Departamento de Física Aplicada I

Escuela Politécnica Superior

ESTIMACIÓN DE INCERTIDUMBRES Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Índice

1. Introducción.

Todas las ciencias experimentales, como la Física, se basan en observaciones cuantitativas que llamamos medidas, que son el resultado de los experimentos y se describen con números. Estrictamente, la medida de cualquier magnitud se expresa mediante un número acompañado además de la unidad en que se ha medido y que presta su significación al número. Pero el proceso de medida está sujeto a una serie de limitaciones que se traducen inevitablemente en la existencia de cierta incertidumbre en el número obtenido. Consecuentemente, el resultado de una medida sólo tiene sentido si, además del número obtenido y su unidad correspondiente, va acompañado de otro número, la **incertidumbre** asociada, esto es, una indicación cuantitativa de la calidad del mismo o, dicho de otro modo, de la confianza que se tiene en él. Para ello es necesario realizar las siguientes definiciones, íntimamente relacionadas entre sí:

Magnitud: Propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que puede expresarse cuantitativamente mediante un número y una referencia (como tiempo t, longitud L, intensidad I, masa m, etc.). Habitualmente, dicha referencia suele ser una unidad de medida (segundos, metros, amperios, kilogramo, etc).

Medición o medida: Proceso que consiste en obtener experimentalmente uno o varios valores que pueden atribuirse razonablemente a una magnitud. En la práctica, “medir una magnitud” es compararla cuantitativamente con otra de su misma naturaleza que se toma como unidad patrón.

Mensurando. Magnitud que se desea medir. De la buena definición del mensurando, entre otros factores, dependerá la calidad (exactitud e incertidumbre) del resultado de medida. Frecuentemente, la definición de un mensurando incluye ciertas condiciones y estados físicos, como tiempo, temperatura, presión, etc. (p. ej. presión de vapor a 20 ºC). Por extensión, la palabra magnitud se usa indistintamente de forma habitual para referirse al mensurando.

El objetivo de una medición es, por tanto, determinar el valor del mensurando; esto es, el valor de la magnitud particular bajo medición. Las medidas que se realizan en un laboratorio pueden ser de dos tipos:

Medidas directas: El valor de la magnitud que se quiere conocer se mide directamente con el instrumento de medida (esto es, mediante la comparación con un patrón adecuado o la utilización de un aparato calibrado). Ejemplos de medidas directas son: la medida de una longitud con un calibre, el tiempo con un cronómetro, el voltaje con un voltímetro, etc.

Medidas indirectas: El valor de la magnitud deseada se obtiene como resultado del cálculo realizado a partir de otras magnitudes relacionadas con la magnitud a determinar y de ciertas constantes. Por ejemplo, la determinación (medida indirecta) del volumen V de un cilindro a partir de la medida (directa) de su diámetro D y de su altura H aplicando la fórmula $V = \pi D^2 H/4$.

Para tratar los datos experimentales obtenidos en el laboratorio, es pues crucial entender que todas las medidas de magnitudes físicas están sometidas siempre a incertidumbres, ya que no es posible medir algo de forma totalmente exacta. Por supuesto, lo ideal es conseguir hacer la incertidumbre lo más pequeña posible, pero ésta siempre existirá. Para poder obtener conclusiones válidas a partir de las medidas, **la incertidumbre debe aparecer siempre claramente indicada** y debe ser manejada adecuadamente.

2. Errores en las mediciones físicas.

Cada vez que se lleva a cabo un experimento o se mide una cantidad con el instrumento adecuado, surgen dos cuestiones: ¿Cómo de fiable es el resultado? ¿Cómo de cerca está del valor real, cualquiera que sea éste? La primera cuestión está relacionada con la **precisión** o reproducibilidad del experimento y la segunda, con la **exactitud** o proximidad al valor verdadero del mismo, si fuese conocido (figura 1). Las palabras precisión y exactitud tienen significados completamente distintos en la teoría de errores, mientras que se usan de manera indistinta en el lenguaje cotidiano. La distinción se aprecia claramente si atendemos a los posibles tipos o fuentes de errores. El **error de medida** sería resultado de una medición menos un valor verdadero del mensurando que, al no ser conocido, se toma en su lugar un valor de referencia. Los errores se clasifican tradicionalmente en sistemáticos y accidentales. Ambos tipos de error contribuyen a la incertidumbre de medida, aunque debe quedar bien claro que son distintos de ésta.

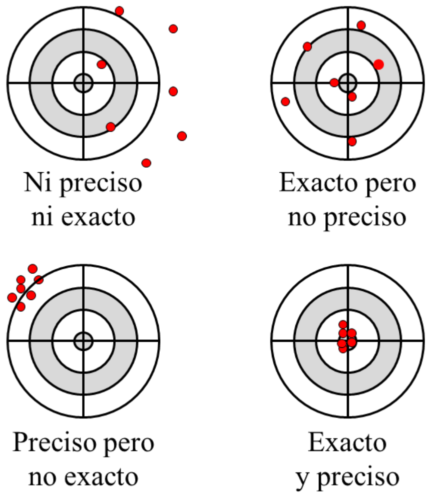


Figura 1.

