PRIMER PARCIAL DEL CURSO 2016/17 (9-12-2016)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 1

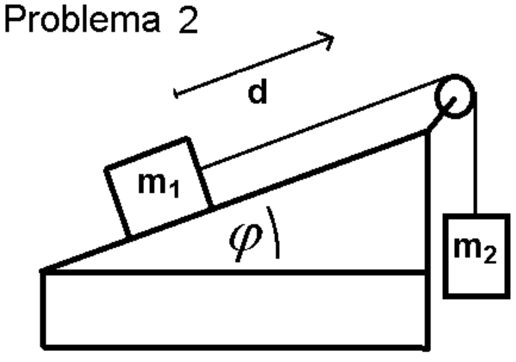
Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$.

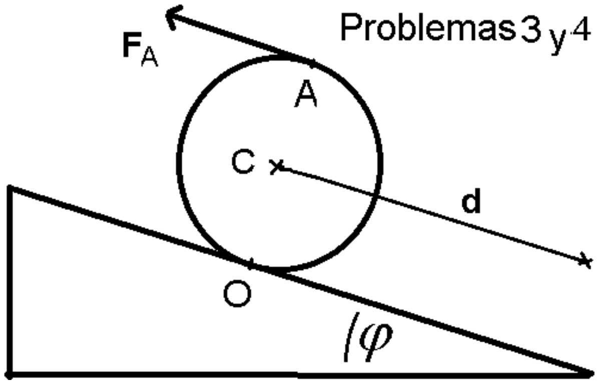
1. La posición de una partícula viene dada por $x(t) = 5 + 4t^2 - (4/3)\,t^3$, donde x está en metros y t en segundos. (**a**) Calcular la velocidad v(t) y la aceleración a(t). (**b**) Calcular la velocidad media v_m y la aceleración media a_m entre $t_0 = 0$ s y $t_1 = 1$ s. (**c**) Calcular los tiempos: t_{a0} en que la aceleración se anula; $t_{\text{v0}} > 0$ en que la velocidad se hace cero y t_{fin} en que la partícula vuelve al punto inicial ($t = 0$). (**d**) Calcular el valor máximo x_{max} que alcanza $x(t)$ así como la velocidad $v_{\text{m,f}}$ y celeridad ($c = |v|$) media $c_{\text{m,f}}$ entre $t = 0$ hasta que vuelve a la posición inicial en t_{fin}.

2. Una caja de masa m_1 está conectada a una segunda caja de masa m_2 por medio de una cuerda y de una polea sin fricción como se indica en la figura. La masa de la polea y de la cuerda se considerán despreciables. Los coeficientes de fricción estático y dinámico entre m_1 y el plano son μ_e y μ_d. (**a**) Dibujar los diagramas de fuerzas sobre cada bloque suponiendo que m_1 se mueve hacia la derecha. (**b**) Obtener las ecuaciones de movimiento (sumas de fuerza igual a masa por aceleración en cada dirección y para cada masa) suponiendo que (**b1**) m_1 está acelerada hacia la derecha y (**b2**) hacia la izquierda. (**c**) Calcular los valores mínimo y máximo de m_2 para que el sistema esté en equilibrio estático. A partir de ahora suponemos que m_2 es tal que m_1 se acelera hacia la derecha desde el reposo, y recorre una distancia d sobre el plano inclinado. (**d**) Obtener en función de la distancia d el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento, así como el incremento de energía potencial de cada masa m_1 y m_2 en función de d y φ. (**e**) Obtener la velocidad con que se mueven las dos masas en función de d y φ.

