Física 1

Grado en Ingeniería de la Salud

Primer parcial. 12-15-2015. Curso 2015-16. Grupo 1.

Instrucciones y notas: razone todo lo que haga, no es suficiente con hacerlo. Varias cuestiones de cada problema se pueden hacer independientemente.

Problema 1 Se lanza un proyectil de masa m desde el suelo en $t = 0$ con velocidad v_0 formando un ángulo θ con la horizontal. **(a)** Calcular la aceleración tangencial a_t y normal a_n en el punto más alto de la trayectoria y en el momento inicial (se puede hacer sin resolver el resto del problema) **(b)** Deducir las expresiones de v_x, v_y, x e y en función del tiempo, siendo x e y las coordenadas horizontal y vertical, respectivamente. Utilizar el punto de lanzamiento como origen de coordenadas **(c)** A partir de dichas expresiones deducir la ecuación de la trayectoria $y = y(x)$. **(d)** Obtener la altura máxima h_M y su coordenada horizontal x_M. **(e)** Obtener la componente vertical de la velocidad v_y en función de la altura h a partir de la ley de conservación de la energía y de la expresión de v_x obtenida en (b). **(f)** Si en un tiro real con $m = 10\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$ y $\theta = 90°$ se alcanza una altura de 400 m y se considera $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ ¿qué energía se ha perdido por fricción del aire?.

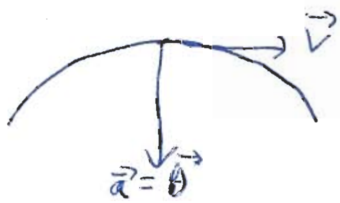
Problema 2 Una rueda hueca de masa m y radio R se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ con respecto de la horizontal. Inicialmente está en reposo sostenida por una fuerza F paralela al plano y que pasa por su centro de masas. **(a)** Calcular el valor de dicha fuerza y de las componentes tangencial F_R (de rozamiento) y normal N de la fuerza que ejerce el plano sobre la rueda en el punto de contacto. Posteriormente se suprime la fuerza F y se supone que la rueda rueda sin deslizar. En ese caso, calcular **(b)** la aceleración del centro de masas de la rueda a_{cm}, la aceleración angular α y los nuevos valores de F_R y N. **(c)** Igualmente, calcular la energía cinética de la rueda cuando su centro de masas ha descendido una altura h así como su energía cinética de rotación y su energía cinética de traslación.

Problema 1 (1 a 3)

a) La aceleración tangencial es la componente de a paralela a la velocidad y la normal, la componente perpendicular a la velocidad.

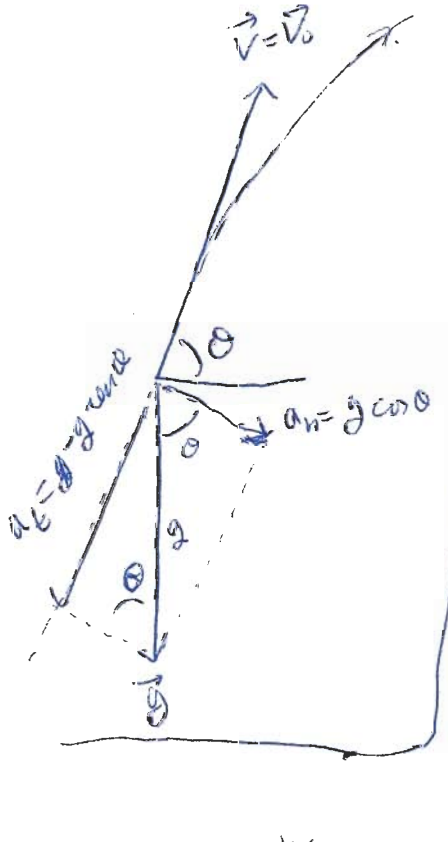
En todo momento la única aceleración es la gravedad $\vec{a} = -g\vec{j} = \vec{g}$

a1) En el punto más alto, $v_y = 0$, luego $\vec{v}$ es horizontal, luego



$\vec{g} \perp \vec{v} \Rightarrow \boxed{a_t = 0 \quad y \quad a_n = g}$ (valor positivo hacia el interior de la curva.

a2) En el momento inicial $\vec{v}$ forma un ángulo θ con la horizontal,



proyectando $\vec{g}$ sobre las direcciones paralela y normal según el dibujo, se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_t = -g\,\text{sen}\,\theta \\ \\ a_n = g\cos\theta \end{array}}$$

(negativa porque está disminuyendo el módulo de la velocidad)

siempre positiva, hacia el interior de la curva

b) Conocemos que $a_x = 0$; $a_y = -g$ constantes

$V_{0x} = V_0\cos\theta$; $V_{0y} = V_0\,\text{sen}\,\theta$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0$, entonces

