Estimación de Incertidumbres y presentación de resultados

Prácticas de Física I y Física II
Departamento de Física Aplicada I
Escuela Politécnica Superior

Conceptos previos

- **Magnitud:** Propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede expresarse cuantitativamente mediante un número y una referencia, que habitualmente será una unidad de medida.

- **Medición:** Medir una magnitud es compararla cuantitativamente con otra de su misma naturaleza tomada como unidad patrón

Una varilla tiene una longitud de 3 metros (L = 3 m)
La varilla es tres veces la longitud de una referencia patrón que denominamos metro

La medición y sus resultados

- **Medida directa:** El valor de la magnitud que se requiere conocer se mide directamente con un instrumento de medida.
- **Medida indirecta:** El valor de la magnitud que se requiere conocer se obtiene como resultado del cálculo realizado a partir de otras magnitudes relacionadas con la magnitud a estudiar y de ciertas constantes

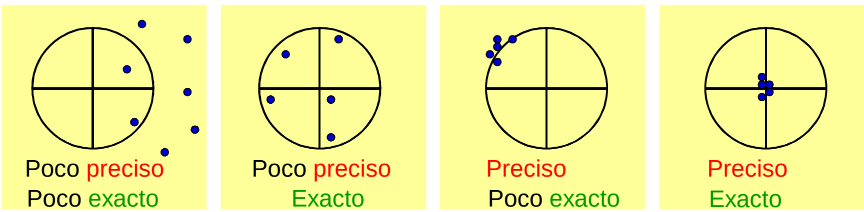
No es posible medir algo de forma totalmente exacta

Cualquier MEDIDA ⇒ **INCERTIDUMBRE**

Siempre debe aparecer reflejada en los Resultados experimentales

Tipos de error

- Errores Sistemáticos:
  - Siempre tienen lugar en el mismo sentido.
  - Se deben a errores de calibración, condiciones experimentales no apropiadas, tendencias erróneas en el observador, etc.
  - Afectan a la *exactitud* de la medida.
- Errores Accidentales o aleatorios:
  - Se dan en diferente cuantía y sentido cada vez.
  - Se deben a causas difíciles de controlar: fluctuaciones ambientales, fallos de apreciación, etc.
  - Afectan a la *precisión* de la medida.



Incertidumbre de medida

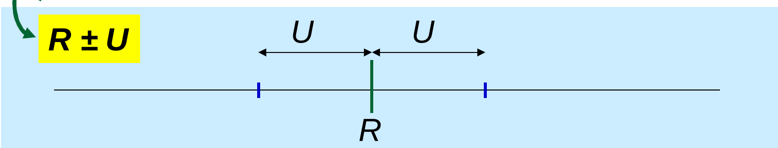
Todo proceso de medida está sujeto a limitaciones que inevitablemente se traduce en la existencia de cierta incertidumbre asociado la resultado y que constituye una indicación cuantitativa de la calidad del mismo.

Incertidumbre (*Uncertainty*) de medida es un parámetro no negativo asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos a la magnitud que se desea medir.

El resultado de una medición siempre se expresará en la forma:

Medida = Valor numérico ± Incertidumbre (unidades)

Realmente con esta expresión indicamos que nuestro resultado de la medida es un valor comprendido dentro del intervalo [$R-U$,$R+U$]



Incertidumbre de medida

- **Incertidumbre típica, $u(x)$**

  Incertidumbre del resultado de una medición expresada en forma de desviación típica

- **Incertidumbre típica combinada, $u_c(x)$**

  Incertidumbre típica del resultado de una medición, cuando el resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes.

- **Incertidumbre expandida, $U(x)$**

  Magnitud que define un intervalo en torno al resultado de una medición, y en el que se espera una fracción importante de la distribución de valores atribuibles a la magnitud a medir.

Se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada por un factor de cobertura k, que típicamente toma valores entre 2 y 3 y se basa en la probabilidad o nivel de confianza requerido para el intervalo

$$U(x) = k u_c(x)$$

Incertidumbre de medida

Incertidumbre relativa

El cociente entre una incertidumbre y el resultado de la medida es la Incertidumbre relativa correspondiente.