2.1. Clasificación de los tipos de error.

a) Errores sistemáticos. Son errores que tienen lugar siempre en el mismo sentido y que se repiten constantemente en el transcurso de un experimento. Pueden ser causados por errores de calibración (o errores de cero) de los aparatos de medida, condiciones experimentales no apropiadas (presión, temperatura, etc.) que afectan a los instrumentos de medida, tendencias erróneas en el observador, técnicas de medida inadecuadas, uso de fórmulas o modelos aproximados, etc. Un minucioso análisis del instrumento y del procedimiento de medida permite eliminar en lo posible la presencia de estos errores. Por lo tanto, los errores sistemáticos afectan a la **exactitud** de la medida, es decir, a la proximidad al valor verdadero, ya que hacen que todos los resultados sean erróneos en el mismo sentido (demasiado altos o demasiado bajos). Si el error sistemático es debido a un efecto identificado, si dicho efecto puede cuantificarse y, si es suficientemente significativo frente a la exactitud requerida en la medición, puede aplicarse una **corrección** o un **factor de corrección** para compensarlo. Esta corrección puede ser aditiva, multiplicativa, o deducirse de una tabla.

b) Errores accidentales o aleatorios. Son debidos a diversas causas difíciles o imposibles de controlar y alteran las medidas realizadas en diferente cuantía y sentido cada vez. Pueden ser causados por fluctuaciones en las condiciones ambientales durante el experimento, errores de apreciación debidos a las limitaciones de nuestros sentidos, errores de precisión impuestos por la sensibilidad del aparato de medida, etc. Todo esto da lugar a que la repetición reiterada de la medición realizada por un mismo observador no siempre lleve al mismo resultado. El error debido a la superposición de todos estos efectos sólo puede ser detectado si el instrumento de medida es suficientemente sensible. Su valor no puede ser estimado a partir de una medida aislada, siendo necesaria la realización de una serie de medidas que permita, mediante un tratamiento estadístico de los datos, determinar una cota máxima de error. Los errores accidentales afectan a la **precisión** o **reproducibilidad** de un experimento. Por ejemplo, la obtención de varias medidas de la misma magnitud, diferentes entre sí, nos permitirán determinar el valor de dicha magnitud de forma menos precisa que si los valores obtenidos hubiesen sido más parecidos entre sí.

Ambos tipos de errores pueden darse simultáneamente y de forma independiente, de forma que se pueden tener resultados precisos aunque inexactos, exactos pero imprecisos, etc., dependiendo de los tipos de errores implicados.

El error puede expresarse de dos formas diferentes que no deben ser confundidas:

Error absoluto (ε_a): Es el valor de la diferencia entre el valor de la medida obtenido experimentalmente (M') y el verdadero valor de ésta (M): $M'-M$. El error absoluto puede ser positivo o negativo, tiene las mismas dimensiones físicas y, por tanto, las mismas unidades que la magnitud que se mide. Se suele representar como ε_a, de manera que:

$$\varepsilon_a = M' - M \qquad (1)$$

Dado que el valor verdadero no es conocido, como veremos, en la práctica se usa un valor de referencia.

Error relativo (ε_r): Es el cociente entre el error absoluto ε_a y el verdadero valor de la magnitud medida.

$$\varepsilon_r = \frac{M' - M}{M} = \frac{\varepsilon_a}{M} \qquad (2)$$

En consecuencia, no tiene dimensiones, y suele expresarse en tantos por ciento ($\varepsilon_r \times 100$). El error relativo da una mejor idea de la dimensión del error absoluto, al ser una comparación con el valor M de la magnitud medida.

2.2. Incertidumbre de medida.

A la hora de expresar el resultado de una medición de una magnitud física, es obligado dar alguna indicación cuantitativa de la calidad del mismo o, dicho de otro modo, de la confianza que se tiene en él. Sin dicha indicación, las mediciones no pueden compararse entre sí, ni con otros valores de referencia. De esta manera, el resultado de una medida se indica de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{R} \pm \boldsymbol{U} \qquad (3)$$

con sus unidades correspondientes, donde $\boldsymbol{R}$ es el **resultado más probable** y $\boldsymbol{U}$ es la **incertidumbre de medida** asociada al mismo. El resultado R de la medida es sólo una aproximación o estimación del valor del mensurando, y por lo tanto sólo tiene sentido si va acompañado de su incertidumbre U.

La **incertidumbre de medida** se define como el *parámetro no negativo asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos a un mensurando*. El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica (o un múltiplo de ella). La incertidumbre refleja pues la imposibilidad de conocer exactamente el valor del mensurando. El resultado de una medición tras la corrección de los efectos sistemáticos identificados sigue siendo solamente una estimación del valor del mensurando, dada la incertidumbre debida a los efectos aleatorios y a la corrección imperfecta del resultado por efectos sistemáticos.

La incertidumbre de medida comprende, en general, varias componentes. Algunas pueden ser evaluadas a partir del estudio estadístico de los resultados de series de medidas. Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de la incertidumbre, comprendidos los que provienen de efectos sistemáticos, tales como las componentes asociadas a las correcciones y a los patrones de referencia, contribuyen a la dispersión. El concepto de incertidumbre se sitúa pues más allá del concepto de error.

En la práctica existen numerosas fuentes posibles de incertidumbre, entre ellas:

a) Definición incompleta del mensurando.

b) Realización imperfecta de la definición del mensurando.

c) Muestra no representativa del mensurando, la muestra analizada puede no representar al mensurando definido.

d) Conocimiento incompleto de los efectos de las condiciones ambientales sobre la medición, o medición imperfecta de dichas condiciones ambientales.

e) Lectura sesgada de instrumentos analógicos, por parte del técnico.

f) Resolución finita del instrumento de medida o umbral de discriminación.

g) Valores inexactos de los patrones de medida o de los materiales de referencia.

h) Valores inexactos de constantes y otros parámetros tomados de fuentes externas y utilizados en el algoritmo de tratamiento de los datos.

i) Aproximaciones e hipótesis establecidas en el método y en el procedimiento de medida.

j) Variaciones en las observaciones repetidas del mensurando, en condiciones aparentemente idénticas.

