5 = (3,0,1,0,1)$.

Tema 2: El retículo de las variedades lineales afines

Nota: Los siguientes siete ejercicios se refieren al espacio afín de dimensión cuatro.

Ejercicio 10.–
a) Estudiar las posiciones relativas de dos hiperplanos.
b) Determinar la condición de paralelismo de hiperplanos.

Ejercicio 11.–
a) Estudiar las posiciones relativas de un plano y un hiperplano.
b) Determinar la ecuación general de los hiperplanos que pasan por un plano

Ejercicio 12.–
a) Estudiar las posiciones relativas de dos planos.
b) Determinar la condición de paralelismo de dos planos.

Ejercicio 13.–
a) Estudiar las posiciones relativas de un hiperplano y una recta.
b) Determinar las condiciones de paralelismo de recta e hiperplano.
c) Determinar la ecuación general de los hiperplanos que pasan por una recta.

Ejercicio 14.–
a) Estudiar las posiciones relativas de una recta y un plano.
b) Determinar las condiciones de paralelismo de recta y plano.
c) Determinar la ecuación general de los planos que pasan por una recta.

Ejercicio 15.–
a) Estudiar las posiciones relativas de dos rectas.
b) Determinar la condición de paralelismo de rectas.

Ejercicio 16.–Determinar la ecuación general de:
a) Todas las rectas que pasan por un punto.
b) Todos los planos que pasan por un punto.
c) Todos los hiperplanos que pasan por un punto.

Ejercicio 17.–Sean L y L' dos variedades de un espacio afín X, dim(X)=n, tales que $\dim(L) = \dim(L') = d < n$. Probar que $L \parallel L'$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(a)\ \dim(L + L') \leq d + 1 \quad \text{y} \quad (b) L = L' \ o\ L \cap L' = \emptyset$$

Ejercicio 18.–Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales afines que se cruzan de dimensión mayor o igual que 1, y sea P un punto que no pertenece a $L_1 + L_2$. ¿Es posible encontrar una recta que pase por P y corte a L_1 y a L_2?.
Nota: Si la respuesta es afirmativa es suficiente dar un ejemplo, si es negativa hay que probarlo.

Ejercicio 19.–Estudiar las posiciones relativas de dos variedades L_1 y L_2 tales que $\dim L_1 = 1$ y $\dim L_2 = 3$, en el espacio afín de dimensión 5.

Ejercicio 20.–En el espacio afín $(X, V, +)$, sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 4, se considera un sistema de referencia fijo respecto del cual se toman coordenadas y ecuaciones. Se dan la recta r y el plano π por

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + 9 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 7 = 0 \end{cases} \qquad \pi = (1,-1,1,2) + < (1,-1,1,-1), (1,2,0,1) >$$

Se pide:
1) Determinar la posición relativa de r y π.
2) Calcular unas ecuaciones implícitas de $r+\pi$.
3) Hallar la recta s que pasa por $Q=(1,1,1,1)$ y es paralela a r. Se calculará, para ello, un punto y la dirección de s.
4) Hallar todas las rectas que sean secantes a r, s y π a la vez.

Ejercicio 21.–Se considera el punto $Q=(1,0,1,0)$ y el plano π:

$$\begin{array}{ll} x_1+x_2+x_3+x_4-4 & =0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 & =0 \end{array}$$

Hallar todas las rectas que pasen por Q, sean coplanarias con r, y cohiperplanarias con π, siendo r la recta:
a) $(2,2,0,0)+<(1,0,-1,0)>$
b) $(2,2,0,0)+<(1,1,1,1)>$.

Ejercicio 22.–Se consideran en el espacio afin real de dimensión 4 las siguientes variedades:

$$\begin{array}{ll} r_1 & : x_1=x_2=x_3=x_4 \\ r_2 & : (0,0,0,1)+<(1,0,0,0)> \\ r_3 & : (0,1,0,0)+<(0,0,a,1)> \end{array}$$

1) Hallar la posición relativa de r_1 y r_2. Hallar r_1+r_2.
2) Hallar los valores de a para los que existe una recta que se apoye en r_1, r_2 y r_3. Caso de existir, ¿es única?.

Ejercicio 23.–Sea X un espacio afín de dimensión 4. Consideremos el hiperplano $H: x_1-x_3-x_4=0$, la recta $r:(0,0,1,1)+<(1,0,1,1)>$ y los planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{ll} x_1+x_2-x_3 & =0 \\ x_1+x_2-x_4 & =0 \end{array}\right. \qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{rl} x_1-x_3-x_4 & =0 \\ x_1+2x_3 & =0 \end{array}\right.$$

1) Estudiar las posiciones relativas de r y H; y de π_1 y π_2.
2) Estudiar si existen y son únicos los hiperplanos H_i, que contienen a r y π_i, para $i=1,2$.
3) Calcular todas las rectas del espacio que pasen por $P=(1,1,1,1)$ y corten a H,r,π_1 y π_2.

Tema 3: Aplicaciones afines. Afinidades

Ejercicio 24.–Sea $\mathcal{R}=\{O;\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ un sistema de referencia afín. Calcular las ecuaciones de las aplicaciones afines $f\ X\to X$ respecto de $\mathcal{R}$, tales que $f(O)=O'$, $\overrightarrow{f}(\mathbf{u})=\mathbf{u}'$, $\overrightarrow{f}(\mathbf{v})=\mathbf{v}'$, donde

a) $O'=(0,0)$ $\mathbf{u}'=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ $\mathbf{v}'=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *b)* $O'=(1,-1)$ $\mathbf{u}'=3\mathbf{u}-\mathbf{v}$ $\mathbf{v}'=-3\mathbf{u}+\mathbf{v}$
c) $O'=(2,1)$ $\mathbf{u}'=-2\mathbf{u}$ $\mathbf{v}'=-2\mathbf{v}$ *d)* $O'=(-1,0)$ $\mathbf{u}'=-\mathbf{u}$ $\mathbf{v}'=\mathbf{v}$

(Las coordenadas de O' siempre vienen dadas respecto de $\mathcal{R}$).
Deducir en qué casos son afinidades.

Ejercicio 25.–Sea $\mathcal{R}=\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$ un sistema de referencia afín. Sean $P=(0,1)$, $C=(1,0)$, $D=(1,1)$ respecto de $\mathcal{R}$. Calcular las ecuaciones, respecto de $\mathcal{R}$, de las aplicaciones afines $f\ X\to X$ tales que $f(P)=P'$, $f(C)=C'$, $f(D)=D'$, donde:

a) $P'=(0,0)$ $C'=(1,0)$ $D'=(0,1)$
b) $P'=(2,1)$ $C'=(2,-1)$ $D'=(-1,1)$
c) $P'=(-1,-1)$ $C'=(1,1)$ $D'=(0,-1)$
d) $P'=(1,-2)$ $C'=(0,1)$ $D'=(1,0)$.

Decir en qué casos se obtiene una afinidad.

Ejercicio 26.–En el plano afín X se consideran las siguientes aplicaciones $f\ X\to X$. Deducir si son o no aplicaciones afines, y en su caso afinidades:

a) $f(x,y)=(x+1,y-1)$ *b)* $f(x,y)=(2x,2y)$
c) $f(x,y)=(2x-1,3y+2)$ *d)* $f(x,y)=(3x+1,0)$
e) $f(x,y)=(x^2+1,y)$.

Ejercicio 27.–Sea $\mathcal{R}$ el sistema de referencia afín canónico y $\mathcal{R}' = \{O'; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ con $O' = (1,0)$ respecto de $\mathcal{R}$, $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$. Calcular las ecuaciones de las aplicaciones afines del ejercicio anterior respecto de $\mathcal{R}'$.

Ejercicio 28.–Sea r la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ y f una aplicación afín. Caracterizar $f(r)$ en cada caso. Poner ejemplos utilizando los ejercicios anteriores.

Ejercicio 29.–Idem con $f^{-1}(r)$.

Ejercicio 30.–Calcular los puntos, rectas y direcciones dobles de las afinidades dadas por las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 31.–En el plano afín ordinario, sea $f : X \to X$ la proyección paralela al vector $\mathbf{u}$ sobre la recta r, donde el vector no es de la dirección de la recta. La proyección f se define de la siguiente manera: para cada punto P del plano, $f(P)$ es el punto de corte de r con la recta $P + < \mathbf{u} >$. Demostrar que f es una aplicación afín. Encontrar las ecuaciones de las proyecciones siguientes:

$$a)\ r : 2x + y - 5 = 0 \quad \mathbf{u} = (1,1)$$
$$b)\ r : x - y = 0 \quad \mathbf{u} = (1,0)$$

Ejercicio 32.–Se consideran los puntos $A = (1,0)$ y $B = (-1,0)$.
a) ¿Qué transformación es la que asocia a cada punto P del plano, el baricentro del triángulo $\triangle ABP$?
b) Hallar el lugar geométrico de dicho baricentro cuando P recorre la recta $2x + y = 6$.

Ejercicio 33.–En el plano afín ordinario se pide:
1) Hallar las ecuaciones de todas las afinidades que dejan invariantes los puntos (1,1), (2,3) y la recta $x + y = 2$.
2) Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos transformados del que tiene como vértices (0,0), (1,0), (0,1), por todas las afinidades anteriores.