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow V_x = cte \Rightarrow \boxed{V_x = V_0\cos\theta} \quad (1)$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_x\,dt \Rightarrow x - \cancel{x_0}^{\,0} = V_0\cos\theta\, t \Rightarrow$$

$$\boxed{x = V_0\cos\theta\, t} \quad (2)$$

$$a_y = -g \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = -g \Rightarrow \int_{V_{0y}}^{V_y} dV_y = \int_0^t -g\,dt \Rightarrow V_y - V_{0y} = -gt \Rightarrow \boxed{V_y = V_0\,\text{sen}\,\theta - gt} \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = +V_y \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t +V_y\,dt = \int_0^t +(V_0\,\text{sen}\,\theta - gt)\,dt \Rightarrow y - \cancel{y_0}^{\,0} = V_0\,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = V_0\,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2} \quad (4)$$

Problema 1 continuación (2 de 3)

c) Para obtener $y = y(x)$, eliminamos el tiempo entre las ecuaciones (2) y (4). De (2) $t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$, sustituyendo en (4):

$$y = V_0 \operatorname{sen}\theta \frac{x}{V_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta}}$$

d) La altura máxima corresponde al momento en que el proyectil deja de subir, esto es $v_y = 0$, luego de (3)

$v_{y,M} = 0 = V_0 \operatorname{sen}\theta - g t_M \Rightarrow \quad t_M = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$, sustituyendo en (4)

$$h_M = y(t_M) = V_0 \operatorname{sen}\theta \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2}$$, simplificando

$$\boxed{h_M = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}}$$

Igualmente, su coordenada horizontal es, sustituyendo t_M en (2)

$$x_M = V_0 \cos\theta \, t_M = V_0 \cos\theta \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}}$$

e) La suma de la energía cinética y potencial se conservan, pero además sabemos que $v_x = V_0 \cos\theta$ es constante. Igualando la energía en el origen y en cualquier punto:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 + m g \cancelto{0}{h_0} = \frac{1}{2} m V^2 + m g h \Rightarrow$$

$\frac{1}{2} m (V_{0x}^2 + V_{0y}^2) = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2) + m g h$, $V_x = V_{0x} = V_0 \cos\theta$, se simplifica

$$\frac{1}{2} m (\cancel{V_0^2 \cos^2\theta} + V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta) = \frac{1}{2} m (\cancel{V_0^2 \cos^2\theta} + V_y^2) + m g h \Rightarrow$$

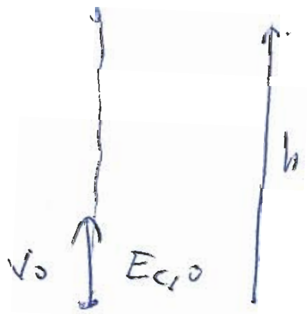
$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} \cancel{m} V_y^2 + \cancel{m} g h \Rightarrow \boxed{V_y = \sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2 g h}}$$

Problema 1 (3 de 3)

f) En el instante inicial sólo hay energía cinética:

$$E_{c,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\, 10\,\text{kg} \left(100\,\text{m/s}\right)^2 = 50000\,\text{J}$$

Como $\theta = 90°$ el tiro es vertical, en el punto más alto sólo hay energía ~~cinética~~ potencial ($v_x = 0$ siempre, $v_y = 0$ en ese punto)



La energía potencial en el punto más alto es

$$U = mgh = 10\,\text{kg}\; 10\,\text{m/s}^2\; 400\,\text{m} = 40000\,\text{J}.$$

Luego, la diferencia se ha perdido en fricción con el aire:

$$\boxed{Q = E_{c,0} - U(\text{punto más alto}) = 10000\,\text{J}}$$

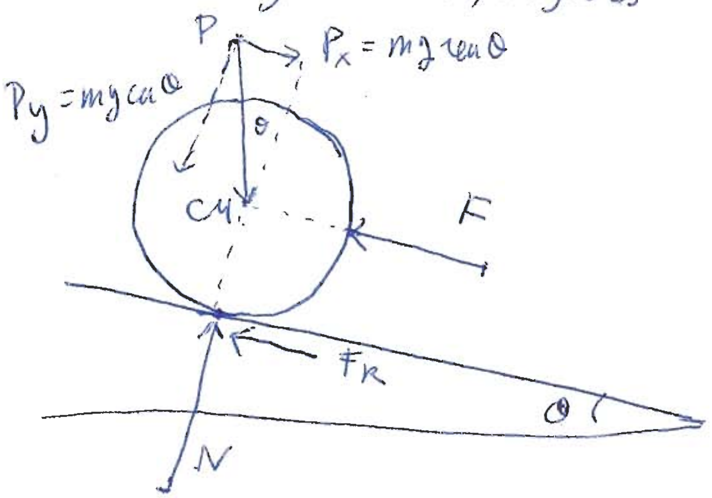
Problema (2) (1Q3)

$I = mR^2$

a) Se trata de una situación de equilibrio de un sólido rígido en que el eje de giro es perpendicular al plano del movimiento. La condición de equilibrio es:

$\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum \tau = 0$ (componente del momento de fuerzas externas perpendicular al plano)

El diagrama de fuerzas es:



Tomamos el eje x paralelo al plano hacia abajo y el y ~~paralelo~~ perpendicular al plano y hacia arriba.