Estas fuentes no son necesariamente independientes, y algunas de ellas, de a) a i), pueden contribuir en j). Por supuesto, un efecto sistemático no identificado no puede ser tenido en cuenta en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición, aunque contribuirá a su error.

La incertidumbre puede expresarse de distintas formas, dependiendo de cómo haya sido obtenida y del intervalo de confianza que se le quiere asignar. Si x es una estimación de la magnitud X, podemos tener:

- **Incertidumbre típica, $u(x)$**: incertidumbre del resultado de una medición, expresada en forma de desviación típica.

- **Incertidumbre típica combinada, $u_c(x)$:** incertidumbre típica del resultado de una medición, cuando el resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, siendo éstos las varianzas o covarianzas de esas otras magnitudes, ponderadas en función de la variación del resultado de medida con la variación de dichas magnitudes.

- **Incertidumbre expandida $U(x)$:** magnitud que define un intervalo en torno al resultado de una medición, y en el que se espera encontrar una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser atribuidos razonablemente al mensurando. Se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada por un **factor de cobertura k:** $U(x) = k\,u_c(x)$. Típicamente, k toma valores entre 2 y 3, y se basa en la probabilidad o nivel de confianza requerido para el intervalo.

A partir de todas ellas se pueden definir las correspondientes incertidumbres relativas típica ($u(x)/x$), típica combinada ($u_c(x)/x$) y expandida ($U(x)/x$).

3. Evaluación de las incertidumbres de medida.

El método de evaluación de las incertidumbres depende de cómo haya sido estimado el valor de la magnitud, y se pueden distinguir dos tipos:

- **Evaluación tipo A:** cuando se han obtenido una serie de observaciones repetidas e independientes de una magnitud que varía al azar, en las mismas condiciones de medida, la incertidumbre se evalúa mediante el análisis estadístico de series de observaciones. En este caso se toma como incertidumbre típica la desviación típica experimental de la medida.

- **Evaluación tipo B:** cuando la estimación de la magnitud proviene de otros medios, las incertidumbres se determinan mediante métodos distintos al análisis estadístico (medidas previas, certificados, especificaciones del fabricante, etc.).

El proceso general de evaluación de las incertidumbres se puede resumir en los siguientes pasos:

1) Se expresa matemáticamente la relación existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que éste depende según $Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_N\right)$. La función f debe contener todas las magnitudes, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de medición.

2) Se obtiene una estimación y del mensurando Y, utilizando las estimaciones de entrada x_1, x_2, ..., x_N de las magnitudes X_1, X_2, ..., X_N, tal que $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$. Como se mencionó anteriormente, esto va a depender de cómo se han obtenido las magnitudes de entrada X_i:

a. **Evaluación tipo A:** para magnitudes de entrada X_i estimadas a partir de n observaciones repetidas e independientes $X_{i,1}$, $X_{i,2}$, …, $X_{i,n}$, se toma como estimación de entrada x_i la media aritmética $\overline{X}_i$:

$$x_i = \overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k} \tag{4}$$

y como **incertidumbre típica $u(x_i)$** de dicha estimación, la **desviación típica experimental de la media ($n \geq 10$)**:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{X}_i - X_{i,k}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{5}$$

Si el número de medidas es inferior a 10 (**$n<10$**), la ecuación anterior puede proporcionar un valor subestimado de la contribución de la incertidumbre. En este caso conviene estimar el valor de $u(x_i)$ basándose en la experiencia (por ejemplo, mediante los resultados de medidas anteriores similares). Si esto no fuese posible o se considerase inaceptable, como estimación de entrada x_i seguirá tomándose la media aritmética X_i dada por la ecuación (4), mientras que como posible aproximación sencilla a la incertidumbre, que será la que usemos en el laboratorio, se tomará la siguiente:

$$u(x_i) = \frac{x_{i,máximo} - x_{i,mínimo}}{6} \tag{6}$$

No obstante, el procedimiento riguroso implica aplicar la siguiente corrección:

$$u(x_i) = w\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{X}_i - X_{i,k}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

donde w toma los siguientes valores según el número de medidas efectuado y el nivel de confianza requerido[1]:

[1] Estos valores están basados en los que toma la distribución t de Student, que tiende a la distribución normal cuando $n \to \infty$.

Número de medidas.	w (k = 1)	w (k = 2)	w (k = 3)
2	1,8	7,0	78,6
3	1,3	2,3	6,4
4	1,2	1,7	3,0
5	1,1	1,4	2,2
6	1,1	1,3	1,8
7	1,1	1,3	1,6
8	1,1	1,2	1,5
9	1	1,2	1,4

b. **Evaluación tipo B:** para una estimación x_i de una magnitud de entrada X_i no obtenida a partir de observaciones repetidas, la incertidumbre típica $u(x_i)$ se establecen mediante decisión científica basada en toda la información disponible acerca de la variabilidad posible de X_i, lo que permite asociarle un determinado tipo de distribución (normal, rectangular, etc.). Esta información puede provenir de:

- resultados de mediciones anteriores;
- experiencia o conocimientos generales sobre el comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos utilizados;
- especificaciones del fabricante;
- datos suministrados por certificados de calibración u otros tipos de certificados;
- incertidumbres asignadas a valores de referencia procedentes de libros y manuales.