Incertidumbre típica relativa $\dfrac{u(x)}{x}$

Incertidumbre típica combinada relativa $\dfrac{u_c(x)}{x}$

Incertidumbre expandida relativa $\dfrac{U(x)}{x}$

No tiene dimensiones y suele expresarse en %. Para ello hay que multiplicar por 100 el resultado del cociente anterior

Evaluación de incertidumbres de medida

- **Evaluación tipo A**

Cuando la estimación de la magnitud se realiza a partir de un determinado número de observaciones repetidas e independientes de una magnitud que varía al azar, la incertidumbre se evalúa por métodos estadísticos. En este caso se toma como incertidumbre la desviación típica experimental de la medida.

$$u_A(x) = \text{desviación típica}$$

- **Evaluación tipo B**

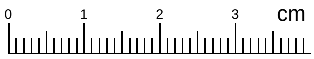
Cuando la estimación de la magnitud proviene de otros medios, las incertidumbres se determinan teniendo en cuenta la información disponible acerca de la resolución del instrumento de medida, medidas previas, certificados de calibración, especificaciones del fabricante…. En nuestro curso, en la mayoría de las situaciones, a menos que el guión de la práctica indique otra cosa, se tomará:

$$u_B(x) = \text{resolución del instrumento } (\delta x)$$

Resolución de un instrumento

En las prácticas de laboratorio de Física I, a menos que en el guión de la práctica a realizar se indique otra cosa, se tomará como resolución de un instrumento lo descrito a continuación:

- Si la medida se ha hecho con un instrumento analógico, se toma como resolución (δx) de éste la menor unidad que pueda medir.



$\delta x = 0{,}1$ cm

- Si el instrumento es digital, se toma como resolución (δx) una unidad de la última cifra.

234.75 mA

$\delta x = 0{,}01$ mA

Evaluación de incertidumbres de medida

Caso de una medida directa

La evaluación de la incertidumbre puede conllevar dos valoraciones diferentes:

1 **Evaluación tipo A**

La medida se repite varias veces, por lo que es necesario un análisis estadístico de los resultados.

- *Resultado de la medida: Valor medio* $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
- *Incertidumbre típica: Desviación típica del valor medio* $$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Si el número de medidas es pequeño (n<10) $$u(x) = \frac{x_{\text{máximo}} - x_{\text{mínimo}}}{6}$$

Evaluación de incertidumbres de medida

Caso de una medida directa

2 Evaluación tipo B

Independientemente del número de veces que se realice una medida siempre hay que tener en cuenta la incertidumbre asociada a la resolución del instrumento.

Si la medida sólo se ha realizado una vez, el resultado es directamente el valor de la medida obtenido.

- *Incertidumbre típica: Resolución del instrumento* $\boxed{u_B(x) = \delta(x)}$

3 Finalmente la incertidumbre típica de la medida tendrá en cuenta los dos tipos de contribuciones:

$$\boxed{u(x) = \sqrt{u_A(x)^2 + u_B(x)^2}}$$

Ejemplos

1,- Supongamos que medimos una longitud tres veces con una regla graduada en milímetros y obtenemos:

$$x_1 = 6{,}5cm \quad ; \quad x_2 = 6{,}5cm \quad ; \quad x_3 = 6{,}5cm$$

$$u(x) = u_B(x) = \delta x = 0{,}1g$$

Resultado: $x = (6{,}5 \pm 0{,}1)cm \;\; ; \;\; u_r = 1{,}5\%$

2.- Supongamos que medimos una temperatura cinco veces con un termómetro cuya resolución es 1ºC y obtenemos:

$$T_1 = 64^\circ C \;;\; T_2 = 61^\circ C \;;\; T_3 = 65^\circ C \;;\; T_4 = 68^\circ C \;;\; T_5 = 65^\circ C$$

Valor medio $\rightarrow$ $T = 64{,}6^\circ C$

Incertidumbre $\rightarrow$ $u_A(T) = \dfrac{(T_{max} - T_{min})}{6} = \dfrac{(68-61)}{6} = 1{,}2^\circ C$