3. Una rueda homogénea de masa m y radio R está colocada sobre un plano que forma un ángulo φ con respecto a la horizontal. Se mantiene en equilibrio debido a una fuerza de módulo F_A paralela al plano aplicada en el punto A y a la fuerza de rozamiento con el plano F_R. Calcular (**a**) Los momentos de fuerza (torcas) de las fuerzas que actuan sobre la rueda con respecto al centro de masas de la rueda (punto C) y con respecto al punto O de contacto con el plano (8 momentos $\tau_O(F_A), \tau_O(F_R), \ldots.\tau_C(F_A), \ldots$). (**b**) Escribir las ecuaciones de equilibrio de la rueda (3 ecuaciones). (**c**) El valor de F_A y F_R, en función de φ, indicando el sentido de F_R.

4. En la misma situación que en el problema anterior, se suprime la fuerza $\vec{F}_A$ en $t = 0$ y la rueda rueda sin deslizar. (**a**) Calcular la aceleración angular α y la aceleración del centro de masas a_C de la rueda en el instante inicial. (**b**) Calcular la energía cinética total cuando el centro de masas de la rueda se ha desplazado una distancia d en función de φ y d. (**c**) Obtener la velocidad angular ω y la velocidad del centro de masas v_C en función del ángulo φ y de la distancia d. **Nota:** El momento de inercia de la rueda respecto a C es $I_C = \frac{1}{2}\, mR^2$.





PARCIAL 1
P1 - 2016-17

$x(t) = 5 + 4t^2 - \frac{4}{3}t^3$ x en cm, t en s.

a) (2P) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{v(t) = 8t - 4t^2}$; $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{a(t) = 8 - 8t}$

b) v_m, a_m entre $t=0$ y $t=1$
(2P)

$v_m = \frac{X(1)-X(0)}{1-0}$; $X(0) = 5m$; $X(1) = 5 + 4 \cdot 1^2 - \frac{4}{3}1^3 = 5 + \frac{8}{3}m$; $v_m = \frac{5 + 8/3 - 5}{1} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{8}{3}\frac{m}{s} = 2{,}67 m/s}$

$a_m = \frac{V(1)-V(0)}{1-0}$; $V(0) = 0 m/s$; $V(1) = 8 \times 1 - 4 \times 1^2 = 4m \Rightarrow a_m = \frac{4-0}{1-0} \Rightarrow \boxed{a_m = 4 m/s^2}$

c) t_{a0} ; t_{v0}, t_{FIN}.
(3P)

t_{a0} / $a(t_{a0}) = 0 \Rightarrow 8 - 8t_{a0} = 0 \Rightarrow \boxed{t_{a0} = 1s}$

t_{v0} / $v(t_{v0}) = 0 \Rightarrow 8t_{v0} - 4t_{v0}^2 = 0 \Rightarrow 4t_{v0}(2 - t_{v0}) = 0$ ↗ $t_{v0} = 0$ ↘ $\boxed{t_{v0} = 2s}$

$X(t_{fin}) = X(0) \Rightarrow 5 + 4t_{FIN}^2 - \frac{4}{3}t_{FIN}^3 = 5 \Rightarrow 4t_{FIN}^2(1 - \frac{1}{3}t_{FIN}) = 0 \Rightarrow t_i = 0$; $\boxed{t_{FIN} = 3S}$

d) X_{max}?, el valor máximo se obtiene cuando $v=0$, antes $v>0$ y
(3P) luego $v<0$, x disminuye. Es decir en $t_{v0} = 2s$. Luego

$X_{MAX} = 5 + 4 \times 2^2 - \frac{4}{3}2^3 \Rightarrow \boxed{X_{MAX} = 10{,}33 S.}$

Velocidad en el tiempo entre que sale $t=0$ en $X(t=0)$ hasta que vuelve al mismo punto.