Ejercicio 34.–Se considera el conjunto G de todas las afinidades que dejan fijas las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Se pide:
1) Razonar si G es, o no, un grupo, para la composición de aplicaciones.
2) Hallar la matriz general de los elementos de G.
3) El grupo G contiene homotecias. Hallar sus centros. ¿Contiene G traslaciones distintas de la identidad?
4) Hallar los puntos y rectas dobles de una afinidad de G que no sea una dilatación.

Ejercicio 35.–Se recuerda que un sistema de referencia afín es un objeto compuesto de un punto (llamado *origen*) y una base vectorial. Una afinidad plana f se llama una *cizalladura* si existe un sistema de referencia afín en el cual f puede escribirse con unas ecuaciones del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{1}$$

con $\lambda \neq \mu$.
1.- Hallar las direcciones dobles de una cizalladura.
2.- Discutir, según los casos, la configuración de puntos dobles de una cizalladura.
3.- Averiguar si la afinidad de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

es o no una cizalladura. Caso afirmativo, hallar un sistema de referencia en el cual sus ecuaciones sean del tipo (1).

Ejercicio 36.–Sea $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia afín, y respecto a él consideremos los puntos $A_0 = (1,0)$, $A_1 = (2,-1)$, y la recta $r : 2x + y = 1$. Para cada punto $A_2 \in r \setminus \{(0,1)\}$, sea f la afinidad determinada por $f(A_0) = A_0$, $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = G$, siendo G el baricentro del triángulo $A_0A_1A_2$. Se pide:
Hallar la forma general de la matriz de f respecto de $\mathcal{R}$. ¿Existe algún A_2 para el que f sea homotecia?

Ejercicio 37.–En el espacio afín $X = \mathbb{R}^3$, se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. Sea f una afinidad de la que se sabe que
a) el plano $\pi : x + y + z = 0$ es invariante por f, y la restricción de f a π es una homotecia de razón 3.
b) la recta $r : 2x + 4y + 3z = 0$, $x + 2y + z = 0$ es invariante por f, y la restricción de f a r es una homotecia de razón 2.
Se pide:
1) Demostrar que el punto $r \cap \pi$ es invariante por f.
2) Hallar una base vectorial $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $D(\pi) =< v_1, v_2 >$, y $D(r) =< v_3 >$. Calcular $\overrightarrow{f}(v_i)$, i =1,2,3, y, a partir de ellos, $\overrightarrow{f}(u_i)$, i =1,2,3.
3) Calcular las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{R}$, y sus puntos dobles.

Ejercicio 38.–Sea el espacio afín de dimensión 3.
(Parte 1) Fijemos una recta r y un plano π, tales que r corta a π. Consideremos la aplicación $f : X \to X$ definida por $f(P) = P + 2\overrightarrow{PP'}$, con $P' = \pi \cap (P + D(r))$. Demostrar que:
1.a) f es biyectiva.
1.b) el conjunto de puntos dobles de f es el plano π.
1.c) $\forall P$, $\overrightarrow{Pf(P)} \in D(r)$.
1.d) $\forall P$, el punto medio del segmento $\overline{Pf(P)}$ pertenece a π.
(Parte 2)
2.a) Calcular las ecuaciones de f para $r : x - 1 = 1 - y = z - 1$, $\pi : x + y + z = 0$. ¿Es f una afinidad?
2.b) Hallar los puntos dobles de f.

Ejercicio 39.–Sea el espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión cuatro. Demostrar que, en cada uno de los casos siguientes, las relaciones escritas definen una aplicación afin f de X y encontrar sus ecuaciones respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \mathcal{B})$. ¿Cuáles de ellas son afinidades?

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & f(1,1,0,0) = (0,0,-2,1) \\
& f(2,1,0,0) = (0,1,2,-1) \\
& f(1,2,0,0) = (-1,1,0,0) \\
& f(1,1,1,0) = (1,-1,1,-1) \\
& f(1,1,0,1) = (-1,1,-3,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b) \quad f(-1,2,1,1,) &= (2,3,-2,2) \\
f(0,2,1,1) &= (2,2,-1,1) \\
f(-1,3,1,1) &= (3,4,-3,4) \\
f(-1,2,2,1) &= (0,2,0,-1) \\
f(-1,2,1,2) &= (4,4,-3,4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c) \qquad & f(0,1,1,0) = (0,0,1,0) \\
& f(1,1,1,0) = (0,1,-1,2) \\
& f(0,2,1,0) = (-1,1,0,1) \\
& f(0,1,2,0) = ((1,-1,3,-1) \\
& f(0,1,1,1) = (-2,2,-2,2)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 40.–Para cada una de las aplicaciones afines del ejercicio anterior, calcular la imagen directa e inversa de la recta $r = (0,0,0,0)+ < (0,1,-1,-1) >$.

Ejercicio 41.–Demostrar que las relaciones:

$$
\begin{aligned}
f(0,1,1,0) &= (4,1,-1,10) \\
f(1,1,1,0) &= (4,0,0,9) \\
f(0,2,1,0) &= (5,2,-1,11) \\
f(0,1,2,0) &= (6,2,-2,12) \\
f(0,1,1,1) &= (-3,-7,7,-1)
\end{aligned}
$$

definen una aplicación afín. Para cada $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq 4$, y cada $L \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$, $\dim L = r$, hallar las posibles dimensiones de $f(L)$ y $f^{-1}(L)$. Caracterizar las variedades L para las que se presenta cada posibilidad.

Ejercicio 42.–Mismo enunciado del Ejercicio anterior con los datos

$$\begin{aligned} f(0,1,1,0) &= (-1,2,-6,6) \\ f(1,1,1,0) &= (0,4,-8,10) \\ f(0,2,1,0) &= (-2,2,-10,8) \\ f(0,1,2,0) &= (0,5,-11,13) \\ f(0,1,1,1) &= (0,3,-5,7) \end{aligned}$$

Ejercicio 43.–En el espacio afín $\mathbb{R}^4$ se consideran las variedades dadas por

$$L_1 = (1,-1,1,-2) + < (-1,-1,1,0) >$$

$$L_2 = (1,2,3,4) + < (0,2,1,0), (0,0,1,2) >$$

$$L_3 = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 & = 4 \end{array} \right.$$

Hallar la posición relativa de L_1 y L_2 y la proyección de L_1 sobre L_2 paralela a L_3.

Tema 4: El espacio euclídeo

Ejercicio 44.–En el espacio afín euclídeo de dimensión cuatro, y con respecto a un sistema de referencia métrico , se dan las variedades lineales siguientes:

$$\begin{array}{rl} r: & (1,-2,-4,-1) + <(0,3,5,2)> \\ r': & (1,3,1,1) + <(0,1,-1,1)> \\ \pi: & (0,5,5,4) + <(0,2,3,1),(-1,1,2,1)> \end{array}$$

Se pide:
1) Hallar las posiciones relativas de r y π, y de r y r'.
2) Hallar todas las rectas secantes a r, r' y paralelas a π.
3) Hallar la recta perpendicular a r y π, y secante a ambas.
4) Hallar las ecuaciones de la homotecia h de centro $(1,3,-1,3)$ que lleva r en una recta que corta a π. Calcular $h(\pi)$.

Ejercicio 45.–Responder a las siguientes cuestiones: sobre espacios afines y euclídeos de la dimensión que se indica.
1) En un espacio afín de dimensión cuatro se dan dos rectas r, s que se cruzan y un punto P. Dar una condición necesaria y suficiente para que por P no pase ninguna recta t secante a la vez a r y s.
2) En un espacio afín de dimensión cuatro se dan tres rectas r, s, t que se cruzan dos a dos y no hay ningún subespacio propio que contenga a las tres. Decir cuántas rectas son secantes, a la vez, a r, s, t.
3) En un espacio euclídeo de dimensión tres se dan tres rectas que se cruzan dos a dos. Dar una condición necesaria y suficiente para que exista una perpendicular común a las tres.
4) Hallar, si existe, la perpendicular común a las rectas

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3+\lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases}$$

5) Hallar el lugar geométrico de las rectas del espacio tridimensional que se apoyan a la vez en

$$r \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad t \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 46.–En el espacio euclídeo de dimensión 4, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se consideran las siguientes variedades lineales:

$$L_1: \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 = (1,-1,3,3) + <(2,0,2,-1),(1,3,1,4)>,$$

$$L_3 = (1,-2,5,0)+ <(1,1,1,2)> .$$

Se pide:
1) Averiguar si $L_1 \perp L_2$.
2) Hallar los hiperplanos que pasan por L_3 y son paralelos a L_1. ¿Cuántas soluciones hay?.
3) Dar una condición para que tenga más de una solución el problema de hallar un hiperplano que pase por una recta y sea paralelo a un plano.
4) Hallar una perpendicular común a L_2 y L_3. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 47.–Supongamos que
1) el universo U es un espacio euclídeo de dimensión $n > 3$,
2) la tierra T es una variedad lineal afín tridimensional $T \subset U$,
3) existe otra tierra $T' \subset U$ tridimensional y no paralela a T'.
Se pide:
a) Discutir según los valores de $n = 4$ ó 5 si $T \cap T'$ puede ser vacío. Idem si $T \cap T'$ puede ser un punto.
b) Sean $n = 5$, $T : \{x_4 = 0, x_5 = 1\}$, $T' : \{x_1 + x_4 = 1, x_4 = 1\}$
b1) ¿Desde qué puntos del universo, que no estén en $T \cup T'$, se puede emitir un rayo que toque a las dos tierras T y T'?
b2) Hallar el punto de T desde donde sería más económico emitir un rayo que llegara a T'. Indicar el punto de llegada.
Nota: se supone que los rayos siguen una trayectoria rectilínea.

