PRIMER PARCIAL DEL CURSO 2019/20 (21/11/2019)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 1

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$. 4) Usar $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ para obtener resultados numéricos. En resultados simbólicos, dejar g también en forma simbólica. 5) Dar los números en formato decimal o ciéntifico si son muy grandes o pequeños, no como fracciones o combinaciones de raices. 6) Usar un número apropiado de cifras significativas.

1. Si un partícula experimenta una aceleración $\vec{a} = 2t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ con t en segundos y a en m/s^2, obtener la velocidad $\vec{v}(t)$ y la posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ está en reposo y su posición inicial es $\vec{r}_0 = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ m.

2. Una vagoneta en una montaña rusa de un parque de atraciones realiza un rizo vertical de radio R. En el punto más alto (punto A) del rizo tiene una velocidad de módulo v_A y la vagoneta está invertida. En ese punto los pasajeros experimentan la sensación de tener la mitad de su peso. (a) Calcular la velocidad de la vagoneta en su punto más alto. (b) Calcular la velocidad de la vagoneta v_B en el punto más bajo del rizo (punto B). Dar los resultados en función de g y R.

3. Una partícula de masa m en el campo gravitatorio de la superficie de la tierra, tiene una velocidad $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\,\text{m/s}$. (a) Calcular las componentes tangencial a_t y normal a_n de su aceleración . A partir de dichos valores, (b) explicar si el módulo de $\vec{v}$ aumenta o disminuye? (b) Su radio de curvatura y la posición $\vec{r}_c$ del centro de curvatura instantáneo respecto a la partícula.

4. A partir del reposo, un esquiador de masa m desciende por una pendiente nevada que forma un ángulo $\theta = 30^{\circ}$ con la horizontal. (a) Si se desprecia el rozamiento, obtener el vector $\vec{v}$ cuando ha descendido una altura h. (b) Si el coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu_d = 0.1$, calcular la energía perdida por rozamiento y el módulo de la velocidad cuando ha descendido una altura h. Dar los resutados en functión de g y h.

5. Demostrar el teorema de conservación de la energía mecánica en un campo de fuerzas conservativo.

Primer parcial. Física 1. Grupo 1. 2019

(1) $\vec{a} = 2t\vec{i} + 3\vec{j}$ (m/s^2) con t en s.

(a) obtener $v(t)$ si en $t=0$ está en reposo

(b) $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ m en $t=0$.

(a)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t=0}^{t} \vec{a}\,dt \Rightarrow \vec{v} - \cancel{\vec{v}_0}^{\,0} = \int_0^t (2t\vec{i} + 3\vec{j})\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \left[\frac{2t^2}{2}\vec{i} + 3t\vec{j}\right]_{t=0}^{t} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = t^2\vec{i} + 3t\vec{j}}\ (m/s) \text{ con t en s.}$$

(b)

