Física 1
Grado en Ingeniería de la Salud
Segundo parcial. 14-01-2016. Curso 2015-16. Grupo 1.

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$.

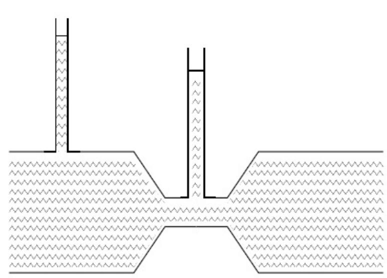
Problema 1 (a) Enuncie y demuestre la ecuación fundamental de la estática de fluidos considerando un cilindro imaginario vertical de base A y altura h submergido en un fluido. **(b)** Si tenemos una mezcla de aceite y agua, el aceite de densidad ρ_{C} =0,9 g/cm^3 flota sobre el agua de densidad ρ_{A} =1,0 g/cm^3. Obtener la presión manométrica y absoluta en un punto a 50 cm por debajo de la interfaz entre el aceite y el agua, suponiendo que la capa de aceite tiene un grosor de 30 cm. Suponer $g = 10\,\text{m/s}^2$ y 1atm=10^5 Pa.

Problema 2 Un sistema para medir la velocidad y el caudal de un fluido en una tuberia de sección A_1 está formado por un tubo vertical abierto seguido de un estrechamiento de sección A_2 en el que hay concectado otro tubo vertical abierto. Se observa que en el primer tubo el líquido sube una altura h_1 mayor que en el segundo h_2. (**a**) Deducir la velocidad v_1 del fluido antes del estrechamiento así como el caudal I que recorre la tubería en función de A_1, A_2, h_1, h_2 y de la aceleración de la gravedad g. (**b**) Si A_1 =2,5 cm^2, A_2=1,0 cm^2, g =10 m/s^2 y $h_1 - h_2$=9 cm, obtener v_1 en cm/s, e I en litros por minuto. (**c**) Si el fluido es agua con densidad $\rho_A = 1\text{g/cm}^3$ calcular la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 de la tuberia. Igualmente si es mercurio con densidad ρ_{Hg}=13,6 g/cm^3.

Problema 3 Una onda armónica viene descrita por la ecuación $y = Acos(kx + \omega t + \phi_0)$, tiene una amplitud A =0,01 mm, frecuencia angular $\omega = 2\pi \times 10^3$ rad/s, se propaga con una velocidad $c = 340$ m/s y su fase inicial es $\phi_0 = \pi$ rad. (**a**) Calcular el periodo T, la frecuencia f, la longitud de onda λ, el número de ondas k y el sentido de propagación. (**b**) Demostrar que cumple la ecuación diferencial de ondas. (**c**) Calcular la velocidad de oscilación máxima v_{max} y la aceleración máxima a_{max}. (**d**) Calcular la fase, la velocidad de oscilación y la aceleración en el instante $t = T/4$ y la posición $x = \lambda/2$. (**e**) Calcular la diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 separados una distancia de 3.5λ y obtener la velocidad de oscilación v_2 en funcìon de v_1 para cualquier instante de tiempo t.

Problema 4 La onda del problema anterior es una onda de sonido que se propaga en el aire con densidad ρ_{Air} =1,29 kg/m^3 (**a**) Calcular su densidad de energia y su intensidad. (**b**) Calcular la potencia P_1 que atraviesa una superficie S_1 =0,2 m^2 perpendicular a su dirección de propagación. (**c**) Calcular la potencia P_2 que atraviesa una superficie S_2 =0,4 m^2 que forma un ángulo de 30° con la dirección de propagación. (**d**) ¿Cuál es la presión máxima de la onda sonora y su nivel de intensidad sonora en dB? (**e**) Si el timpano humano tiene un área de aproximadamente $A_T = 70\,\text{mm}^2$, calcular la fuerza máxima que experimenta. ¿Al peso de que masa corresponde?

Problema 1



Problema 2

P1

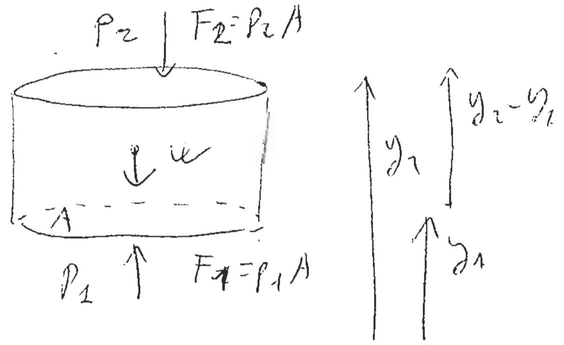
a) Ley fundamental de la hidrostática.

$$\boxed{P_1 - P_2 = -\rho g (y_1 - y_2)}$$ Si ρ es cte

o $\boxed{dp = -\rho g\, dy}$ Si ρ es variable.