Ejercicio 48.–En el espacio euclídeo de dimensión 4 se considera la recta r y los planos π_1, π_2 dados por

$$r = (2,2,2,3)+ < (1,1,1,1) >,$$

$$\pi_1 = (4,0,2,1)+ < (1,1,0,0),(-1,0,2,0) >,$$

$$\pi_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

Se pide:
1). Hallar las posiciones relativas de r y π_1, y de π_1 y π_2.
2). Hallar la proyección de r sobre π_1 paralelamente a π_2.
3). Hallar todas las rectas secantes a r, a π_1 y paralelas a π_2.
4). Hallar la perpendicular común a r y π_1 y la mínima distancia entre ambas.

Ejercicio 49.–En el espacio euclídeo de dimensión 4, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se da el punto $P = (0,8,4,6)$, la recta $r = (1,-1,0,1) + \langle(1,3,0,3)\rangle$, y los planos

$$\pi_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - 1 & = & 0 \\ -x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 & = & 0 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_4 + 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se pide:
1. Hallar las ecuaciones (matriz) de la proyección sobre π_1 paralelamente a π_2.
2. Hallar los pies y la dirección de la perpendicular común a r y π_1.
3. Hallar todas las rectas que pasen por P y sean secantes a r y π_1.

Ejercicio 50.–En el espacio afín euclídeo $(X, V, +)$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 4, fijado un sistema de referencia, se dan los planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : (0,0,0,0) + \langle(1,2,1,1),(1,0,0,0)\rangle.$$

Se pide:
1.- Estudiar su posición relativa.
2.- Determinar una perpendicular común a ambos planos y sus respectivos pies. ¿Es única?

Ejercicio 51.–En $\mathbb{R}^4$ se consideran, respecto de una cierta referencia, la recta r y el plano π dados por:

$$r : (1,0,0,0) + \langle(a,0,0,1)\rangle,$$

$$\pi : (1,4,0,5) + \langle(1,2,0,3),(2,3,0,4)\rangle$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Se pide:
1.- Determinar la posición relativa de r y π según los valores del parámetro a.
2.- Discutir la existencia de la perpendicular común a r y π según los valores de a. Cuando existe, ¿es única?
3.- Para $a = -1$, hallar la distancia entre r y π.

Tema 5: Movimientos y semejanzas

Ejercicio 52.–En el plano afín euclídeo, X, se consideran la recta r y un vector $\mathbf{u} \notin D(r)$. Sea $f : X \to X$, la aplicación del plano tal que a cada punto $P \in X$ le asocia el punto $f(P) = P + \lambda\overrightarrow{PP'}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P' = r \cap (P + \langle \mathbf{u} \rangle)$. Se pide:
1.- Probar que f es aplicación afín. ¿Para qué valores de λ es afinidad?
2.- Hallar los puntos, direcciones y rectas dobles de f.
3.- En los apartados siguientes se considerará fijado un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}$. Dar la ecuación de f si $r : x + y - 2 = 0$ y $\mathbf{u} = (1, 1)$. ¿Para qué valores de λ es f movimiento?
4.- Sea la recta $s : 2x + 2y - 1 = 0$ y sea T un triángulo que tiene un lado sobre r y el vértice opuesto sobre s. Hallar el lugar geométrico de los baricentros de $f(T)$ para $\lambda = 2$.

Ejercicio 53.–Se considera el plano afín X y en él un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Se pide:

1. Hallar la matriz, respecto de $\mathcal{R}$, de todas las aplicaciones afines que dejan invariantes los puntos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ y la dirección del vector $\mathbf{w}= (1, 1)$.

2. Entre todas las aplicaciones afines anteriores hay una que no es afinidad: hallar su ecuación y comprobar que se trata de una proyección paralela del plano sobre la recta AB paralelamente al vector $\mathbf{w}$.

3. Entre todas las afinidades anteriores hay un movimiento distinto de la identidad: clasificarlo y hallar sus elementos geométricos.

Ejercicio 54.–Sea M el conjunto de todos los movimientos del plano que dejan invariante la recta $r : x = 0$.
1) Determinar los movimientos de M. Calcular su expresión matricial general.
2) Sea s la recta $y = 0$, y O el punto (0,0). Si f es un movimiento tal que $f(s) = r$, ¿es cierto que $f(O) = O$? ¿por qué?
3) Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$ y además $f(O) = O$. (hay 4)
4) Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$.

Ejercicio 55.–Clasificar y hallar los elementos invariantes de los movimientos cuyas matrices se dan a continuación

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 20/9 & 5/9 & -4/9 \\ 0 & 4/9 & -8/9 & 1/9 \\ 0 & 4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 0 & 7/9 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 16/19 & 92/19 & -18/19 \\ 0 & -18/19 & 1/19 & 6/19 \\ 0 & 1/19 & -18/19 & 6/19 \\ 0 & 6/19 & 6/19 & 17/19 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 38/5 & -1/5 & -3 \\ 0 & -11/15 & 2/15 & -2/3 \\ 0 & 2/15 & -14/15 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & -26/9 & 16/9 & -2/9 \\ 0 & -4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 0 & -7/9 & -4/9 & -4/9 \\ 0 & -4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 56.–En el espacio euclídeo tridimensional, sea f un movimiento. Estudiar las rectas y planos dobles de f según el tipo de movimiento que sea f.

Ejercicio 57.–Para las tres primeras cuestiones se considerará fijado un espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión $n > 1$ sobre un cuerpo k. Para cada una de ellas, se trata de decir si es verdadero o falso el enunciado. Para que una cuestión se considere bien contestada deberá contener una respuesta y una justificación.

Para la última cuestión se deberá tener en cuenta que los elementos de un movimiento son: los planos, ejes o centros de simetría; los planos o ejes, y los vectores desplazamiento, en las simetrías con deslizamiento; los vectores de las traslaciones; los ejes y ángulos de giros (y los vectores desplazamiento en el caso de movimientos helicoidales); y los ejes de giro y planos de simetría en las simetrías con giro (simetrías alabeadas).
1). Dada una recta de X, se puede dar el caso de que se cruce con un hiperplano, si la dimensión n es suficientemente alta.
2). Sean H un hiperplano y r una recta secante a él. Las rectas secantes a r y paralelas a H rellenan el espacio (esto es, por cada punto del espacio pasa una de ellas).

3) Se toma $n = 4$, dos variedades lineales L_2, L'_2 de dimensión 2 tales que $L_2 + L'_2 = X$ y $L_2 \cap L'_2$ es un punto, y se designa por f a la proyección sobre L_2 paralelamente a L'_2. Si r es una recta secante a L'_2, entonces $\dim f^{-1}f(r) = 3$.
4). En el espacio euclídeo tridimensional, con coordenadas (x, y, z), se consideran las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 3y + 3z + 1 & = & 0 \\ x + 6y - 3z - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$r_2 = (3, 4, 1) + < (0, 1, -1) > .$$

Probar que se cruzan y calcular la perpendicular común, dando su dirección y sus pies en ambas rectas.
5). Se da el movimiento f del espacio euclídeo tridimensional cuyas ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -14/3 & -4/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Decir de qué tipo es y calcular sus elementos.
Ejercicio 58.–Responder a las siguientes cuestiones de geometría del espacio:
1). Escribir la lista completa de las posiciones relativas de dos planos en un espacio de dimensión 5.
2). En el espacio tridimensional, hallar la ecuación de la simetría σ_3 de plano $x + y - z = 0$.
3). Hallar la ecuación del movimiento $f = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$, donde σ_1 es la simetría de plano $x = 0$, y σ_2 la de plano $y = 0$.
4). Decir qué tipo de movimiento es f y calcular sus elementos.
Ejercicio 59.–

1. Clasificar y descomponer como producto de simetrías axiales el movimiento de $\mathbb{R}^2$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Probar que el movimiento de $\mathbb{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede escribirse como producto de dos simetrías planas.

Ejercicio 60.–En el espacio afín euclídeo $(X, V, +)$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 3, fijado un sistema de referencia métrico, se da la transformación $f : X \to X$, definida por:

$$f(x, y, z) = (z, x, y).$$

Se pide:
1.- Demostrar que f es un movimiento.
2.- Escribir sus ecuaciones, estudiar de qué tipo es y determinar sus elementos geométricos.
Ejercicio 61.–En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se da la transformación:

$$f(x, y, z) = (\frac{x - 2y + 2z}{3} + 4, \frac{y + 2z - 2x}{3} + 4, \frac{z + 2x + 2y}{3})$$

Determinar si es un movimiento y de qué tipo, estudiando sus elementos geométricos.
Ejercicio 62.–Clasificar las siguientes semejanzas dando sus elementos geométricos:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1996 \\ 0 & -1996 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 63.–Sea $T = ABC$ un triángulo, sea T' el triángulo de vértices A', punto medio de $\overline{BC}$, B', punto medio de $\overline{AC}$ y C', punto medio de $\overline{AB}$. Probar que T y T' son semejantes y encontrar todas las semejanzas que llevan T en T', distinguiendo los casos en que T es escaleno, isósceles o equilátero.