Si una magnitud tiene contribuciones a la incertidumbre tanto de tipo A ($u_A(x_i)$) como de tipo B ($u_B(x_i)$), su incertidumbre será:

$$u(x_i) = \sqrt{u_A(x_i)^2 + u_B(x_i)^2} \tag{8}$$

3) Una vez evaluadas las incertidumbres típicas, tanto de tipo A como de tipo B, a continuación se obtiene **la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$** como

$$u_c(y)=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_N}u(x_N)\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2u^2(x_i)} \tag{9}$$

La incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ es una desviación típica estimada y caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando Y.

Esto es válido si las magnitudes X_i son independientes. Si no lo fuesen, habría que realizar el cálculo teniendo en cuenta su dependencia, lo cual implica el cálculo de correlaciones y de términos de covarianza:

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)} \tag{10}$$

donde x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j, y $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ es la covarianza estimada asociada a x_i y x_j. El grado de correlación entre x_i y x_j viene dado por el coeficiente de correlación:

$$r(x_i,x_j)=\frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{11}$$

donde $r(x_i,x_j)=r(x_j,x_i)$ y $-1\le r(x_i,x_j)\le +1$.

4) Finalmente, se indica el resultado de la medición en la forma:

$$Y=y\pm u_c \tag{12}$$

indicando las unidades de y y de u_c. Por ejemplo[2]: m_S = (1,273 ± 0,035) kg.

4. Incertidumbre expandida.

Aunque $u_c(y)$ puede ser utilizada universalmente para expresar la incertidumbre de un resultado de medida, frecuentemente es necesario, en ciertas aplicaciones comerciales, industriales o reglamentarias, o en los campos de la salud o la seguridad, dar una medida de la incertidumbre que defina, alrededor del resultado de medida, un intervalo en el interior del cual pueda esperarse encontrar gran parte de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando. Esto es especialmente importante en el caso de laboratorios de calibración, elaboración de patrones y certificados, etc.

[2] Es cada vez más frecuente encontrar el resultado expresando u_c entre paréntesis: m_S = 1,273(35) kg, para evitar la confusión con el intervalo de confianza que proporciona la incertidumbre expandida U.

Este intervalo lo proporciona la **incertidumbre expandida *U*,** que se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura *k*, habitualmente entre 2 y 3, elegido en función del nivel de confianza requerido para un intervalo $[y-U, y+U]$ en torno al resultado de la medida:

$$U(y) = k\ u_c(y) \tag{13}$$

Para ello es necesario haber obtenido un número suficientemente grande de medidas del valor de la magnitud que se quiere estimar, o que se pueda hacer alguna suposición sobre la distribución de estos valores (normal, rectangular, etc.). Muy frecuentemente puede suponerse una distribución normal para los resultados de la estimación del valor de *y*, de manera que *k* = 1 proporciona un intervalo correspondiente a un nivel de confianza del 68,3 %, para *k* = 2, del 95,4 %, y para *k* = 3, del 99,7%.

En el caso se usar la incertidumbre expandida, el resultado de la medición se expresa en la forma:

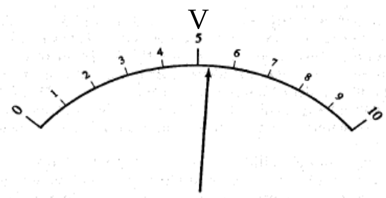
$$Y = y \pm U \tag{14}$$

indicando las unidades de *y* y de *U*, lo que se interpreta como que la mejor estimación del valor atribuible al mensurando *Y* es y, y que puede esperarse que en el intervalo que va de *y* − *U* a *y* + *U* esté comprendida una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos a *Y*. Es necesario indicar asimismo el valor de *k* utilizado para obtener *U* y el nivel de confianza asociado al intervalo $y \pm U$ (p. ej. *m* = (100,47 ± 0,78) g, con un factor de cobertura de cobertura de 3, que representa un nivel de confianza del 99,7%).

5. Resolución de los instrumentos.

Casi todas las medidas directas implican la lectura de una escala o de la pantalla digital de un instrumento. Una de las fuentes de incertidumbre del instrumento es la **resolución** de su dispositivo indicador. Se denomina **resolución** a la *mínima variación de la magnitud medida que da lugar a una variación perceptible de la indicación correspondiente*.

- Si la medida se ha hecho con un **aparato analógico**, es decir, basado en una escala graduada, se toma como resolución la menor unidad que pueda medir el aparato (distancia entre dos divisiones), esto es, la menor división de escala. En cuanto al valor de la magnitud medida, éste sería el de la marca más cercana a la posición de la aguja.



Por ejemplo, en el voltímetro de la figura, cuya escala tiene intervalos de 1 V, se tomaría como resolución 1 V.

- Si la medida se ha hecho con un **aparato digital**, tomaremos como resolución una unidad del último dígito de la lectura del aparato. Por ejemplo, si un voltímetro digital da un valor de 29,7 mV, la resolución es de 0,1 mV.

La resolución contribuye a la incertidumbre de medida, por cuanto supone un límite a la apreciación del valor de la magnitud. Si la resolución del dispositivo indicador es δx, el valor de señal de entrada (estímulo) que produce una indicación dada X puede situarse con igual probabilidad en cualquier punto dentro del intervalo $[X-\delta x/2,\ X+\delta x/2]$. La señal de entrada puede describirse entonces mediante una distribución rectangular de probabilidad, de amplitud δx, lo que supone una incertidumbre típica:

$$u = \frac{1}{\sqrt{12}}\delta x \simeq 0,29\delta x \tag{15}$$

para cualquier indicación.