Enunciado: El incremento de presión entre dos puntos de un fluido en equilibrio estático es igual al producto de la densidad del fluido por la aceleración de la gravedad y por la disminución de la altura entre dichos puntos.

Demostración



El fluido en el cilindro está en equilibrio, luego la suma de fuerzas sobre el verticalmente es nula. Hay tres fuerzas, las dos en las caras horizontales debido a la presión:

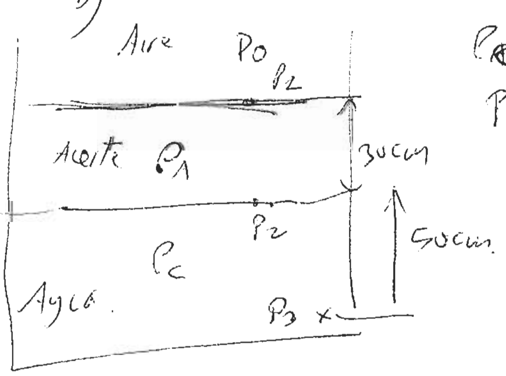
$F_1 = P_1 A$ y $F_2 = P_2 A$,

y el peso $W = \rho g V = \rho g A (y_2 - y_1)$.

Por lo tanto $F_1 - F_2 - W = 0 \Rightarrow P_1 A - P_2 A - \rho g A (y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow$

$P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1) \Rightarrow \boxed{P_1 - P_2 = -\rho g (y_1 - y_2)}$ Como queríamos demostrar.

b)



$\rho_{A} = 0{,}9\, g/cm^3 = 0{,}9 \times 10^3\, kg/m^3$; $\rho_A = 1{,}0\, g/cm^3 = 1{,}0 \times 10^3\, kg/m^3$

$P_0 = 1\, atm = 10^5\, Pa$

Para cada fluido la densidad es cte, luego la fórmula $P_1 - P_2 = -\rho g (y_1 - y_2)$ es válida.

$P_3 - P_2 = -\rho_A g (y_3 - y_2)$

$P_2 - P_1 = -\rho_{A} g (y_2 - y_1)$; $P_1 = P_0$

Sumando $P_3 - P_1 = -\rho_c g (y_3 - y_2) - \rho_A g (y_2 - y_1) \Rightarrow$

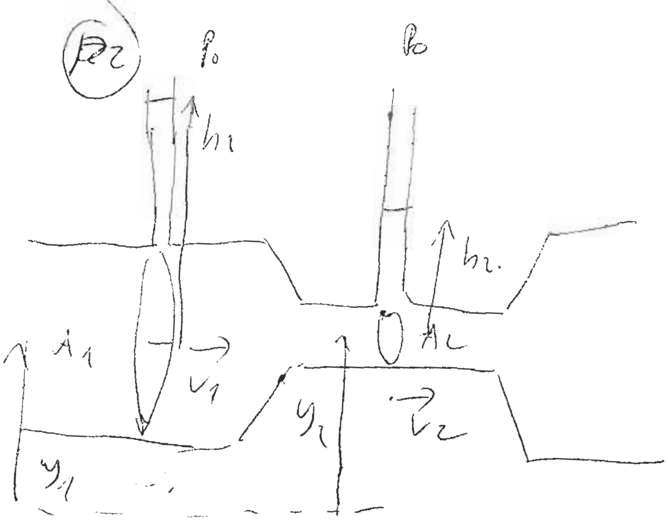
$P_3 = P_0 + \rho_A g (y_2 - y_3) + \rho_{A} g (y_1 - y_2) \Rightarrow$

La presión manométrica en P_3: $P_{3m} = P_3 - P_0 = \rho_A g (y_2 - y_3) + \rho_{A} g (y_1 - y_2) \Rightarrow$

$P_3 = 1{,}0 \times 10^3\, kg/m^3\ 10\, m/s^2 \times 0{,}5\, m + 0{,}9 \times 10^3\, \frac{kg}{m^3}\ 10\, \frac{m}{s^2}\ 0{,}3\, m \Rightarrow \boxed{P_{3m} = 7{,}7 \times 10^3\, Pa}$

La presión absoluta en P_3: $P_3 = P_0 + P_{3m} = 10^5\, Pa + 7{,}7 \times 10^3\, Pa \Rightarrow \boxed{P_3 = 107700\, Pa}$

P2



a) El caudal en la tubería es cte; es decir igual al que atraviesa A_1 y A_2 ⇒

$$I = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (1)$$

(Ecuación de continuidad)

Las tuberías son delgadas y suponemos que v y p no varían apreciablemente en cada sección.