Ejercicio 64.–Sea $T = ABC$ un triángulo rectángulo en A, no isósceles, y sea A' el pie de la altura desde A. Probar que los triángulos T, $T' = ABA'$ y $T'' = ACA'$ son semejantes. Hallar todas las semejanzas que transforman T en T' y T' en T''.

Ejercicio 65.–Sean los puntos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 1)$, $E = (2, 4)$ y $F = (0, 4)$. Hallar todas las semejanzas que transforman el rectángulo $L = ABCD$ en $L' = ABEF$.

Ejercicio 66.–*Nota: Las semejanzas serán descritas por sus elementos geométricos.* Se consideran los puntos:

$$A = (0, 0),\ B = (1, 0),\ C = (2, 1),\ D = (1, 1),\ E = (3, 1),\ F = (1, 3),\ G = (-1, 3)$$

sean L y L' las figuras definidas por los romboides $ABCD$ y $DEFG$. Se pide:
1.- Hallar razonadamente todos los movimientos que dejan invariante la figura L.
2.- Hallar razonadamente el conjunto de todas las semejanzas que transforman L en L'.

Tema 6: Geometría euclídea plana

Ejercicio 67.–El baricentro G de un triángulo ABC está situado sobre la recta $y = 0$. Dos de sus vértices son $A = (2, -3)$, $B = (-5, 1)$. El vértice C está sobre la recta $x = 0$. Hallar G y C.

Ejercicio 68.–De un triángulo ABC se conoce $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, la altura relativa a A: $4x - 3y + 1 = 0$, y la altura relativa a B: $7x + 2y - 22 = 0$. Hallar los vértices.

Ejercicio 69.–De un triángulo ABC se conoce: $A = (1, 3)$, y las ecuaciones de dos medianas: $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$. Hallar los vértices.

Ejercicio 70.–De un triángulo ABC se conoce: $B = (2, -7)$, y las ecuaciones de la altura $3x + y + 11 = 0$ y de la mediana $x + 2y + 7 = 0$ trazadas desde diferentes vértices. Hallar los vértices.

Ejercicio 71.–De un triángulo ABC se conoce: $C = (4, 3)$, y las ecuaciones de la bisectriz $x + 2y - 5 = 0$ y de la mediana $4x + 13y - 10 = 0$ trazadas desde un vértice. Hallar los vértices.

Ejercicio 72.–De un triángulo ABC se conoce: $A = (3, -1)$, y las ecuaciones de la bisectriz $x - 4y + 10 = 0$ y de la mediana $6x + 10y - 59 = 0$ trazadas desde diferentes vértices. Hallar los vértices.

Ejercicio 73.–De un triángulo ABC se conoce:
-) el lado AB que es la recta $x + y - 2 = 0$,
-) que está contenido en el semiplano de borde AB que contiene al origen,
-) el pie de la altura relativa al vértice C, que es el punto $P = (-1, 3)$, y la longitud de dicha altura que es $\sqrt{8}$,
-) la longitud de la mediana que pasa por C, que es 4,
-) el punto de corte de la bisectriz interior del ángulo en C, que es el punto $Q = (0, 2)$.
Hallar los vértices.

Ejercicio 74.–Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ de un triángulo valen $75^{\rm o}$ y $35^{\rm o}$ respectivamente. Hallar
a) los ángulos formados por cada dos alturas,
b) los ángulos formados por cada dos bisectrices.

Ejercicio 75.–En un triángulo los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ valen $60^{\rm o}$ y $20^{\rm o}$. Hallar el ángulo que forman la altura y la bisectriz trazadas desde el vértice A.

Ejercicio 76.–En un triángulo rectángulo en A, el ángulo $\widehat{B}$ mide $\pi/5$. Hallar
a) los ángulos que forma la altura relativa a la hipotenusa con cada cateto;
b) los ángulos que forman con la hipotenusa la mediana y la bisectriz que parten del vértice A.

Ejercicio 77.–Demostrar que el ángulo que forma la mediana con la altura de un triángulo rectángulo en A, trazadas ambas desde el vértice A, es igual a $\widehat{B} - \widehat{C}$.

Ejercicio 78.–Demostrar que en un triángulo ABC, el ángulo obtuso que forman las bisectrices de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ es igual a un ángulo recto más $\widehat{A}/2$.

Ejercicio 79.–Probar que si una recta pasa por un vértice de un triángulo y por el punto medio de una mediana relativa a otro vértice, entonces divide al lado opuesto en dos segmentos que son el uno duplo del otro.

Ejercicio 80.–Se dan las rectas

$$r_1 : x + y - 2 = 0$$
$$r_2 : x + 2y - 3 = 0$$
$$r_3 : 3x + y - 4 = 0$$
$$r_4 : -x + y - 1 = 0$$
$$r_5 : -x + y - 3 = 0.$$

Se pide:
1.- Hallar los vértices A, B, C de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es 2 y que r_1 es la mediatriz de $\overline{AB}$, r_2 es la mediatriz de $\overline{BC}$, y r_3 la de $\overline{CA}$. ¿Cuántas soluciones hay?. Hallarlas todas.
2.- Hallar los vértices B, C de un triángulo equilátero, sabiendo que $A = (1, 1)$, que B está sobre r_4 y que C está sobre r_5. ¿Cuántas soluciones hay?. Hallarlas todas.

Ejercicio 81.–Hallar los vértices de un triángulo ABC, sabiendo que el lado AB está sobre la recta $x + y = 1$, el punto medio de $\overline{AB}$ es $(3, -2)$, la altura correspondiente a dicho lado mide $3/\sqrt{2}$ y la bisectriz interior que pasa por C es $x = 2$.

Tema 7: El espacio proyectivo

Ejercicio 82.–Sean $P_1, \ldots, P_m$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)$. Probar que son linealmente dependientes si y sólo existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que P_i depende linealmente de $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m$.

Ejercicio 83.–Estudiar la posición relativa de dos variedades lineales de un espacio proyectivo de dimensión 3.

Ejercicio 84.–Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r que pasa por los puntos $(1 : -1 : 2)$ y $(2 : 1 : 1)$ de $\mathbb{P}_2(k)$. Hallar también el punto de intersección de r con la recta s de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por $r \cap s$.

Ejercicio 85.–Estudiar las posiciones relativas de tres rectas en un plano proyectivo.

Ejercicio 86.–Determinar las posiciones relativas de las siguientes ternas de rectas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & - & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ 3x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & - & x_1 & - & x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & + & 3x_1 & - & 3x_2 & = 0 \\ x_0 & & & + & 3x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & & & = 0 \\ x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ & & x_1 & + & x_2 & = 0 \end{array}.$$

Nota: En los ejercicios siguientes, si no se dice otra cosa, se considerará el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(k)$.

Ejercicio 87.–Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos $(1 : 0 : -1 : 3)$, $(2 : 1 : -1 : 1)$ y $(1 : 1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 88.–Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por los puntos $(2 : 1 : 3 : 0)$ y $(0 : 1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 89.–Sean r y s dos rectas distintas. Probar que son equivalentes:

a) r y s se cruzan.

b) Si P_0, P_1, P_2, P_3 son puntos distintos con $P_0, P_1 \in r$, $P_2, P_3 \in s$, entonces $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 90.–Determinar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a)}\quad r\left\{\begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 5\lambda & + & \mu \\ x_1 & = & -2\lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 4\lambda & + & 2\mu \\ x_3 & = & 7\lambda & + & \mu \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 4\lambda & - & 5\mu \\ x_1 & = & \lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 2\lambda & + & \mu \\ x_3 & = & \lambda & & \end{array}\right\} s$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{c} r\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 5x_1 & + & 5x_2 & & & = 0 \\ 4x_0 & - & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array}\right. \\ s = P + Q, \quad \text{con} \\ P = (7 : 5 : -2 : 0) \\ Q = (1 : 3 : 0 : -2) \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ 4x_0 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array}\right. \\ s\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 10x_0 & - & x_1 & - & 9x_2 & & & = 0 \\ -3x_0 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\text{d)}\quad \begin{array}{ccc} r = P + Q & , & s = R + S \\ P = (1 : 0 : 1 : 0) & , & R = (0 : 1 : 0 : 1) \\ Q = (1 : -1 : 0 : 0) & , & S = (0 : 0 : 1 : -1) \end{array}$$

Ejercicio 91.–Determinar las posiciones relativas de la recta r y del plano H en cada uno de los casos siguientes:

a) $r\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} 2x_0 & - & 6x_1 & + & 14x_2 & & & =0 \\ 4x_0 & - & 26x_1 & + & 14x_2 & + & 14x_3 & =0 \end{array}\right.$ $\quad H\left\{\begin{array}{c} \text{plano determinado por los puntos:} \\ (1:-1:2:3),(4:5:-1:2),(3:1:0:1) \end{array}\right.$

b) $r\left\{\begin{array}{rrrrrcrrrrr} x_0 = & - & \lambda & + & 2\mu & , & x_1 = & \lambda & + & \mu \\ x_2 = & - & \lambda & - & \mu & , & x_3 = & \lambda & + & \mu \end{array}\right.$ $\quad H\left\{\ 3x_0+2x_1+5x_2+7x_3=0.\right.$

Ejercicio 92.–Sea r la recta que pasa por los puntos $(5:4:1:6)$ y $(1:-1:2:3)$, y s la recta que pasa por los puntos $(4:5:-1:2)$ y $(3:1:0:1)$. Se pide:

a) Probar que r y s se cruzan.

b) Probar que el punto $P=(1:1:1:1)$ no está ni en r ni en s.

c) Determinar las ecuaciones de la recta t que pasa por P y que sea coplanaria con r y s (separadamente).

d) ¿Tendría solución el apartado c) si $P\in r$ ó $P\in s$ ó $r\cap s\neq\emptyset$?