$u_B(T) = \delta T = 1^\circ C$

$u(T) = \sqrt{1{,}2^2 + 1^2} = 1{,}56^\circ C$

Resultado

$T = (64{,}5 \pm 1{,}6)^\circ C \;\; ; \;\; 2{,}5\%$

Evaluación de incertidumbres de medida

Caso de una medida indirecta

1. Se expresa matemáticamente la relación existente entre la magnitud *A* que se desea medir y las magnitudes de entrada (x_1, x_2,…, x_N) que se miden directamente y de las que depende, mediante $A = f\,(x_1, x_2,\ldots, x_N)$. De esta expresión se obtiene el Resultado de la magnitud *A* que se desea medir

2. Se determinan las incertidumbres típicas $u(x_1)$, $u(x_2)$,…, $u(x_N)$ de las magnitudes de entrada, siguiendo el método indicado en el caso de las medidas directas.

3. Finalmente se obtiene la incertidumbre típica combinada de la magnitud *A* mediante la expresión:

$$u_c(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)} \Rightarrow$$

$$\boxed{u_c(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}u(x_N)\right)^2}}$$

Presentación de resultados.

- ¿Qué tienen de extraño estas frases?:
  - La extinción de los dinosaurios ocurrió hace aproximadamente 65 millones de años y 3 días.
  - Las pirámides se construyeron hace unos 4000 años y 27 segundos.
  - El viaje de Marco Polo a China duró unos 4 años, 3 meses, 12 días, 3 horas, 23 minutos, 12 segundos y 345 milésimas.

Presentación de resultados. Redondeo.

1) Se conservan las dos primeras cifras significativas de la incertidumbres (sin tener en cuenta la coma).

Se analiza a continuación la primera cifra que se descarta de forma que la última cifra conservada se redondea de la siguiente forma:

- **Aumentándola en 1 unidad si la primera cifra descartada es mayor que 5, o siendo igual a 5 al menos una de las siguientes cifras es mayor que 0.**
- **Dejándola tal cual si la primera cifra descartada es menor que 5**
- **Sustituyéndola por el número par más próximo si la primera cifra descartada es 5, y el resto es cero. Dicho de otra forma, si la última cifra conservada es par, se deja tal cual, y si es impar se aumenta en 1 unidad.**

2) A continuación, se expresa la magnitud de forma que su última cifra sea del mismo orden que la incertidumbre, y se redondea utilizando el mismo criterio anterior:

Ejemplo:

- Queremos redondear: 120,64 ± 7,55
  - Nos quedamos solo con el 75
  - ¡La primera cifra que desechamos es 5!

¿Aumentamos a 6 o lo dejamos en 5?

En estos casos se redondea siempre al número par más cercano, por tanto: u = 7,6

La última cifra explícita del valor será la de la primera posición decimal

Resultado: x = 120,6 ± 7,6

- Queremos redondear: 3,21487 ± 0,01398
  - Nos quedamos solo con el 13
  - ¡La primera cifra que desechamos es 9!

La incertidumbre es 14 y el orden de magnitud del valor es la milésima

Resultado: x = 3,215 ± 0,014

Ejemplos

1,43865 ± 0,01239 → 1,439 ± 0,012

4,81343 ± 0,04661 → 4,813 ± 0,047

132,2894 ± 2,8754 → 132,3 ± 2,9

5127 ± 234 → 5130 ± 230

0,53781 ± 0,00962 → 0,5378 ± 0,0096

5,03574 ± 0,02575 → 5,036 ± 0,026

2,3487 ± 0,345 → 2,35 ± 0,34

109,32 ± 8,75 → 109,3 ± 8,8

Algunas observaciones…

- Para números muy grandes o muy pequeños conviene usar la notación científica, esto es, en potencias de 10:

  18000 ± 3000 Pa = $(18{,}0 \pm 3{,}0) \times 10^{3}$ Pa

  $0{,}00256 \pm 0{,}00017$ N = $(2{,}56 \pm 0{,}17) \times 10^{-3}$ N

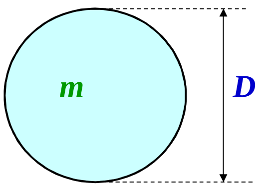
- En ocasiones hay que tener en cuenta que algunos ceros no se pueden suprimir:

  2 ± 0,21 cm → INCORRECTO

  2,00± 0,21 cm → CORRECTO

Ejemplo

Medición de la densidad de una bola de acero



D: Diámetro

m: masa

El diámetro D se mide con un calibre cuya resolución es: 0,01 cm

La masa m se mide con una balanza cuya resolución es: 0,1 g

La expresión a utilizar será:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{6m}{\pi D^3}}$$

Ejemplo

Medición de la densidad de una bola de acero

Cálculo de *D*:

Medida nº	1	2	3	4	5	6	7
D (cm)	**2,38**	**2,45**	**2,39**	**2,44**	**2,40**	**2,41**	**2,43**

Cálculo de incertidumbre típica de *D*:

$$\boxed{u_A(x_i) = \frac{X_{i,\text{máx}} - X_{i,\text{min}}}{6}} \qquad u_A(D) = \frac{2{,}45 - 2{,}38}{6} = 0{,}01166667$$

$$\boxed{u_B(x_i) = \delta x_i} \qquad u_B(D) = 0{,}01 \text{ cm}$$

$$\boxed{u(x_i) = \sqrt{u_A(x_i)^2 + u_B(x_i)^2}}$$

$$u(D) = \sqrt{u_A(D)^2 + u_B(D)^2} = \sqrt{0{,}01166667^2 + 0{,}01^2} = 0{,}01536590996$$

Ejemplo
Medición de la densidad de una bola de acero

Resultado de *D*:

$$D = 2{,}414 \pm 0{,}01536590 \Rightarrow \boxed{D = (2{,}414 \pm 0{,}015)\ \text{cm}}$$

Resultado truncado y redondeado

MUY IMPORTANTE: ***El dato encuadrado de D aquí expresado NO es un resultado final de la medida de D. Sólo se ha encuadrado el dato con el valor de D y la incertidumbre típica u(D) que SÍ serán los valores a usar posteriormente en el cálculo de la incertidumbre combinada u_c de ρ***

Ejemplo
Medición de la densidad de una bola de acero

Cálculo de m:

Se realiza una única medida de *m*, obteniéndose: $m = 57{,}7\ \text{g}$

Cálculo de incertidumbre típica de *m*:

En este caso la incertidumbre típica sólo es consecuencia de haber sido estimada la magnitud por una evaluación tipo B,

$$\boxed{u_B(x) = \delta x} \quad \Rightarrow \quad u(m) = u_B(m) = 0{,}1\,\text{g}$$

Resultado de *m*:

$$m = 57{,}7 \pm 0{,}1 \Rightarrow \boxed{m = (57{,}7 \pm 0{,}1)\ \text{g}}$$

Resultado truncado y redondeado

Ejemplo

Medición de la densidad de una bola de acero

$$\boxed{D = (2{,}415 \pm 0{,}015)\ \text{cm}} \qquad \boxed{m = (57{,}7 \pm 0{,}1)\ \text{g}}$$

Cálculo de ρ:

$$\rho = \frac{6m}{\pi D^3} \Rightarrow \quad \rho = \frac{6 \times 57{,}7}{\pi \times 2{,}414^3} \Rightarrow \quad \rho = 7{,}833672182\ \text{g/cm}^3$$

Ejemplo

Medición de la densidad de una bola de acero

Cálculo de incertidumbre típica combinada de ρ:

$$\boxed{u_c(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} u(x_N)\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)}}$$

$$u_c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial D} u(D)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial m} u(m)\right)^2} \qquad \boxed{\rho = \frac{6m}{\pi D^3}}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} u(m)\right)^2 = \left(\frac{6}{\pi D^3} u(m)\right)^2 = \left(\frac{6}{\pi \times 2{,}414^3} \times 0{,}1\right)^2 = 1{,}843228432 \times 10^{-4}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial D} u(D)\right)^2 = \left(\frac{-18m}{\pi D^4} u(D)\right)^2 = \left(\frac{-18 \times 57{,}7}{\pi \times 2{,}414^4} \times 0{,}015\right)^2 = 0{,}0213246$$

$$u_c(\rho) = \sqrt{1{,}843228432 \times 10^{-4} + 0{,}0213246} \Rightarrow u_c(\rho) = 0{,}1466592\ \text{g/cm}^3$$