Las presiones y velocidades están relacionadas por la ecuación de Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (2)$$

Las alturas son iguales $y_1 = y_2$ pues la tubería es horizontal, luego

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (3)$$

Además, perpendicularmente al movimiento se cumple la ec. de estática de fluidos, luego $P_1 = P_0 + \rho g h_1$; $P_2 = P_0 + \rho g h_2$ (4)

Despejando v_2 en (1), $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$ y sustituyendo v_2, P_1 y P_2 en (3):

$$\cancel{P_0} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_1^2 = \cancel{P_0} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2} \Rightarrow$$

$g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2$. Despejando y operando $\boxed{v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2g(h_1-h_2)}{A_1^2 - A_2^2}}}$ Sust. en (1)

$$I = v_1 A_1 \Rightarrow \boxed{I = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2g(h_1-h_2)}{A_1^2 - A_2^2}}}$$

b) $A_1 = 2{,}5\times10^{-5}\ m^2$; $A_2 = 1\times10^{-5}\ m^2$; $g = 10\ m/s^2$ $h_1 - h_2 = 0{,}09\ m$, luego

$$v_1 = 1\times10^{-5} m^2 \sqrt{\frac{2\times10\ m/s^2 \times 0{,}09\ m}{(2{,}5^2 - 1^2)\times(10^{-5} m^2)^2}} \Rightarrow v_1 = 0{,}586\ m/s \Rightarrow \boxed{v_1 = 58{,}6\ cm/s}$$

$$I = v_1 A_1 = 0{,}586\ m/s \times 2{,}5\times10^{-5}\ m^2 = 1{,}465\times10^{-5}\ \frac{m^3}{s}\left(\frac{60\ s}{1\ min}\right)\left(\frac{10^3\ l}{1\ m^3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{I = 8{,}79\ l/min}$$

c) De (4) $P_1 - P_2 = \rho g (h_1 - h_2)$

Si se trata de agua $\rho_A = 1\times10^3\ kg/m^3 \Rightarrow P_1 - P_2 = 1\times10^3\ \frac{kg}{m^3}\ 10\frac{m}{s^2}\ 0{,}09\ m \Rightarrow$

$$\boxed{P_1 - P_2 = 900\ Pa} \ (agua)$$

Si se trata de mercurio $\rho_{Hg} = 13{,}6\times10^3\ kg/m^3 \Rightarrow P_1 - P_2 = 13{,}6\times10^3\ \frac{kg}{m^3}\ 10\frac{m}{s^2}\ 0{,}09\ m \Rightarrow$

$$\boxed{P_1 - P_2 = 12240\ Pa\ (mercurio)}$$

(3) $y = A\cos(kx + \omega t + \phi_0)$; $A = 0{,}01\,mm = 10^{-5}\,m$; $\omega = 2\pi \times 10^3\,rad/s$ $c = 350\,m/s$

$\phi_0 = \pi$ rad.

a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi \times 10^3\,rad/s} \rightarrow \boxed{T = 10^{-3}\,s}$; $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10^3\,s^{-1} \Rightarrow \boxed{f = 10^3\,Hz}$

$\lambda = cT = 350\,m/s \times 10^{-3}\,s \Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}35\,m}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}35\,m} \Rightarrow \boxed{k = 5{,}88\pi\,rad/m}$

El sentido de propagación de un frente de onda o un punto de fase constante, $\varphi = kx + \omega t + \phi_0$, derivando $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow k\frac{dx}{dt} + \omega = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{\omega}$ negativo, luego, $\boxed{\text{se propaga en el sentido negativo del eje } x}$

b) La ec. de ondas es $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ (1), calculamos las derivadas

$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_0)$; $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx + \omega t + \phi_0) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$ (3)

$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_0)$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx + \omega t + \phi_0) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y$ (2)

Despejando y en (3) $y = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ y sustituyendo en (2)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2\left(-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Comparando con (1) vemos que cumple la ec. de ondas siendo $\frac{1}{c^2} = \frac{k^2}{\omega^2}$ o bien $c = \omega/k$

c) $V_{osc\,MAX} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_0)$, el valor máximo se obtiene cuando el seno vale -1, luego

$V_{osc\,MAX} = \omega A = 2\pi \times 10^3\,\frac{rad}{s} \times 10^{-5}\,m \Rightarrow \boxed{V_{osc\,MAX} = 0{,}0628\,m/s}$

$a_{osc\,MAX} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx + \omega t + \phi_0)$, el valor máximo se obtiene cuando el coseno vale -1, luego.