Nota: Aunque el ejercicio anterior está enunciado con unos datos concretos, debe ser entendido en general, es decir, pruébese que, dados un punto P y dos rectas r y s que se cruzan en $\mathbb{P}_3$, hay una recta (única, si $P\notin r\cup s$) que se apoya en las tres variedades dadas.

Ejercicio 93.–Estudiar las posiciones relativas de dos planos de $\mathbb{P}_4(k)$, probando que dos planos se cortan en un punto si y sólo si no están contenidos en un hiperplano.

Ejercicio 94.–Estudiar las posiciones relativas de una recta y un plano en $\mathbb{P}_4(k)$.

Ejercicio 95.–Determinar las posiciones relativas de las siguientes variedades de $\mathbb{P}_4(k)$:

$$L\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x_0 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & =0 \\ & & x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & =0 \end{array}\right. \qquad M\left\{\begin{array}{rrrr} x_0 = & & & \mu \\ x_1 = & \lambda & + & \mu \\ x_2 = & -\lambda & & \\ x_3 = & & & \mu \\ x_4 = & \lambda & + & \mu \end{array}\right.$$

$N=(1:1:0:1:1)$

Ejercicio 96.–Consideremos las rectas de $\mathbb{P}_3(k)$ siguientes:

$$t\left\{\begin{array}{rrrl} x_0 & - & x_1 & =0 \\ x_2 & - & x_3 & =0 \end{array}\right. \qquad a\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_0 & + & x_2 & - & x_3 & =0 \\ x_1 & - & x_3 & & & =0 \end{array}\right.$$

$$b\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_0 & + & x_1 & - & x_3 & =0 \\ x_2 & & & & & =0 \end{array}\right. \qquad c\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & & & =0 \\ x_0 & - & x_2 & =0 \end{array}\right. \qquad d\left\{\begin{array}{rrrl} 2x_0 & - & x_3 & =0 \\ x_1 & - & x_2 & =0 \end{array}\right. .$$

Se pide:

a) Probar que por cada punto de t pasa una única recta r que se apoya en a y en c y una única recta s que se apoya en b y d.

b) Con la notación anterior, sea $P=(1:1:0:0)$, $A=r\cap a$, $C=r\cap c$, $B=s\cap b$, $D=s\cap d$. Calcular $Q=AB\cap CD$.

c) Dado cualquier otro punto de t, ¿se siguen cortando AB y CD? Razónese la respuesta.

Departamento de Álgebra

GEOMETRÍA

Curso 2005-06

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Tema 1: El espacio afín

Ejercicio 1.– $2x + y - 2z = 5$

Ejercicio 2.– a) $x + y - 5z = 3$ b) $x + y - 5z = 0$

Ejercicio 3.– No tiene solución. Existe una recta, $(x, y, z) = (3, 1, 0)+ < (-1, 1, 1) >$ que corta a r y es paralela a r'.

Ejercicio 4.– El punto de intersección es $G = (2, 1, 1)$.

Ejercicio 5.– a) $4xy - 2yz + 3xz - 24 = 0$ b) $2xz - 3y = 0$ c) $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

Ejercicio 6.–

a) $6x - 8y - 5z = 0$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} (7-6\lambda)x + (8\lambda-5)y + (5\lambda-8)z + 19\lambda - 7 & = & 0 \\ 6\lambda x - (8\lambda+5)y - (5\lambda+5)z + 9\lambda & = & 0 \end{array} \right.$

El plano $7x - 10y - 13z + 28\lambda - 7 = 0$, cuya ecuación es la suma de las dos ecuaciones anteriores, contiene a cada una de las rectas que se obtienen, para cada λ, y es siempre paralelo al plano $7x - 10y - 13z = 0$, que es el plano pedido.

Ejercicio 7.–

a) Paramétricas: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)+ < (1, 1, 2, -1), (0, 1-3, 0), (1, 2, -1, 1) >$.

Ecuaciones implícitas: $-5x + 3y + z + 4 = 0$.

b) Paramétricas: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, -2)+ < (1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 2) >$.

Ecuaciones implícitas: $x - y - z - 2 = 0$.

c) Paramétricas: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 1, 0, 0, 1)+ < (1, 1, 2, -1, 0), (0, 1-3, 0, 1) >$.

Ecuaciones implícitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -5x_1 + 3x_2 + x_3 - 8 & = & 0 \\ x_1 + x_4 + 1 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 + 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 8.–

a) $P_0 = (0, 0, -1, 0), P_1 = (1, 1, 4, 0), P_2 = (0, 1, -1, 1)$

b) $P_0 = (0, 1, 1, 0), P_1 = (1, 0, 2, 0)$

c) $\emptyset$

d) $P_0 = (-1, 0, 0, 0), P_1 = (-1, 1, 0, 0), P_2 = (0, 0, 1, 0), P_3 = (-2, 0, 0, 1)$

Ejercicio 9.– Ecuaciones implícitas:

a) $2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 0 \\ 3x + 3y + t & = & 0 \end{array} \right.$

c) $x_3 - x_5 = 0$.

Tema 2: El retículo de las variedades lineales afines

Ejercicio 10.– Aplicar la fórmula de la dimensión. En este caso puede resultar más cómodo utilizar las ecuaciones implícitas.

Ejercicio 11.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 12.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 13.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 14.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 15.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 16.– Sea el punto $P = (x_0, y_0, z_0, t_0)$.
a) $(x, y, z, t) = (x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda\mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
b) $(x, y, z, t) = (x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linealmente independientes.
c) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) + d(t - t_0) = 0$.

Ejercicio 17.– Distinguir en la primera implicación entre $L \cap L' \neq \emptyset$ y $L \cap L' = \emptyset$ y aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 18.– No, porque si existiese tal recta, estaría contenida en $L_1 + L_2$ y pasaría por P, lo que contradice las condiciones de la pregunta.

Ejercicio 19.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 20.–
1) $r \cap \pi = \{P = (1, -1, 1, 2)\}$
2) $x_1 - 2x_3 - x_4 + 3 = 0$
3) $s = (1, 1, 1, 1)+ < 1, 1, 1, -1) >$
4) Todas las rectas que pasan por P y cortan a s, esto es, las rectas de ecuación:

$$(1, -1, 1, 2)+ < (\lambda, 2 + \lambda, \lambda, -1 - \lambda) >$$

Ejercicio 21.–
a) Todas las rectas que pasan por Q y están en el plano $Q + r$ $(x_1 + x_3 = 2;\ x_4 = 0)$.
b) Solución única: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0)+ < (1, 2, -1, 0) >$.

Ejercicio 22.–
1) r_1 y r_2 se cruzan. $r_1 + r_2$ es el hiperplano de ecuación: $x_2 - x_3 = 0$.
2) Existe solución única para todo valor de $a \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

Ejercicio 23.–
1) r y H se cortan en el punto $(-2, 0, -1, -1)$. π_1 y π_2 se cortan en el punto $(0, 0, 0, 0)$.
2) El único hiperplano que contiene a r y a π_1 es $x_3 - x_4 = 0$. No existe ningún hiperplano que contenga a r y a π_2.
3) No existe ninguna. Hay una recta, $(1, 1, 1, 1)+ < (1, 0, 1, 1) >$, que verifica la condición de ser coplanaria con r, pero es paralela a r.

Tema 3: Aplicaciones afines. Afinidades

Ejercicio 24.–

$$a)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad d)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a), c) y d) son afinidades, b) no es una afinidad.

Ejercicio 25.–

$$a)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad d)\ (1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En los cuatro casos se trata de afinidades.

Ejercicio 26.– a), b) y c) son afinidades; d) no es una afinidad, pero es una aplicación afín; e) no es una aplicación afín.

Ejercicio 27.– Las matrices correspondientes son:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \quad , \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28.– Aplicar f a la recta $r = P + < \mathbf{u} >$.

Ejercicio 29.– Poner r en forma matricial y usar la ecuación de f.