Como no hay desplazamiento no conocemos F_R, solo sabemos que es menor que $\mu_e N$, pero en general $F_R \neq \mu_e N$, a diferencia del dinámico.

Entonces: $\sum F_x = 0 \Rightarrow$

$$mg\,sen\theta - F - F_R = 0 \quad (1)$$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \underset{(2)}{N - mg\cos\theta = 0} \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta}$ Ya es un resultado

$\sum \tau = 0$, podemos elegir cualquier punto como centro de momentos, pero recordando que $\tau = F d$ (d: distancia de la línea de acción al centro de momentos), el punto más conveniente es el centro de masas, ya que F, N y P, tienen líneas de acción que pasan por él, luego $d = 0$ y dan momento nulo. Tomamos sentido positivo el horario.

$\sum \tau = 0 \Rightarrow F_R R = 0 \Rightarrow \boxed{F_R = 0}$, sustituyendo en (1):

$\boxed{F = mg\,sen\theta}$, Ya tenemos las tres fuerzas que nos piden.

Problema (2) continuación (2 de 3)

(b) En el problema dinámico, las ecuaciones son:

$$\sum F_x = m\, a_{cm,x} \; ; \; \sum F_y = m\, a_{cm,y} \; ; \; \sum \tau = I \alpha$$

Además como rueda sin deslizar $a_{cm} = \alpha R$ y $v_{cm} = \omega R$

El momento de inercia respecto al eje de simetría es

$I = \int r^2 dm$, como toda la masa está a distancia R,

ya que la rueda es hueca, $I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$

$\Rightarrow \boxed{I = mR^2}$

Con el mismo esquema de la página anterior

$\sum F_y = 0$ (no hay aceleración perpendicular al plano) $\Rightarrow$

$N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta}$ Ya es un resultado

$\sum F_x = m\, a_{cm,x} = m\, a_{cm} \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta - F_R = m\, a_{cm}$ (2)

$F_R < \mu_e N$, el punto de contacto no desliza, luego es rozamiento estático

$\sum \tau = I\alpha$ (tiene que ser respecto al cm o un punto fijo que aquí no hay). Tomamos sentido horario positivo

El único momento no nulo es el de F_R igual que en (a) $\Rightarrow$

$F_R R = I\alpha \Rightarrow F_R R = mR^2 \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \underline{F_R = m\, a_{cm}}$ (3)

sustituyendo en (2)

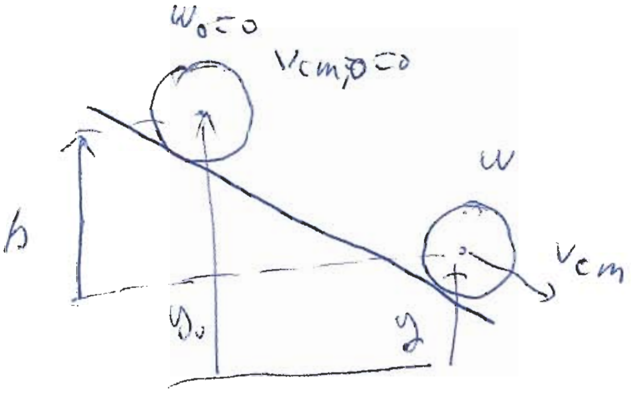
$mg\,\text{sen}\,\theta - m\, a_{cm} = m\, a_{cm} \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = 2m\, a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{2}}$

$\alpha = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{2R}}$ sustituyendo aun en (3).

$\boxed{F_R = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{2}}$ Ya tenemos todas las respuestas.

Problema (2) continuación (3 de 3)

(c) El punto de contacto de la rueda y el plano no desliza, luego no hay disipación de energía por rozamiento. La energía mecánica (cinética + potencial) se conserva.



$$mgy_0 + \cancel{E_{c,0}}^{\,0} = mgy + E_c \Rightarrow$$

$$E_c = mg(y_0 - y) = mgh \Rightarrow$$

$$\boxed{E_c = mgh}$$

Esta energía cinética tiene una parte de traslación del cm $\frac{1}{2} m v_{cm}^2$ y otra de rotación respecto al cm $\frac{1}{2} I \omega^2$, siendo I respecto al centro de masa.
Además $\omega R = v_{cm}$ pues rueda sin deslizar

$$E_{c,t} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

$$E_{c,R} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

Es decir $E_{c,t} = E_{c,R}$ y por lo tanto cada una es la mitad de $E_c = E_{c,t} + E_{c,R} \Rightarrow$

$E_{c,t} = \dfrac{mgh}{2}$	$E_{c,R} = \dfrac{mgh}{2}$