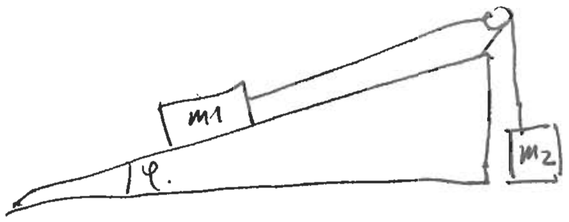
Cuando vuelve $t = t_{FN} = 3S$. El punto es $X(t_{FN}) = X(0) = 5m$

$v_{m,f} = \frac{X(t_{FIN}) - X(0)}{t_{FIN} - 0} = \frac{0}{t_{FIN} - 0} \Rightarrow \boxed{v_{m,f} = 0}$

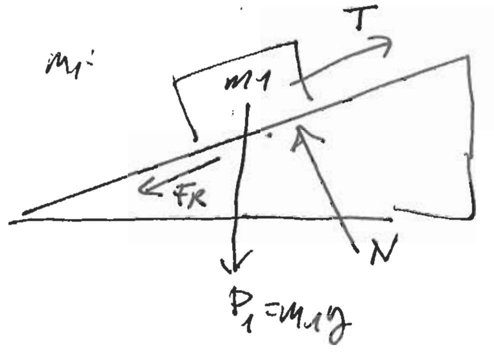
Celeridad media. $c = |\vec{v}|$ $c_{m,f} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$, tenemos que considerar los periodos en que v cambia de signo de $t=0$ a $t_{v0} = 2S$ v es positiva y $|c| = |v| = v$, x varía de $X(0) = 5m$ a X_{max}., recorre $x_{max} - 5 = 10{,}33 - 5 = 5{,}33m$. ~~De~~ En el camino de vuelta recorre la misma distancia

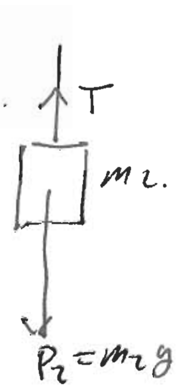
$c_{m,f} = \frac{2(X_{max} - X(0))}{t_{FN} - t_0} = \frac{2 \times 5{,}33}{3}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{c_{m,f} = 3{,}55 m/s}$

P2 PARCIAL 2016-17 a-b



a) Diagramas de fuerzas, si m_1 se mueve hacia la dcha. (m_2 baja)
(2p)

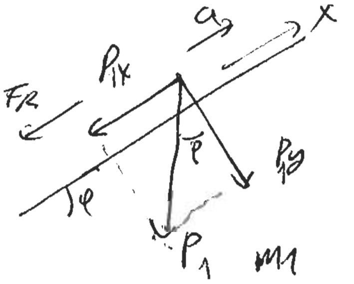


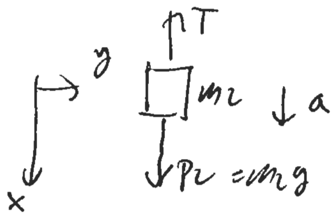


(2p) b) Ecuaciones de movimiento ($\Sigma F_i = m a_i$) para cada masa y dirección i

b1) Se acelera hacia la dcha. La T es la misma en todo tramo, pues la polea no tiene masa, ni la cuerda.. El rozamiento es dinámico, pues m_1 está acelerada, luego

$F_R = F_{R,d} = \mu_d N$, $P_{1x} = P_1 \sin\varphi = m_1 g \sin(\varphi)$; $P_{1y} = m_1 g \cos(\varphi)$





, la $F_{R,d}$ se opone a la dirección del movimiento, tal como se muestra.

m_2: $\Sigma F_x = m a$: $\boxed{m_2 g - T = \underset{\uparrow\,2.}{m_1} a.}$ (1)

m_1: $\Sigma F_x = m a$:

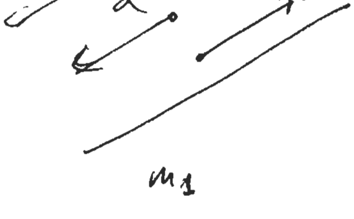
$\boxed{T - m_1 g \sin(\varphi) - F_R = m_1 a.}$ (2)