Ejercicio 30.–

a) Puntos dobles: $(0,0)$. Rectas dobles: En $\mathbb{R}$ no hay; En $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{l} r_1 : (3 - i\sqrt{3})x + (3 + i\sqrt{3})y = 0 \\ r_2 : (3 + i\sqrt{3})x + (3 - i\sqrt{3})y = 0 \end{array} .$$

Direcciones dobles: En $\mathbb{R}$ no hay; En $\mathbb{C}$, $(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}), (1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$.

b) Puntos dobles: $(-3,-2)$. Rectas dobles: todas las rectas que pasan por el punto $(-3,-2)$. Direcciones dobles: todas las direcciones son dobles.

c) Puntos dobles: $(0,1)$. Rectas dobles: $x + y - 1 = 0; 2x - y + 1 = 0$. Direcciones dobles: $< (1,2) >, < (1,-1) >$.

d) Puntos dobles: $(3,-4)$. Rectas dobles: $x + y + 1 = 0$. Direcciones dobles: $< (1,-1) >$.

e) Puntos dobles: No hay. Rectas dobles: no hay. Direcciones dobles: $< (0,1) >$.

f) Puntos dobles: No hay. Rectas dobles: $y + 2 = 0$. Direcciones dobles: $< (1,0) >, < (1,1) >$.

g) Puntos dobles: Hay una recta de puntos dobles: $x = 1$. Rectas dobles: $x = k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$. Direcciones dobles: $< (0,1) >$.

h) Puntos dobles: Hay una recta de puntos dobles: $y + 1 = 0$. Rectas dobles: la recta anterior y $x - y + k = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R}$. Direcciones dobles: $< (1,0) >, < (1,1) >$.

Ejercicio 31.– La primera parte es teórica (tomar un sistema de referencia adecuado).

$$a)(1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad , \quad b)(1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32.–

a) homotecia de centro $O = (0,0)$ y razón $1/3$.

b) $2x + y = 2$.

Ejercicio 33.–

1.-

$$(1\ x'\ y') = (1\ x\ y)\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 - 2\lambda & 2\lambda \\ 0 & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \frac{1}{3}$$

2.- $3x + 3y - 2 = 0$, exceptuando el punto $(5/9, 1/9)$.

Ejercicio 34.–

1) Es inmediato.

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{pmatrix}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \neq 1$.

3) Todas las homotecias tienen el mismo centro: $(1,1)$. No hay traslaciones distintas de la identidad.

4) ($\lambda \neq \mu$) Según los valores de λ y μ puede haber un único punto doble $(1,1)$ o las rectas de puntos dobles: $x = 1, y = 1$. Rectas dobles: las paralelas a las anteriores, dependiendo también de los valores de λ y μ.

Ejercicio 35.–

1) Direcciones dobles: $<(0,1)>, <(1,0)>$.

2) Puntos dobles: si $\lambda, \mu \neq 1$, hay un único punto doble: $(\frac{a}{1-\lambda}, \frac{b}{1-\mu})$. Si $\mu \neq \lambda = 1$ y $a = 0$, hay una recta de puntos dobles: $y = \frac{b}{1-\mu}$. Si $\lambda \neq \mu = 1$ y $b = 0$, hay una recta de puntos dobles: $x = \frac{a}{1-\lambda}$. En los demás casos no hay puntos dobles.

3) Existen infinitas posibilidades. Por ejemplo: $\mathcal{R} = \{(0,0); (1,-1), (-3,2)\}$, resultando la matriz de f,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 36.– Matriz de f: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3-2a}{3a} & \frac{4a-3}{3a} \\ 0 & \frac{5a-3}{3a} & \frac{3-4a}{3a} \\ 0 & \frac{2a-3}{3a} & -\frac{3-a}{3a} \end{pmatrix}$.

f no puede ser nunca una homotecia porque tiene dos puntos dobles.

Ejercicio 37.–

1) Es inmediato puesto que r y π son invariantes por f.

2) $\vec{f}(\mathbf{u_1}) = (1,1,0)$, $\vec{f}(\mathbf{u_2}) = (-2,4,0)$, $\vec{f}(\mathbf{u_3}) = (-2,1,3)$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ El único punto doble es el $(0,0,0)$.

Ejercicio 38.–

1) Observar que $f^2 = id_X$. Puede considerarse un sistema de referencia apropiado.

2) Matriz de f: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

f es una afinidad. La variedad de puntos dobles de f es el plano π: $x + y + z = 0$.

Ejercicio 39.–

a) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ f es una afinidad.

b) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ f es una afinidad.

c) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ f no es una afinidad.

Ejercicio 40.–

$a)\quad f(r)=(1,-2,-8,4)+<(-1,1,0,0)> \quad ; \quad f^{-1}(r)=(1,1,1,1)+<(1,3,-7,-10)>$

$b)\quad f(r)=(0,0,0,-2)+<(1,1,-2,3)> \quad ; \quad f^{-1}(r)=(2,4,0,2)+<(-3,-4,0,2)>$

$c)\quad f(r)=\{(0,0,0,0)\} \quad ; \quad f^{-1}(r)=r$

Ejercicio 41.– $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & 8 & -11 \end{pmatrix}$

f es una afinidad y dim(L)=dim($f(L)$)=dim $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 42.– $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f no es una afinidad. dim Ker $\vec{f}=2$. dim $f(L)=r,\ r-1, r-2$, según sea dim $[D(L)\cap Ker\vec{f}]=0,1,2$ respectivamente.

Si $f^{-1}(L)\neq\emptyset$, dim $f^{-1}(L)=2,3,4$, según sea dim$[D(L)\cap Im\vec{f}]=0,1,2$ respectivamente.

Ejercicio 43.– L_1 y L_2 se cruzan. La proyección es un punto: $(1,1,0,-1)$.

Tema 4: El espacio euclídeo

Ejercicio 44.–

1) r y π se cruzan. r y r' se cruzan.

2) $(1,\frac{7}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3})+<(0,2,3,1)>$

3) La perpendicular común es la recta PQ con $P=(1,1,1,1), Q=(1,2,0,2)$ (pies de la perpendicular).

4) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad h(\pi)=(\frac{1}{2},4,2,\frac{7}{2})+<(0,2,3,1),(-1,1,2,1)>$.

Ejercicio 45.– 1)$P\notin r+s$ y, si $P\in r+s$, que la recta sea coplanaria, pero paralela a r o a s. 2) Considerar $(r+s)\cap t$. 3) Que las tres direcciones sean linealmente dependientes. 4) No existe 5) $xy-x+xz-zy=0$.

Ejercicio 46.–

1) L_1 es perpendicular a L_2.

2) $8x_1-2x_2+8x_3-7x_4-52=0$.

3) La condición es que r sea paralela a π.

4) $(3,-1,5,2)+<(1,0,-1,0)>$ (única).

Ejercicio 47.– a) $T\cap T'$ puede ser vacío si $n=5$. $T\cap T'$ no puede ser un punto para $n=4$ ó 5.

b1) Desde cualquier punto de U, que no esté en alguno de los hiperplanos $x_4=0$ ó $x_4=1$ (hiperplanos que contienen a una tierra y son paralelos a la otra).

b2) $P=(0,b,c,0,1)\quad,\quad Q=(0,b,c,1,1)\quad,\quad \forall b,c\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 48.– 1) r y π_1 se cruzan. π_1 y π_2 se cortan en el punto $P=(3,0,4,1)$.

2) La proyección pedida es un punto $Q=(-2,-6,2,1)$. 3) $(-2,-6,2,1)+<(4+\lambda,8+\lambda,\lambda,2+\lambda)>$.

4) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}=\frac{t-2}{-1}$. $d(r,\pi_1)=\sqrt{10}$.

Ejercicio 49.– 1) $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $P=(1,0,0,0),\ Q=(1,-1,0,1)\quad \overrightarrow{PQ}=(0,-1,0,1)$ $\qquad$ 3) $(0,8,4,6)+<(1,15,4,11)>$.

Ejercicio 50.– 1) π_1 y π_2 son disjuntos y sus direcciones tienen una recta vectorial común: $<(1,2,1,1)>$.

2) La perpendicular común no es única. Su dirección es $<(0,0,-1,1)>$ y los pies son:

$P=(1+3t,7+6t,4+3t,3+3t)$ y $Q=(1+3t,7+6t,\frac{7}{2}+3t,\frac{7}{2}+3t)$.

Ejercicio 51.– 1)

- Si $a\neq -1$, r y π se cortan en un punto.
- Si $a=-1$, r y π son paralelos y disjuntos.

2) Hablamos de perpendicular común cuando las variedades son disjuntas, en nuestro caso cuando $a=-1$, y como no se cruzan, la perpendicular común no es única.

3) $d(r,\pi)=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Tema 5: Movimientos y semejanzas

Ejercicio 52.–

1.- Considerar un sistema de referencia apropiado. Es afinidad para $\lambda\neq 1$.

2.- Si $\lambda\neq 0,1$, hay una recta de puntos dobles: r, direcciones dobles: $D(r), <\mathbf{u}>$ y rectas dobles: r y las paralelas a $\mathbf{u}$. Si $\lambda=0$ se trata de la identidad y si $\lambda=1$ es una proyección paralela.

3.- Matriz de f: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \frac{2-\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & \frac{2-\lambda}{2} \end{pmatrix}$. f es movimiento para $\lambda=0$ (identidad) y para $\lambda=2$ (simetría axial de eje r).

4.- $2x+2y=5$

Ejercicio 53.–

$$a)M(f)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\lambda}{2} & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & \frac{\lambda+1}{2} & \frac{\lambda-1}{2} \\ 0 & \frac{\lambda-1}{2} & \frac{\lambda+1}{2} \end{pmatrix} \quad b)(1,x',y')=(1,x,y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\lambda=0)$$

c) Simetría axial de eje $x+y=1$.