Ejemplo

Medición de la densidad de una bola de acero

Resultado final :

$$\rho = 7{,}833672182 \ \ \text{g/cm}^3 \qquad u_c(\rho) = 0{,}1466592 \ \ \text{g/cm}^3$$

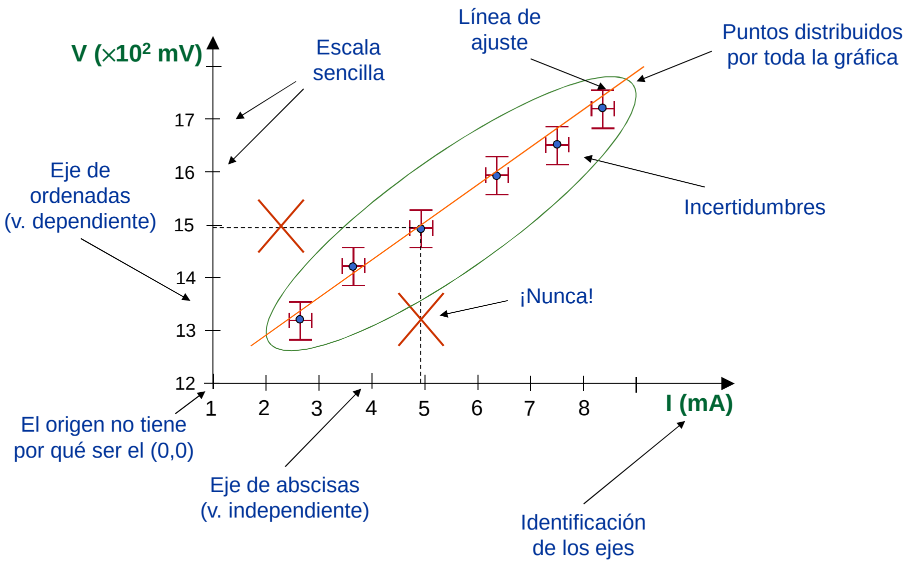
$$\rho = 7{,}833672182 \ \pm 0{,}1466592$$

$$\boxed{\rho = (7{,}83 \ \pm 0{,}15) \ \ \text{g/cm}^3}$$

Resultado truncado y redondeado

***IMPORTANTE**: Estrictamente en el resultado final la incertidumbre que debería expresarse es la Incertidumbre expandida U, que tendrá en cuenta el factor de cobertura k según el nivel de confianza que se requiera del resultado. En tal caso se usaría: U(x)=ku$_c$(x).*

Representaciones Gráficas



Ajuste por mínimos cuadrados

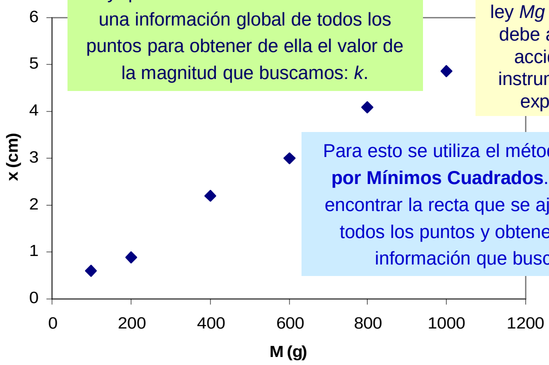
Supongamos que queremos calcular la constante elástica *k* de un resorte.

Para ello colgamos masas de distinto valor del muelle y medimos la elongación de éste:

M(g)	x(cm)
100	0,6
200	0,9
400	2,2
600	3,0
800	4,1
1000	4,9

Hay que buscar una manera de extraer una información global de todos los puntos para obtener de ella el valor de la magnitud que buscamos: *k*.

Los puntos no están perfectamente alineados como cabría esperar de la ley *Mg = kx*. Esto se debe a los errores accidentales e instrumentales del experimento.



Para esto se utiliza el método de **Ajuste por Mínimos Cuadrados**. Se trata de encontrar la recta que se ajusta mejor a todos los puntos y obtener de ella la información que buscamos.

Ajuste por mínimos cuadrados

La recta que buscamos es: y = m·x + b.

m → Pendiente

b → Ordenada en el origen

Se calculan de la siguiente manera: Teniendo los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc.:

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$u(m) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

$$u(b) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2}{n(n-2)}}$$

Coeficiente de correlación (*r*)

Hay que darlo siempre que se hace un ajuste por mínimos cuadrados.