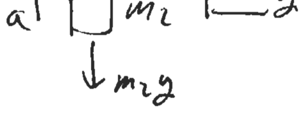
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{N - m_1 g \cos(\varphi) = 0}$ (3)

Además, sustituyendo $\boxed{F_R = \mu_d N = \mu_d m_1 g \cos(\varphi)}$: $T - m_1 g \sin(\varphi) - \mu_d m_1 g \cos(\varphi) = m_1 a.$

(opcional).

b2) Si se acelera hacia la izda, es más cómodo cambiar el sentido de los ejes





m_2: $T - m_2 g = m_2 a$ (4)

$m_1 g \sin(\varphi) - T - F_R = m_1 a$ (5)

$N - m_1 g \cos(\varphi) = 0$ (6)

$F_R = \mu_d N$ (7)

P2 PARCIAL 2016-17 - c) Valor máximo de y mínimo de m_2 para que esté (2P) en equilibrio

Si m_2 aumenta, llegará un momento en que la fuerza de rozamiento no puede impedir que m_2 descienda y m_1 se empiece a mover hacia la dcha. $F_{R,e} \leq \mu_e N$, en el caso límite $F_{R,e} = \mu_e N$ y serán válidas las ec. (1), (2) y (3) con $F_R = F_{R,e} = \mu_e N$

$$m_2 g - T = m_2 a = 0$$
$$\underline{T - m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - \mu_e N = m_1 a = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_2 g - m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - \mu_e N = 0 \\ \text{Además} \quad N = m_1 g \cos(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow m_2 g - m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - \mu_e m_1 g \cos(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_{2\,MAX} = m_1(\operatorname{sen}(\varphi) + \mu_e \cos(\varphi)) \quad MAX}$$

Si m_2 disminuye, llegará un momento en que m_1 empieza a deslizar hacia la izda, luego, la ecuaciones serán (4), (5) y (6) con $F_R = \mu_e N$ en el caso límite. Luego, en eq $a = 0$.

$$T - m_2 g = 0$$
$$(+) \quad \underline{m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - T - \mu_e N = 0}$$

$m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - m_2 g - \mu_e N = 0$, además $N = m_1 g \cos(\varphi) \Rightarrow$

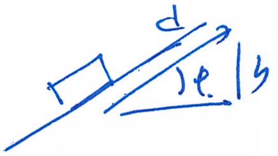
$$m_1 g \operatorname{sen}(\varphi) - m_2 g - \mu_e m_1 g \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{m_{2\,min.} = m_1(\operatorname{sen}(\varphi) - \mu_e \cos(\varphi)) \quad MIN}$$

Hay eq estático para

~~Ahora se mueve hacia la dcha~~ $m_{2\,min} < m_2 < m_{2\,max}$.

(d) Como $F_R = \mu_d N = \mu_d m_1 g \cos(\varphi)$ es cte y paralela al desplazamiento
(2P)

$$W_R = F_R d \Rightarrow \boxed{W_R = \mu_d m_1 g \cos(\varphi) d}$$



Si m_1 se desplaza d, sube $h_1 = d \operatorname{sen}(\varphi) \Rightarrow$

$$\Delta E_{p_1} = m_1 g h \Rightarrow \boxed{\Delta E_{p_1} = m_1 g d \operatorname{sen}(\varphi)}$$