Ejercicio 54.– 1) Expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son respectivamente:

- traslaciones de vector $(0,\beta)$. Si $\beta=0$, es la identidad.
- simetrías centrales de centro $(0,\frac{\beta}{2})$.
- simetrías axiales de eje $y=\frac{\beta}{2}$.
- simetrías con deslizamiento de eje $x=0$ y vector $(0,\beta)$. Si $\beta=0$ es la simetría axial de eje $x=0$.

2) - Si $f(s)=r$ no tiene por qué ser $f(O)=O$. Por ejemplo, el giro de centro O y ángulo $\pi/2$, seguido de una traslación de vector $(0,1)$, lleva s sobre r y O sobre el punto $(0,1)$.

3) - giro de centro O y ángulo $\pi/2$.
- giro de centro O y ángulo $3\pi/2$.
- simetría de eje $y=x$.
- simetría de eje $y=-x$.

4) - giros de centro $(-m,m)$ y ángulo $\pi/2$.
- giros de centro (m,m) y ángulo $3\pi/2$.
- simetrías con deslizamiento de eje $y=x+m$ y vector (m,m).
- simetrías con deslizamiento de eje $y=-x+m$ y vector $(-m,m)$.

Ejercicio 55.– a) Simetría plana con deslizamiento. Plano: $x-2y+z+2=0$ Vector: $(1,1,1)$.

b) Movimiento helicoidal. Eje: $7x+4y-5z=10; 5x+8y-z=2$ Vector: $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Ángulo de giro: $\frac{3\pi}{2}$, visto desde $(2,-1,2)$.

c) Simetría central de centro $(1,5,-4)$.

d) Simetría axial de eje $(0,2,-3)+<(1,1,6)>$.

e) Simetría axial con deslizamiento. Eje: $5x+2z=16; 5y+z=-2$. Vector: $(2,1,-5)$.

f) Simetría rotacional. Eje de giro: $(\frac{-5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}) + < (2, 2, -1) >$. Plano de simetría: $2x + 2y - z + 1 = 0$. Ángulo de giro: $\frac{3\pi}{2}$, visto desde $(2, 2, -1)$.

Ejercicio 56.–

- Si f es la identidad todos son dobles.
- Si f es una traslación, todos los paralelos al vector de traslación.
- Si f es una simetría especular:
  1. Las rectas dobles de f son, evidentemente, las perpendiculares a H y las contenidas en él.
  2. Los planos dobles de f son el mismo H y los perpendiculares a él.
- Si f es una simetría especular con deslizamiento de plano H y vector $\mathbf{u}$:
  1. Las rectas dobles de f son las contenidas en H con dirección la del vector $\mathbf{u}$.
  2. Los planos dobles de f son H y los perpendiculares a él cuya dirección contiene a $\mathbf{u}$.

  En efecto, se debe observar, antes de nada, que, para cada $A \in X$, el punto medio M del segmento $\overline{Af(A)}$ está en H. Esto se prueba así. Si $A \in H$, es $f(A) \in H$, y la conclusión es clara. Si $A \notin H$, y $M' \in H$ es el punto medio del segmento $\overline{A\sigma(A)}$, el teorema de Thales implica que $MM' \parallel \sigma(A)f(A)$, luego $MM' \subset H$, lo que prueba nuestro aserto. Sea ahora r una recta doble para f. La observación anterior implica que r debe tener un punto P en común con H. Así $r = P\tau(P) \subset H$ y $D(r) =< \mathbf{u} >$. Sea ahora $H' \neq H$ un plano doble para f. La observación precedente indica que $H' \cap H$ es una recta r, que es doble, luego de la dirección de $\mathbf{u}$. El hecho de que $H' \perp H$ proviene de que, si $A \in H' \setminus H$, H' es el plano determinado por $A, \sigma(A), f(A)$, que es perpendicular a H.
- Si f es una simetría axial de eje r_0:
  1. Las rectas dobles de f son las perpendiculares y secantes a r_0, más la misma r_0.
  2. Los planos dobles de f son los perpendiculares a r_0 y los que la contienen.

  La afirmación relativa a rectas es trivial; veamos la relativa a planos. Sea H un plano doble que no contenga a r_0; entonces $H \cap r_0$ debe ser un punto P_0. Para todo $P \in H \setminus r_0$, el plano H debe contener a la recta P_0P, que es perpendicular a r_0. Por tanto, $H \perp r_0$.
- Si f es una simetría axial con deslizamiento de eje r_0:
  1. f tiene una única recta doble, que es r_0.
  2. Los planos dobles de f son los que pasan por r_0.

  La demostración de estas afirmaciones se hace de la manera siguiente. De manera análoga al caso de las simetrías con deslizamiento (respecto de planos), probamos que, para cualquier $A \in X$, el punto medio M del segmento $\overline{Af(A)}$ está en r_0. Sea r una recta doble, $A \in r$; entonces $M\tau(M) = r$, y así $r = r_0$. Por esa misma observación, todo plano doble debe contener dos puntos de r_0, luego debe contener a la propia r_0.
- Si f es una simetría central de centro A:
  1. Las rectas dobles de f son las que pasan por A.
  2. Los planos dobles de f son los que pasan por A.
- Si f es un giro de eje r_0:
  1. f tiene a r_0 como única recta doble.
  2. Los planos dobles para f son los perpendiculares a r_0.

  En efecto, si $P \notin r_0$ y H es el plano perpendicular por P a r_0, la recta $Pf(P)$ está contenida en H, y no puede ser doble porque los giros planos no tienen rectas dobles. Esto prueba el aserto sobre rectas. Supongamos que f tuviese un plano doble H' no perpendicular a r_0, y sea H un plano cualquiera perpendicular a r_0. Entonces $H \cap H'$ sería una recta doble para un giro en el plano H, y eso sabemos que es imposible.

- Si f es un movimiento helicoidal de eje r_0, $f = \tau g = g\tau$ con g giro de eje r_0 y τ traslación de vector paralelo al eje:

  1. f tiene a r_0 como única recta doble.
  2. f no tiene planos dobles.

  En efecto, es claro que r_0 es doble para f, y veamos que no hay otra. Si $r \neq r_0$ fuese una recta doble para f sería $g(r) = \tau^{-1}(r)$. Así, la dirección de r debe estar generada por un autovector de $\overrightarrow{g}$ de autovalor 1, luego $r \parallel r_0$. Pero, en este caso, si $P \in r$ no puede ser $f(P) \in r$, luego hay una contradicción. Esto prueba el aserto relativo a las rectas. En cuanto al aserto relativo a planos, vemos que ningún plano paralelo a r_0 puede ser doble, pues g no tiene planos dobles paralelos a r_0. Como todo punto de r_0 se desplaza por f, tampoco puede tener f planos dobles secantes a r_0.

- Si f es una simetría alabeada o rotacional respecto a una recta r_0 y un plano H_0, $f = \sigma g = g\sigma$, g un giro de eje r_0 y σ la simetría respecto de H_0, r_0 y H_0 perpendiculares:

  1. f tiene una única recta doble, que es r_0.
  2. f tiene un único plano doble, que es H_0.

  En efecto, claramente r_0 y H_0 son dobles, y f induce sobre H_0 un giro de centro A. Veamos que no hay otra recta doble. Obviamente, ninguna recta secante a H_0 puede ser doble. Ninguna recta contenida en H_0 es doble porque los giros no tienen rectas dobles. Por una recta r paralela a H_0 y no contenida en él, pasa un plano H paralelo a H_0 y distinto de él. Entonces $g(H) = H$ pero $\sigma(H) \parallel H$ y distintos, luego r no puede ser doble. Esto concluye el razonamiento relativo a rectas. De todos los planos perpendiculares a r_0 el único doble es H_0. Si H es un plano no perpendicular a r_0 y doble, entonces $H \cap H_0$ debería ser una recta doble distinta de r_0, lo que es imposible. Esto prueba el aserto relativo a planos.

Ejercicio 57.– F/V/V. 4)Perpendicular común: dirección$=< (2,3,3) >$, pies:$P_1 = (1,0,-1)$ $\quad P_2 = (3,3,2)$. 5) Simetría axial con deslizamiento. Eje: $\{x - z = 0 \quad ; \quad 2z - y = 1\}$; vector: $(-2,-4,-2)$.

Ejercicio 58.– 1) Aplicar la fórmula de la dimensión.

2) $(1\ x'\ y'\ z') = (1\ x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3) La matriz de f es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4) f es una simetría rotacional cuyo único punto doble es $(0,0,0)$. Su eje de giro es $x + y = 0; z = 0$, el plano de simetría es $x - y = 0$ y el ángulo de giro es $\alpha = 289°28'16''$, visto desde el sentido del vector $(1,-1,0)$

Ejercicio 59.– 1) Es una simetría axial con deslizamiento. Una posible descomposición es $f = \sigma_{r_1}\sigma_{r_2}\sigma_{r_3}$, con $r_1 : x + y = 1$, $r_2 : x = 0$ y $r_3 : y = 0$.