$a_{osc\,MAX} = \omega^2 A = \left(2\pi \times 10^3\,\frac{rad}{s}\right)^2 \times 10^{-5}\,m \Rightarrow \boxed{a_{osc\,MAX} = 394{,}8\,m/s^2}$

d) $x = \frac{\lambda}{2}$, $t = T/4 \Rightarrow \phi = kx + \omega t + \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} + \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} + \pi = \pi + \frac{\pi}{2} + \pi = 2\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\boxed{\phi = 2\pi + \pi/2 \sim \pi/2}$ $\Rightarrow V_{osc}(\varphi = \frac{\pi}{2}) = -\omega A\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = -\omega A = -V_{osc\,MAX} \Rightarrow \boxed{V_{osc}(\frac{\pi}{2}) = 0{,}0628\,m/s}$

$a_{osc}(\varphi = \pi/2) = -\omega^2 A\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \boxed{a_{osc}(\varphi = \pi/2) = 0}$

e) $\phi(x_1) = kx_1 + \omega t + \phi_0$; $\varphi(x_2) = kx_2 + \omega t + \phi_0 \rightarrow \phi(x_1) - \varphi(x_2)\ k(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow \phi(x_1) - \varphi(x_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \times 3{,}5\lambda = 7\pi = 6\pi + \pi \Rightarrow \boxed{\phi(x_1) - \varphi(x_2) = 6\pi + \pi \sim \pi}$

$V_1 = -\omega A\operatorname{sen}(\varphi(x_1)) = -\omega A\operatorname{sen}(\varphi(x_2) + 6\pi + \pi) = -\omega A\operatorname{sen}(\varphi(x_2) + \pi) =$
$= -\omega A[\operatorname{sen}\phi(x_2)\cos\pi + \cos\varphi(x_2)\operatorname{sen}\pi] = -\omega A\operatorname{sen}(\varphi(x_2))(-1) = -V_2 \Rightarrow \boxed{V_1 = -V_2}$

P5 $\rho_{air} = 1{,}29\ kg/m^3$

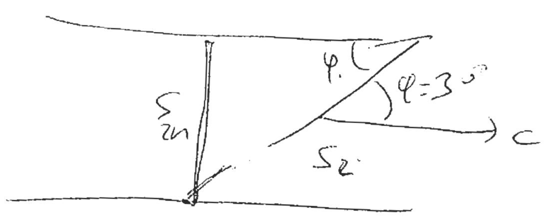
a) La densidad de energía es $\rho_u = \frac{1}{2}\rho_{AIR}\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,1{,}29\,\frac{kg}{m^3}\left(2\pi\times10^3\,\frac{rad}{s}\right)^2\left(10^{-5}\,m\right)^2.$

$\Rightarrow \boxed{\rho_u = 2{,}55\times10^{-3}\ J/m^3}$

$I = \rho_u c = 2{,}55\times10^{-3}\ J/m^3 \times 340\ \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{I = 0{,}866\ W/m^2}$

b) $P_1 = I S_1 = 0{,}866\ \frac{W}{m^2} \times 0{,}2\,m^2 \Rightarrow \boxed{P_1 = 0{,}173\ W}$

c) La potencia es la intensidad multiplicada por la superficie perpendicular que atraviesa S_{2n}, según la figura



$S_{2n} = S_2 \operatorname{sen}(30°) \rightarrow$

$P_2 = I S_{2n} = I S_2 \operatorname{sen}(30°) = I S_2 \frac{1}{2} \rightarrow$

$P_2 = I S_1 = I S_1 \Rightarrow \boxed{P_2 = 0{,}173\ W}$

d) La presión máxima en onda armónica resulta en: $P_0 = \omega \rho_{AIR}\, c\, A$

sustituyendo $P_0 = 2\pi\times10^3\,\frac{rad}{s}\ 1{,}29\,\frac{kg}{m^3}\ 340\,\frac{m}{s}\ 10^{-5}\,m \Rightarrow \boxed{P_0 = 27{,}6\ Pa}$

El nivel de intensidad es $\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\left(\frac{0{,}866\ W/m^2}{10^{-12}\ W/m^2}\right) \Rightarrow \boxed{\beta = 119\ dB}$

e) Como $F = PS$, la fuerza máxima sobre el área del tímpano

$F_{MAX} = P_{MAX} A_T = P_0 A_T = 27{,}6\ Pa\ 70\ mm^2\left(\frac{1\,m}{10^3\,mm}\right)^2 \rightarrow$

$\boxed{F_{MAX} = 1{,}93\times10^{-3}\ N}$ Equivale al peso de una masa m

tal que $F_{MAX} = mg \rightarrow m = \frac{F_{MAX}}{g} = \frac{1{,}93\times10^{-3}\,N}{10\,m/s^2} \rightarrow$

$m = 0{,}193\times10^{-3}\,kg \rightarrow \boxed{m = 0{,}193\ g}$