Al mismo tiempo, m_2 baja $d \Rightarrow \boxed{\Delta E_{p_2} = -m_2 g d}$

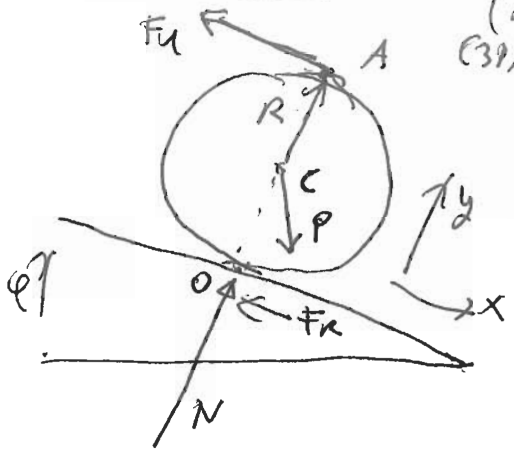
(e) Se pierde energía mecánica con el rozamiento $\Rightarrow$
(2P) $E_{mi} = E_{mf} + |W_R| \Rightarrow E_{mf} = E_{mi} - |W_R| \Rightarrow E_{cf2} + E_{pf2} + E_{cf1} + E_{pf1} =$

$$= \underset{0}{\cancel{E_{ci2}}} + E_{pi2} + \underset{0}{\cancel{E_{ci1}}} + E_{pi1} - |W_R|.$$

$$\Rightarrow E_{cf2} + E_{cf1} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\Delta E_{p_1} - \Delta E_{p_2} - |W_R| = -m_1 g d \operatorname{sen}(\varphi) + m_2 g d - \mu_d m_1 g \cos(\varphi) d.$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \left[\frac{2}{(m_1 + m_2)}(m_2 g d - m_1 g d \operatorname{sen}(\varphi) - \mu_d m_1 g \cos(\varphi) d\right]^{1/2}}$$

Problema ③ Parcial 1 2016-17



(a) $\tau_C(F_i)$ $\tau_O(F_i)$?
(3P) El momento de una fuerza $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se reduce en los problemas planos a una componente de $\vec{\tau}$ perpendicular al plano

$\tau = F\, \cancel{F} \,\text{sen}(\alpha) = F d$, donde d es la distancia de la línea de acción al punto respecto al que se calculan los momentos.

Respecto a C:, P está aplicada en C, luego d es nula. Igualmente la línea de acción de N pasa por C, luego d es también nula. ⇒

$\boxed{\tau_C(P) = \tau_C(N) = 0}$

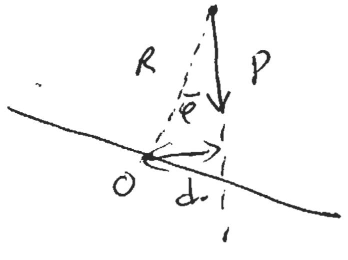
Las distancias de las líneas de acción de F_A y F_R a C, son R.
Tomamos sentido + el horario (es del movimiento probable al suprimir F_A.)

$\boxed{\tau_C(F_R) = R F_R \; ; \; \tau_C(F_A) = -R F_A}$

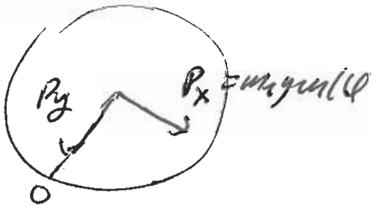
Respecto a O, F_R y N tienen distancias nulas $\boxed{\tau_O(N) = \tau_O(F_R) = 0}$
La dist de F_A es 2R ⇒ $\boxed{\tau_O(F_A) = -2R F_A}$

Para el peso, vemos que $d = R\,\text{sen}(\varphi)$ →

$\boxed{\tau_O(P) = + P R\,\text{sen}(\varphi) = m g\,\text{sen}(\varphi)}$



También se puede ver como P descompuesta en dos componentes. P_y pasa por O, luego d=0 $\tau_O(P_y) = 0$, y la distancia de P_x es R ⇒ $\tau_O(P_x) = R P_x = R m g\,\text{sen}(\varphi)$.



(3P) (b) Ec. de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma \tau = 0$

$\Sigma F_x = 0$ $\quad P_x - F_R - F_A = 0 \Rightarrow \boxed{m g\,\text{sen}(\varphi) - F_R - F_A = 0}$ (1) $\Sigma F_y = 0$: $\boxed{N - m g \cos(\varphi) = 0}$ (2)

$\Sigma \tau = 0$, tomamos C: $\boxed{F_R R - F_A R = 0}$ (3) Nota $F_R \leq \mu_e N$ NO IGUAL

(3P) (c) Obtener F_A y F_R.