2) El movimiento f tiene una recta de puntos dobles, es un giro. Tomando un punto no doble P y el plano mediador de P y $f(P)$, H_1, obtenemos que $\sigma_{H_1} f$ tiene como variedad de puntos dobles un plano H_2. Por tanto, $\sigma_{H_1} f = \sigma_{H_2}$ y entonces $f = \sigma_{H_1}\sigma_{H_2}$.

Ejercicio 60.– 1) Basta ver que conserva las distancias o bien que, escrito en forma matricial, la matriz A_0 es ortogonal.

2)

$$(1\ x'\ y'\ z') = (1\ x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un giro de eje la recta $x = y = z$ y ángulo de $120°$, visto desde el sentido del vector $(1,1,1)$.

Ejercicio 61.– Simetría plana con deslizamiento. Plano:$x+y-z=4$. Vector desplazamiento: $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$.

Ejercicio 62.–

- a) Semejanza directa: giro con dilatación de centro $(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, ángulo π y razón 3.
- b) Semejanza inversa: simetría con dilatación de centro $(-\frac{1+2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3})$, eje $x-(1+\sqrt{2})y+\frac{\sqrt{2}}{3}=0$ y razón 2.
- c) Es un movimiento: giro de centro $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{2\sqrt{3}+5}{2})$ y ángulo $\frac{\pi}{6}$.
- d) Semejanza directa: giro con dilatación de centro $(0,0)$, ángulo $\frac{\pi}{2}$ y razón 1996.

Ejercicio 63.– a) Observar que los lados son proporcionales. b)

- Escaleno: una semejanza directa de centro el baricentro G, ángulo π y razón $\frac{1}{2}$.
- Isósceles:
  - Una semejanza directa de centro el baricentro G, ángulo π y razón $\frac{1}{2}$.
  - Una semejanza inversa de centro G, eje la paralela por G al lado desigual y razón $\frac{1}{2}$.
- Equilátero:
  - Tres semejanzas directas de centro G, razón $\frac{1}{2}$ y ángulos respectivos π, $\frac{5\pi}{3}$ y $\frac{7\pi}{3}$.
  - Tres semejanzas inversas de centro G, razón $\frac{1}{2}$ y ejes respectivos las paralelas por G a los tres lados del triángulo.

Ejercicio 64.–

- $T \to T'$: Semejanza inversa de centro B, razón $\frac{c}{a}$ y eje la bisectriz interior del ángulo $\widehat{B}$.
- $T' \to T''$: Semejanza directa de centro A', razón $\frac{b}{c}$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 65.–

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Semejanza inversa de centro A, eje $y=x$ y razón 2.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, Semejanza directa de centro $(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$, ángulo $\frac{\pi}{2}$ y razón 2.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Semejanza directa de centro $(\frac{8}{5},\frac{4}{5})$, ángulo $\frac{3\pi}{2}$ y razón 2.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, Semejanza inversa de centro B, eje $x+y=2$ y razón 2.

Ejercicio 66.– 1) Identidad y simetría central de centro $M=(1,1/2)$.
2)

- Semejanza inversa de centro $D=(1,1)$, eje: $y=1$ y razón=2.
- Semejanza inversa de centro $(1,-1)$, eje: $x=1$ y razón=2.

Tema 6: Geometría euclídea plana

Ejercicio 67.– $C = (0, 2)$ $\quad$ $Baricentro = (-1, 0)$

Ejercicio 68.– $A = (-1, -1)$ $\quad$ $B = (2, 4)$ $\quad$ $C = (6, 1)$

Ejercicio 69.– $A = (1, 3)$ $\quad$ $B = (-3, -1)$ $\quad$ $C = (5, 1)$

Ejercicio 70.– $A = (-4, 1)$ $\quad$ $B = (2, -7)$ $\quad$ $C = (5, -6)$

Ejercicio 71.– $A = (-12, 1)$ $\quad$ $B = (9, -2)$ $\quad$ $C = (4, 3)$

Ejercicio 72.– $A = (3, -1)$ $\quad$ $B = (10, 5)$ $\quad$ $C = (-\frac{7}{2}, 8)$

Ejercicio 73.– $A = (1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6})$ $\quad$ $B = (1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ $\quad$ $C = (-3, 1)$

Ejercicio 74.– Alturas: $75°$, $70°$, $35°$
Bisectrices: $72'5°$, $55°$, $52'5°$

Ejercicio 75.– $20°$

Ejercicio 76.– a) $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{3\pi}{10}$ $\quad$ b) $\frac{2\pi}{5}$ y $\frac{9\pi}{20}$

Ejercicio 77.– El punto medio de la hipotenusa es el circuncentro del triángulo.

Ejercicio 78.– Suma de los ángulos de un triángulo.

Ejercicio 79.– Aplicar el Teorema de Thales.

Ejercicio 80.– 1) Dos soluciones:

$A = (1, 3)$ $\quad$ $B = (-1, 1)$ $\quad$ $C = (-\frac{1}{5}, \frac{13}{5})$

$A = (1, -1)$ $\quad$ $B = (3, 1)$ $\quad$ $C = (\frac{11}{5}, -\frac{3}{5})$

2) Dos soluciones:

$A = (1, 1)$ $\quad$ $B = (\frac{3-5\sqrt{3}}{3}, \frac{9-5\sqrt{3}}{3})$ $\quad$ $C = (-\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{15-\sqrt{3}}{6})$

$A = (1, 1)$ $\quad$ $B = (\frac{3+5\sqrt{3}}{3}, \frac{9+5\sqrt{3}}{3})$ $\quad$ $C = (-\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{15+\sqrt{3}}{6})$

Ejercicio 81.– $A = (5, -4)$ $\quad$ $B = (1, 0)$ $\quad$ $C = (2, 2)$

Tema 7: El espacio proyectivo

Ejercicio 82.– Pasar al espacio vectorial k^{n+1} y aplicar un conocido resultado de Álgebra lineal.

Ejercicio 83.– Exceptuando los casos triviales, las posibilidades son: a) dos rectas coincidentes, b) dos rectas que se cortan en un punto, c) dos rectas que se cruzan, d) una recta contenida en un plano, e) una recta y un plano que se cortan en un punto, f) dos planos coincidentes y g) dos planos que se cortan en una recta.

Ejercicio 84.– Paramétricas: $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_0 = & & \lambda & + & 2\mu \\ x_1 = & & -\lambda & + & \mu \\ x_2 = & & 2\lambda & + & \mu \end{array}\right.$ $\quad$ Implícitas: $x_0 - x_1 - x_2 = 0$

$r \cap s = \{(0 : 1 : -1)\}$, $\quad$ haz de rectas: $ax_0 + b(x_1 + x_2) = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$.

Ejercicio 85.– a) Tres rectas coincidentes, b) tres rectas que se cortan en un punto (pueden coincidir dos de ellas), c) tres rectas que se cortan dos a dos en puntos distintos.

Ejercicio 86.– a) Se cortan dos a dos, b) se cortan las tres en el punto $(3 : -2 : -1)$, c) se cortan dos a dos.

Ejercicio 87.– Paramétricas: $\left\{\begin{array}{rrcrcr} x_0 = & \lambda & + & 2\mu & + & \gamma \\ x_1 = & & & \mu & + & \gamma \\ x_2 = & -\lambda & - & \mu & & \\ x_3 = & 3\lambda & + & \mu & + & \gamma \end{array}\right.$ $\quad$ Implícitas: $x_0 - x_1 + x_2 = 0$

Ejercicio 88.– Paramétricas: $\left\{\begin{array}{rrcr} x_0 = & 2\lambda & & \\ x_1 = & \lambda & + & \mu \\ x_2 = & 3\lambda & & \\ x_3 = & & & \mu \end{array}\right.$ $\quad$ Implícitas: $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x_0 & - & 2x_2 & & & = 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = 0 \end{array}\right.$

Ejercicio 89.– Aplicar la fórmula de la dimensión.

Ejercicio 90.– a) Se cruzan, b) se cruzan, c) se cruzan, d) se cortan en el punto $(0:1:1:0)$.

Ejercicio 91.– a) $r \subset H$, b) se cortan en el punto $(4:-3:3:-3)$.

Ejercicio 92.– a) Basta ver que el rango de la matriz de las coordenadas es 4, b) basta ver que el rango de cada una de las matrices de coordenadas de los puntos correspondientes es 3,
c) $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_0 & - & x_1 & & & - & x_3 & = 0 \\ 3x_1 & + & 4x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = 0 \end{array} \right.$, d) Aplicar la fórmula de la dimensión a r y s.

Ejercicio 93.– Dos planos en $\mathbb{P}_4(k)$ se cortan en un punto, se cortan en una recta o coinciden.

Ejercicio 94.– Una recta y un plano en $\mathbb{P}_4(k)$ pueden cruzarse, cortarse en un punto o el plano contener a la recta.

Ejercicio 95.– $N \in M \quad , \quad N \notin L \quad , \quad L \cap M = \{(0:1:-1:0:1)\}$.

Ejercicio 96.– a) Observar que t se cruza con a y con b y, análogamente, en el otro caso. b) $A = (1:1:0:1) \quad , \quad B = (3:1:0:4) \quad , \quad C = (0:0:0:1)$
$D = (1:0:0:2) \quad , \quad Q = (2:0:0:3)$, c) AB y CD se cortan cualquiera que sea el punto $P \in t$.