Ejemplo: Se dispone de un cronómetro que indica hasta la décima de segundo con el que se realizan 10 medidas de la caída libre de un cuerpo siempre desde una misma altura, y se obtiene un valor medio del tiempo de caída (ecuación (4)) de t = 8,358 s, con una desviación típica de la media de 0,057 s (ecuación (5)), asociada a la repetibilidad de la medida, como falta de sincronización al pulsar el cronómetro, tanto al inicio como al final. De esta manera, como la resolución del cronómetro es $\delta x = 0{,}1\ \text{s}$, la incertidumbre asociada a la resolución del instrumento es $u_{resol}(t) = 0,29\delta x = 0,029\ \text{s}$, mientras que la incertidumbre típica, asociada a la repetibilidad de la medida, es $u_{repet}(t) = 0,057\ \text{s}$. La incertidumbre asociada a la determinación de t tiene estas dos contribuciones, de forma que resulta:

$$u(t) = \sqrt{u_{resol}(t)^2 + u_{repet}(x_i)^2} = 0,064\ \text{s}$$

Tomando un nivel de confianza del 95 % (k = 2), la incertidumbre expandida es $U(t) = 2\times 0,064\ \text{s} = 0{,}128\ \text{s}$. Usando las técnicas de redondeo que veremos a continuación, el resultado final del valor medido de t sería:

$$t = 8{,}36 \pm 0{,}13\ \text{s} \ \text{ con un nivel de confianza del 95 \% } (k = 2)$$

Si quisiéramos usar el valor de t en otro cálculo posterior en el que intervengan t y su incertidumbre $u(t)$ □ hay que tener en cuenta que su valor estimado es 8,358 s y su incertidumbre, 0,064 s.

6. Interpolación en tablas

El valor de la magnitud A puede venir dado en función de otras magnitudes x, y, ... mediante una tabla que relaciona los valores de x, y, ... con el correspondiente de A. En general, los valores medidos de estas magnitudes no tienen por qué corresponder exactamente con los que aparecen en la tabla, por lo cual habrá que recurrir a métodos de interpolación (en la mayoría de los casos son métodos de interpolación lineal) para calcular el valor de A.

Normalmente el valor de A depende solamente del valor de una variable x, o a lo sumo de los valores de dos variables *x, y*. En cada uno de estos casos el método de interpolación lineal se aplica de la siguiente manera:

6.1. Tablas de simple entrada.

Supongamos que una función $A = f(x)$ viene tabulada como se indica:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	…
A	A_1	A_2	A_3	A_4	…

Si se quiere calcular el valor de A correspondiente a $x = x_0$, siendo $x_1 < x_0 < x_2$, se opera de la siguiente manera, considerando una dependencia lineal en el intervalo comprendido entre x_1 y x_2:

$$A(x_0) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1) \tag{16}$$

La incertidumbre típica combinada $u_c(A(x_0))$ se calculará aplicando las ecuaciones (10) y (11). Las incertidumbres asociadas a A_i y x_i se podrán tomar, como en el caso de la resolución instrumental, salvo que en la tabla se indique otra cosa, como $u(x_i) = 0{,}29\delta x_i$ y $u(A_i) = 0{,}29\ \delta A_i$, donde δx_i sería el mínimo intervalo que separa dos entradas de x_i en la tabla, y δA_i representa una unidad de la última cifra significativa del valor tabulado.

6.2. Tablas de doble entrada.

Supongamos que la función $A(x,y)$ viene dada por la siguiente tabla:

y / x	y_1	y_2	y_3	…
x_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	…
x_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	…
x_3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	…
…	…	…	…	…

El valor de A correspondiente a (x_0, y_0), que se han medido con unas cotas de error de Δx_0 y Δy_0, y siendo $x_1 < x_0 < x_2$ e $y_1 < y_0 < y_2$, considerando de nuevo la variación lineal, viene dado por:

$$.. \tag{17}$$

La incertidumbre típica combinada $u_c(A(x_0, y_0))$ se calculará aplicando las ecuaciones (10) y (11).

7. Relaciones lineales. Ajuste de una nube de puntos por el método de los mínimos

cuadrados.

En los experimentos físicos es frecuente encontrar relaciones lineales entre magnitudes, expresándose, por tanto, por la ecuación de una recta. Por ejemplo, la relación entre la diferencia de potencial V y la intensidad de corriente eléctrica I que circula por un tramo de un circuito, por la ley de Ohm, es:

$$A(x_0) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1}\left(x_0 - x_1\right)$$

es una relación lineal, siendo la pendiente de la recta la resistencia R, y la ordenada en el origen igual a 0.

Otro ejemplo puede ser el del período de oscilación T del péndulo simple para oscilaciones pequeñas, que si bien la relación entre las magnitudes T y L (longitud del péndulo) no es directamente lineal:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

se puede expresar de forma lineal:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

Así, si midiésemos el período de oscilación para cada longitud del péndulo, su cuadrado (T^2) variaría linealmente con su longitud, siendo $4\pi^2/g$ la constante de proporcionalidad entre ellas. La representación gráfica de los valores de T^2 frente a L seguirían un comportamiento aproximadamente lineal, siendo la pendiente de la recta la constante de proporcionalidad. Sucesivas medidas de esta variación nos podrían permitir estimar el valor de la aceleración de la gravedad.