Es un número que está entre 1 y -1 y que nos da información de cómo de bueno es el ajuste (cuanto más cercano a 1 o -1, mejor).

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

Si el coeficiente de correlación lineal es mayor o igual que 0.9 y menor que 1, siempre se debe expresar con todas sus cifras hasta la primera que no sea 9, redondeándola en su caso:

r = 0,9996714 → 0,9997

Para todas estas fórmulas el Departamento tiene disponible una hoja de cálculo que se puede descargar desde "Enseñanza Virtual" que simplemente introduciendo la tabla de valores os da directamente m, b, u(m), u(b), y r

No obstante si alguien no dispone del programa Excel, necesario para que funcione la hoja de cálculo, en el Laboratorio siempre hay ordenadores encendidos para que al finalizar cada práctica se ejecute la aplicación anterior y se obtengan los parámetros comentados.

En nuestro ejemplo:

M(g)	x(cm)
x_i	y_i
100	0,6
200	0,9
400	2,2
600	3,0
800	4,1
1000	4,9

$$m = \ldots = 0{,}00491233 \frac{\text{cm}}{\text{g}} \qquad u(m) = \ldots = 0{,}00016797 \frac{\text{cm}}{\text{g}}$$

$$b = \ldots = 0{,}07863014 \text{ cm} \qquad u(b) = \ldots = 0{,}05348580 \text{ cm}$$

$$r = \ldots = 0{,}99767 \rightarrow 0{,}998$$

Resultados REDONDEADOS
$$\begin{cases} m = 0{,}00491 \pm 0{,}00017 \ \dfrac{\text{cm}}{\text{g}} \\ b = 0{,}079 \pm 0{,}053 \text{ cm} \end{cases}$$

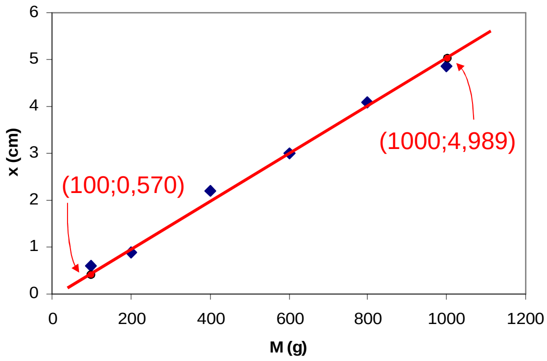
$$y = mx + b \Rightarrow x = 0{,}00491M + 0{,}079$$

En nuestro ejemplo:

M(g)	x(cm)
x_i	y_i
100	0,6
200	0,9
400	2,2
600	3,0
800	4,1
1000	4,9

$$y = mx + b \Rightarrow x = 0{,}00491M + 0{,}079$$

$$\begin{cases} M_1 = 100 \Rightarrow x_1 = 0{,}570 \\ M_2 = 1000 \Rightarrow x_2 = 4{,}989 \end{cases}$$



En nuestro ejemplo:

M(g) x_i	x(cm) y_i
100	0,6
200	0,9
400	2,2
600	3,0
800	4,1
1000	4,9

$$\left\{\begin{array}{l} m = 0{,}00491 \pm 0{,}00017\ \dfrac{\text{cm}}{\text{g}} \\ b = 0{,}079 \pm 0{,}053\ \text{cm} \end{array}\right.$$

$$Mg = kx$$

$$\boxed{x} = \boxed{\frac{g}{k}}\boxed{M} + \boxed{0}$$

$$\boxed{y} = \boxed{m}\boxed{x} + \boxed{b}$$

$$m = \frac{g}{k} \rightarrow k = \frac{g}{m} = \frac{981\dfrac{cm}{s^2}}{0{,}00491\dfrac{cm}{g}} = 199796{,}334\,\frac{g}{s^2}$$

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial g}u(g)\right)^2} = \ldots = 6920{,}5895\frac{g}{s^2}$$

$$\boxed{k = (199{,}8 \pm 6{,}9) \times 10^3\ \text{g/s}^2}$$