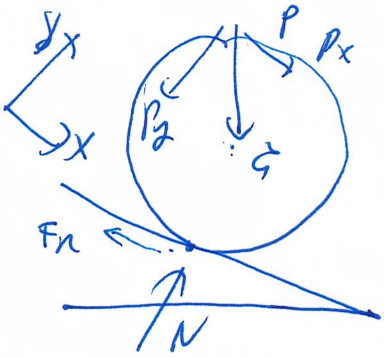
De (3) $F_R = F_A$; Sust. en (1) $m g\,\text{sen}(\varphi) - 2F_A = 0 \Rightarrow$

$\boxed{F_A = F_R = \frac{1}{2} m g\,\text{sen}(\varphi)}$

NOTA $F_R \leq \mu_e N$
NO IGUAL

Parcial

Problema (4) 2011-2012



$I = \frac{1}{2} m R^2.$

$P_x = mg\,\mathrm{sen}(\varphi)$
$P_y = mg\cos(\varphi)$, rueda → $v = \omega R$ y $a_{cm} = \alpha R$.

a) obtener a_{cm} y α.

Ecuaciones: $\sum F_x = m a_x$; $\sum F_y = m a_y$ cm

$\sum \tau_{ex} = I\alpha$, es decir.

$P_x - F_R = m a_{cm} \Rightarrow mg\,\mathrm{sen}(\varphi) \overset{-F_R}{=} m a_{cm}$ (1)

$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = mg\cos(\varphi)$

Los momentos debe ser respecto al C.M. en dinámica

$F_R R = I\alpha$

$\Rightarrow F_R R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a_{cm}}{R} \rightarrow F_R = \frac{1}{2} M a_{cm}.$
$(M \equiv m)$

sustituyendo en (1)

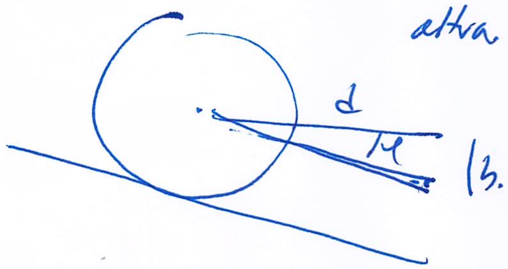
$mg\,\mathrm{sen}(\varphi) - \frac{1}{2} m a_{cm} = m a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2}{3} g\,\mathrm{sen}(\varphi)}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{3R} g\,\mathrm{sen}(\varphi)}$

Note $F_R \leq \mu_e N$
No =.

El punto de contacto tiene velocidad cero si no desliza, luego F_R es estática.

b)



Cuando desciende d, el ~~cm~~ C.M. desciende una altura $h = d\,\mathrm{sen}(\varphi)$, luego hay una perdida de $\Delta E_p = -mgh$ que se transforma en cinética. ⇒

$\Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow$

$\cancel{\frac{1}{2} mv}$ $E_c - \underset{0}{\underset{||}{E_{c,i}}} = mg d\,\mathrm{sen}\,\varphi \Rightarrow$

(2) $\boxed{E_c = mg d\,\mathrm{sen}\,\varphi}$ (La fuerza de rozamiento estática no realiza trabajo pues no se desplaza.)

(c) La energía cinética tiene una componente de rotación y otra de traslación respecto al cm

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right) \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} m v^2,$

usando (2) $\frac{3}{4} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g d\,\mathrm{sen}(\varphi)$ $\boxed{v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g d\,\mathrm{sen}(\varphi)}}$

$\omega = \frac{v_{cm}}{R} \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4 g d\,\mathrm{sen}(\varphi)}{3R}}}$