En estos casos de relación lineal entre magnitudes, al representar en una gráfica los pares de valores (x, y) se busca la recta de mejor ajuste a la nube de puntos:

$$y = mx + b \tag{18}$$

también conocida como **recta de regresión** lineal, donde m representa la pendiente y b, la ordenada en el origen de dicha recta. El problema es encontrar los valores de m y b. Aunque el método riguroso es el denominado de **mínimos cuadrados**, a veces, para simplificar los cálculos, se usan otros que dan con bastante aproximación la recta de mejor ajuste.

En el laboratorio usaremos el ajuste por el método de mínimos cuadrado que consiste en buscar la recta que mejor ajuste a una nube de puntos. Para ello se impone la condición de que la suma de las distancias al cuadrado entre los distintos valores y_i medidos de la variable dependiente y los que se obtendrían por la ecuación lineal:

$$d = \sum\left[y_i - \left(mx_i + b\right)\right]^2 \tag{19}$$

sea un mínima ($\partial d / \partial m = 0; \partial d / \partial b = 0$). Se puede así demostrar que el valor de la pendiente m y de la ordenada en el origen b de dicha recta:

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{20}$$

siendo n el número de medidas, m la pendiente de la recta a determinar y b su ordenada en el origen.

Dado un valor x, podemos calcular su y correspondiente a partir de la recta de mejor ajuste (18). Partiendo de las expresiones de la pendiente m y de la ordenada en el origen b, se pueden determinar sus incertidumbres típicas combinadas correspondientes[3], $u_c(m)$ y $u_c(b)$:

. (21)

.

La incertidumbre típica combinada de los valores previstos por la recta de regresión se puede calcular a partir de las (10) y (11)[4].

El método descrito en los párrafos anteriores parte de la idea de optimizar el ajuste respecto de la variable dependiente. Así, obtenemos lo que se llama la **recta de regresión** de y sobre x. Si hiciéramos lo propio con la variable independiente, obtendríamos otra recta de regresión (de x sobre y) con otra pendiente distinta. El parámetro que da la bondad del ajuste, esto es, de la linealidad del comportamiento de $y(x)$, es el llamado **coeficiente de correlación lineal *r***. Éste, se calcula obteniendo la media geométrica de las pendientes de las dos rectas de regresión antes descritas. La expresión matemática útil para este parámetro es:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \tag{22}$$

El coeficiente de correlación lineal, puede demostrarse que es un número comprendido entre –1 y +1. Cuanto más cerca esté $|r|$ de la unidad, interpretaremos que más fuertemente lineal es la relación entre las variables. Por ello es importante calcular, previamente al ajuste de mínimos cuadrados, el valor del coeficiente de correlación y comprobar que su módulo es cercano a la unidad, y de esta manera asegurar que la curva que mejor se ajusta a la nube de puntos es una recta. Para valores de $|r|$ inferiores a 0,85, debe buscarse otro tipo

[3] Estas expresiones consideran que las incertidumbres de x_i e y_i son despreciables frente a la incertidumbre que genera la propia dispersión de los datos en el cálculo de mínimos cuadrados.

[4] En concreto: $u_c\left(y(x)\right) = u_c\left(b\right)^2 + x^2 u_c\left(m\right)^2 + 2x u_c\left(b\right) u_c\left(m\right) r(b,m)$ donde $r(b,m) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

de dependencia funcional entre las variables. Si el coeficiente de correlación lineal es mayor o igual que 0,9 y menor que 1, siempre se debe expresar con todas sus cifras hasta la primera que no sea 9, redondeándola en su caso (por ejemplo, si resulta ser 0,9996714, habría que expresarlo como 0,9997). Por debajo de 0,9, se puede expresar con 2 cifras significativas. Por ello es importante calcular, previamente al ajuste de mínimos cuadrados, el valor del coeficiente de correlación y comprobar que su módulo es cercano a la unidad, y de esta manera asegurar que la curva que mejor se ajusta a la nube de puntos es una recta. Para valores de $|r|$ inferiores a 0,85, debe buscarse otro tipo de dependencia funcional entre las variables. Si el coeficiente de correlación lineal es mayor o igual que 0,9 y menor que 1, siempre se debe expresar con todas sus cifras hasta la primera que no sea 9, redondeándola en su caso (por ejemplo, si resulta ser 0,9996714, habría que expresarlo como 0,9997). Por debajo de 0,9, se puede expresar con 2 cifras significativas.

Para realizar los cálculos correspondientes al ajuste por mínimos cuadrados, es conveniente programar estas ecuaciones.

8. Presentación de resultados. Técnicas de redondeo.

El valor numérico de una magnitud y y de su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ o, en su caso, de su incertidumbre expandida U, no deben darse con un número excesivo de cifras. El valor de la magnitud debe expresarse con un número de cifras que viene determinado por el valor de la incertidumbre, ya que sería absurdo presentar una medida hasta la diezmilésima cuando la incertidumbre afecta a las décimas (por ejemplo, m_S = (1,2732345678534 ± 0,035) kg). Ese número de cifras es lo que se denomina **número de cifras significativas**, y determinan el valor de un número aunque no su orden de magnitud.

Habitualmente basta con dar $u_c(y)$ y U (así como las incertidumbres típicas $u(x_i)$ de las estimaciones de entrada x_i] con dos cifras significativas, aunque en ciertos casos, pueda ser necesario mantener cifras suplementarias para evitar la propagación de errores de redondeo en cálculos posteriores.

Un resultado no estará correctamente expresado si no se aplican adecuadamente las **técnicas de redondeo**. Partiendo de la magnitud y de su incertidumbre con todas sus cifras, el procedimiento de redondeo se resume en los siguientes pasos:

a. Se conservan las dos primeras cifras significativas de la incertidumbre (esto es, descontando los ceros a la derecha e izquierda del número, independientemente de la posición de la coma decimal). A continuación, se procede de la siguiente manera:

   i. Redondeo al integral múltiple más próximo: la última cifra conservada se redondea aumentándola en una unidad si la primera de las cifras a descartar es mayor que 5, y no alterándola si es menor que 5.

      Ej. 1.: u_c = 6,9749515; los integrales múltiples serían “6,9” y “7,0”, siendo éste último el más próximo, de forma que redondeado queda: u_c = 7,0;

      Ej. 2.: u_c = 0,003215324; los integrales múltiples serían 0,0032 y 0,0033, siendo éste último el más próximo, de forma que redondeado queda redondeado es: $u_c = 0{,}0032$.

ii. Redondeo al par múltiple más próximo: si las cifras a descartar empiezan por 5 y todas las demás son 0, la última cifra conservada no cambia si es par o se incrementa en 1 unidad si es impar (redondeo al número par más próximo).

Ej.1: $u_c = 6{,}95$; el par múltiple más cercano es "7,0", de manera que redondeado es: $u_c = 7{,}0$.

Ej.2: 0,00325, el par múltiple más cercano es "32", pues "33" es impar, de manera que redondeado es: $u_c = 0{,}0032$).

El redondeo al número par más próximo asegura que unas veces se redondeará por exceso, otras por defecto. Si las demás cifras que siguen al 5 no fuesen 0, se aumenta el valor de la última cifra conservada: (Ej.1: 6,952 redondeado es: 7,0; Ej.2: 0,003251, redondeado 0,0033).

b. A continuación, se expresa la magnitud de forma que su última cifra sea del mismo orden que la de la incertidumbre, descartando las demás y redondeándola de la misma forma que la incertidumbre.

Por ejemplo, si se ha realizado una experiencia en la que se ha calculado el valor de la gravedad, y los resultados finales dan el valor de 9,684 m/s^2 con una incertidumbre típica combinada de 0,3454 m/s^2, la presentación del resultado sería:

$$g = (9{,}68 \pm 0{,}35)\ \mathrm{m/s^2}$$

En ocasiones hay que tener en cuenta que algunos ceros no se pueden suprimir, ya que están indicando cuál es el orden de magnitud correcto o simplemente que la cifra indicada es efectivamente 0 y no cualquier otra (por ejemplo, escribir $2{,}1 \pm 0{,}22$ cm es incorrecto, ya que lo correcto sería $2{,}10 \pm 0{,}20$ cm, puesto que esos ceros son significativos).

Para números muy grandes o muy pequeños conviene usar la notación científica, esto es, en potencias de 10, respetando el número significativo de cifras, expresando el valor y su incertidumbre con la misma potencia de 10. Por ejemplo $2{,}34 \times 10^9$ ó $1{,}60 \times 10^{-19}$.

Cuando los cálculos se realizan mediante calculadora u ordenador, conviene conservar siempre todas las cifras que éstos permitan, procediéndose al **redondeo SÓLO en el resultado final, NUNCA redondeando resultados intermedios.**

Si en la fórmula o ley que permite el cálculo de una magnitud aparece alguna constante matemática o física (como π, N_A, g, c, etc.), conviene considerar, en el momento de operar, el máximo número significativo de cifras, de forma que el error considerado sea despreciable frente a los de las magnitudes que intervienen en la fórmula.

A continuación se presentan algunos ejemplos de redondeo, aplicados a medidas de intensidad (*I*) dadas en amperios (A):

Medida (A)	u_c (A)	Resultado
1,43865	0,01239	I = (1,439 ± 0,012) A
4,81343	0,04661	I = (4,813 ± 0,047) A
132,3254×10^{-3}	2,8754×10^{-4}	I =(132,33 ± 0,29) ×10^{-3} A
5127	234	I = 5130 ± 230 A
0,53781	0,00996	I = 0,538 ± 0,010
5,03574	0,02574	I = 5,036 ± 0,026 A

9. Representaciones gráficas.

A la hora de realizar representaciones gráficas se deben respetar las siguientes normas (figura 2):

a) Ejes

Abscisa y Ordenada

Un convenio bien establecido en Física para todas las prácticas es representar en el eje de abscisas (horizontal) la variable independiente (aquella que elige el experimentador en cada medida), y en el eje de ordenadas (vertical) la variable dependiente (aquella cuyo valor se determina); brevemente, se trata de representar efecto (en el eje vertical) frente a causa (en el eje horizontal).

Papel

Los papeles más utilizados en las gráficas de Física son el lineal (normalmente graduado en milímetros y por eso comúnmente llamado *papel milimetrado*), y el logarítmico, que puede ser semilogarítmico (de rayado logarítmico en un solo eje y lineal en el otro) y logarítmico sobre ambos ejes.

Identificación de cada eje

Los ejes deben marcarse siempre con el nombre y símbolo de la magnitud representada junto a las unidades en que se expresa.

También debe indicarse, en su caso, la potencia de 10 correspondiente, por la que va multiplicada la unidad. De este modo, las divisiones en un eje pueden enumerarse 1, 2, 3,... en lugar de 10.000, 20.000,

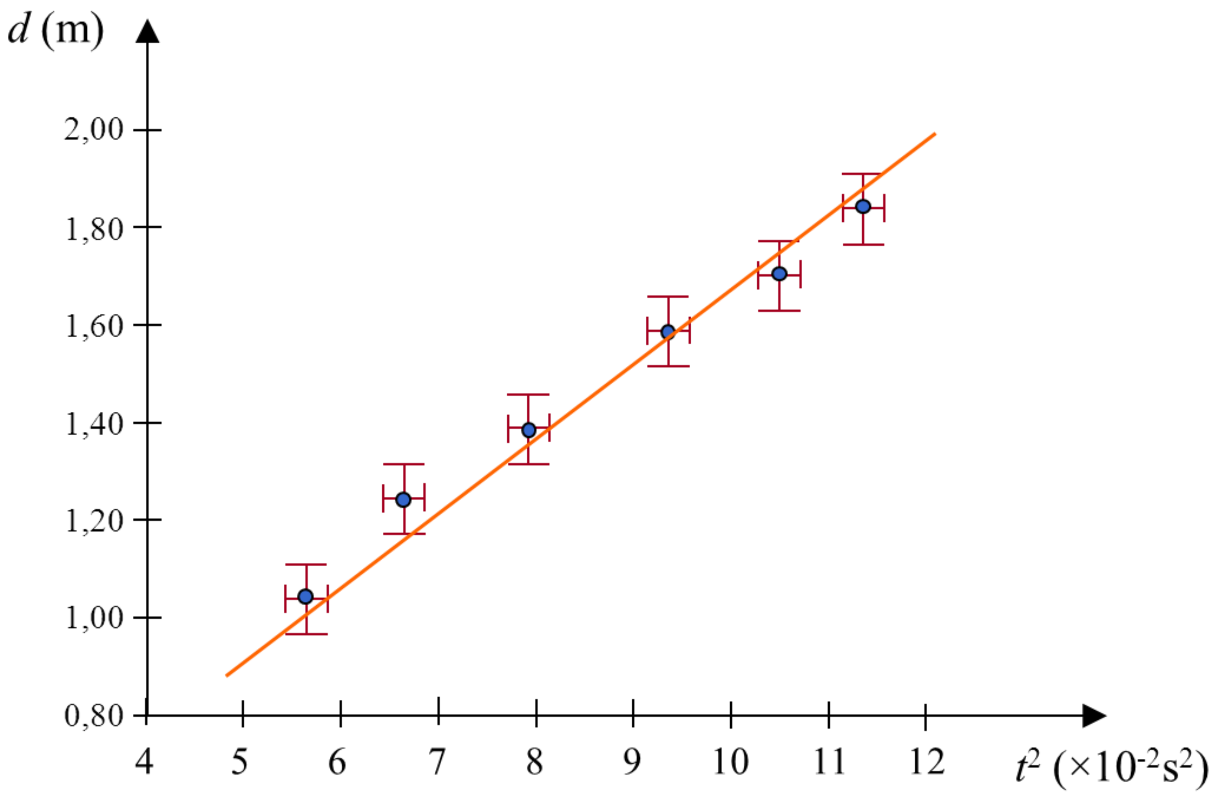


Figura 2.

30.000,... ó de 0,001, 0,002, 0,003,... etc., si en el eje se indica $\times 10^4$ ó $\times 10^{-3}$, respectivamente.

En los ejes se marcarán los valores de las variables representadas, a intervalos regulares, de acuerdo con la escala escogida.

Escalas

La selección de la escala utilizada en cada eje debe hacerse de modo que:

- Los puntos experimentales no queden todos juntos, debiendo cubrir toda la zona del papel.
- La escala debe ser sencilla. Lo más sencillo es representar por un milímetro una potencia de 10 de la unidad; la siguiente simplicidad es aquella en que un milímetro (ó un centímetro) representa 2 ó 5 unidades.
- El origen de la representación no tiene por qué ser el punto (0, 0). Salvo en casos especiales **la escala y el origen se tomarán de manera que la curva a representar quede centrada en el papel y ocupe la mayor parte de éste.**
- Cada punto se representa por un punto (.), un asterisco (*), u otro símbolo parecido. Si existen varias curvas en la misma gráfica con diferentes significados, los puntos de cada una se representan con distintos símbolos.

b) Representación gráfica de la incertidumbre de las medidas

En ocasiones es necesario representar las incertidumbres en las medidas. En este caso se representaría el intervalo de confianza mediante la incertidumbre expandida U. Para ello se traza una cruz o un rectángulo centrados en el punto y de dimensiones horizontales y verticales correspondientes a la incertidumbre expandida en cada dirección.

c) Ajuste de líneas a los puntos representados

Si se traza una curva para unir una serie de puntos se deben de respetar las siguientes normas:

- Debe de ser lo más regular posible.
- Debe de pasar lo más cerca posible de los puntos, aunque **no tiene que pasar necesariamente por todos ellos (incluso puede que no pase por ninguno).**
- Si existe algún punto aislado lo más normal es que se trate de un error y puede que sea conveniente repetir la medida correspondiente a ese punto.
- **No unir nunca los puntos mediante una línea quebrada.**

Bibliografía

- Recomendaciones del CEM para la Enseñanza Metrología. Centro Español de Metrología, Enero de 2011.

  (http://www.cem.es:8081/cem/es_ES/common/pop_externo.jsp?url=../documentacion/generales/Recomendaciones%20CEM%20Ensenanza%20Metrologia.pdf)
- GUM DIGITAL 2010. Centro Español de Metrología, 2008.
  (http://www.cem.es/sites/default/files/gum20digital1202010.pdf)
- ISO 80000-1:2009, Quantities and Units, Part 1: General.