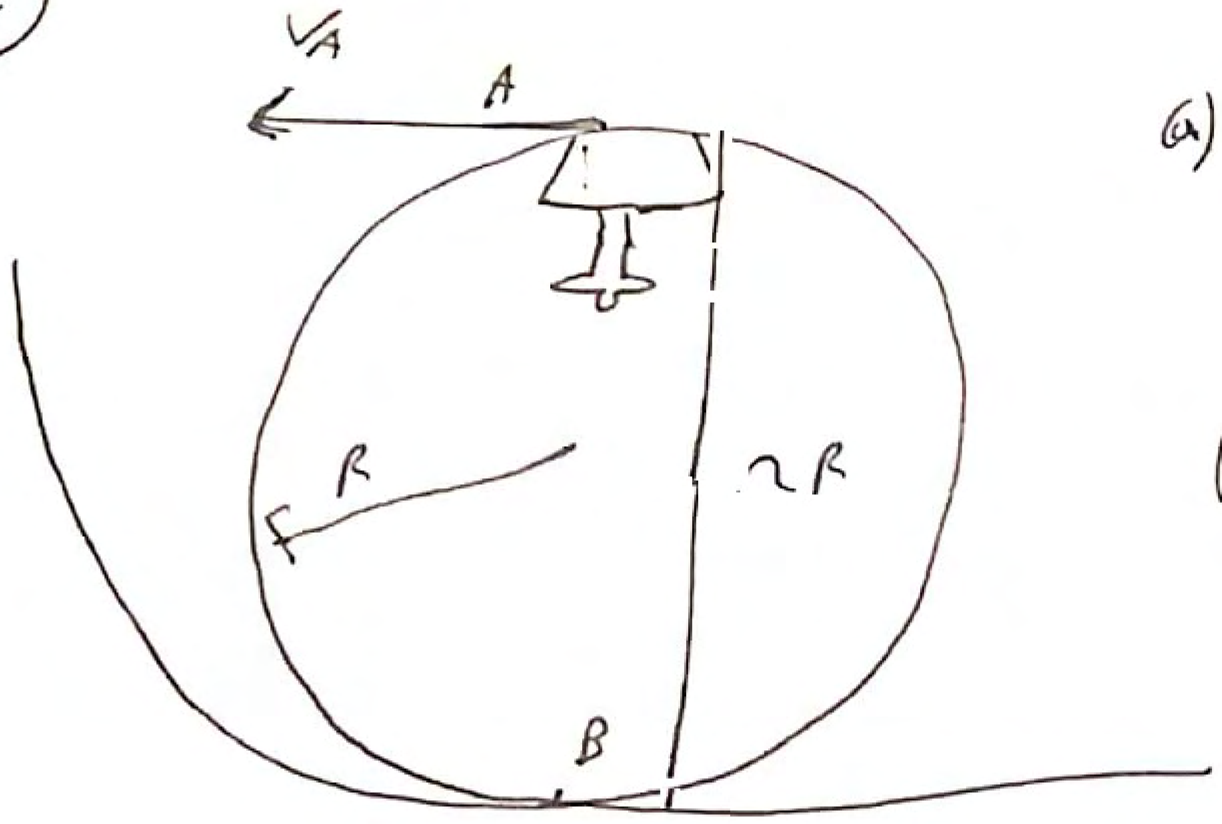
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\,dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t [t^2\vec{i} + 3t\vec{j}]\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \left[\frac{t^3}{3}\vec{i} + \frac{3t^2}{2}\vec{j}\right]_0^t \Rightarrow \vec{r} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \left(2 + \frac{t^3}{3}\right)\vec{i} + \left(4 + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}}\ \text{m} \quad (\text{t en s})$$

FI P161-2019

2

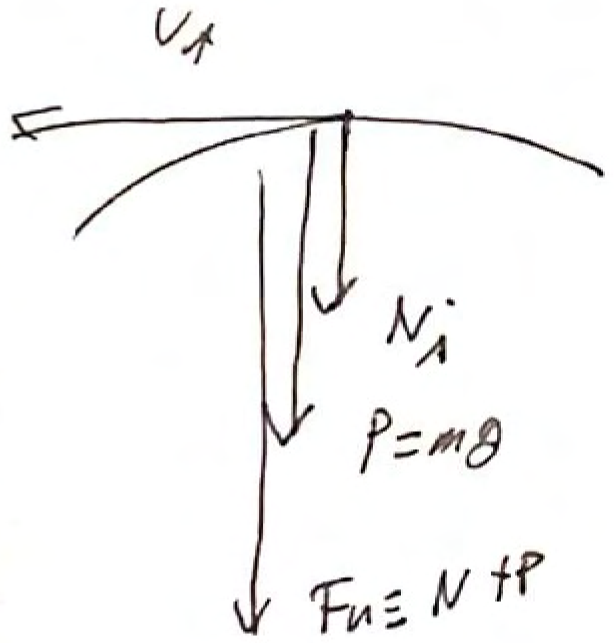


(a) En A, los pasajeros sienten que tienen la mitad de su peso. Calcular v_A.

(b) ¿v_B?

(a) El peso aparente es el que mediría una báscula colocada bajo los pies de la persona en la vagoneta. Es decir la fuerza que ejerce la vagoneta sobre esa persona.

Diagrama de fuerzas:



En A, la velocidad es horizontal, luego tanto N_A como P son perpendiculares a $\vec{v}_A$ y son por lo tanto la fuerza normal. Como realiza un círculo, su radio de curvatura es R, el radio del círculo.

$$F_n = N_A + P = m\frac{v_A^2}{R} \quad ; \quad N_A = 0.5\,mg, \; P = mg$$

$$\Rightarrow 1.5\,mg = m\frac{v_A^2}{R} \rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{1.5\,gR}}$$

(b) De A a B, actúa la fuerza gravitatoria que es conservativa con energía potencial $U = mgh$ y la fuerza normal que no realiza trabajo, pues por definición es perpendicular a la velocidad ($dW = \vec{N}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\vec{N}\cdot\vec{v}}_{0}\,dt = 0$). Se conserva la energía mecánica $E = U + E_c$. Luego:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg\,2R \quad ; \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\cancel{h_B}^{0}$$ (tomando el suelo como h=0)

$$\Rightarrow E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 + \cancel{m}g\,2R = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 \Rightarrow v_A^2 + 4Rg = v_B^2 \Rightarrow$$

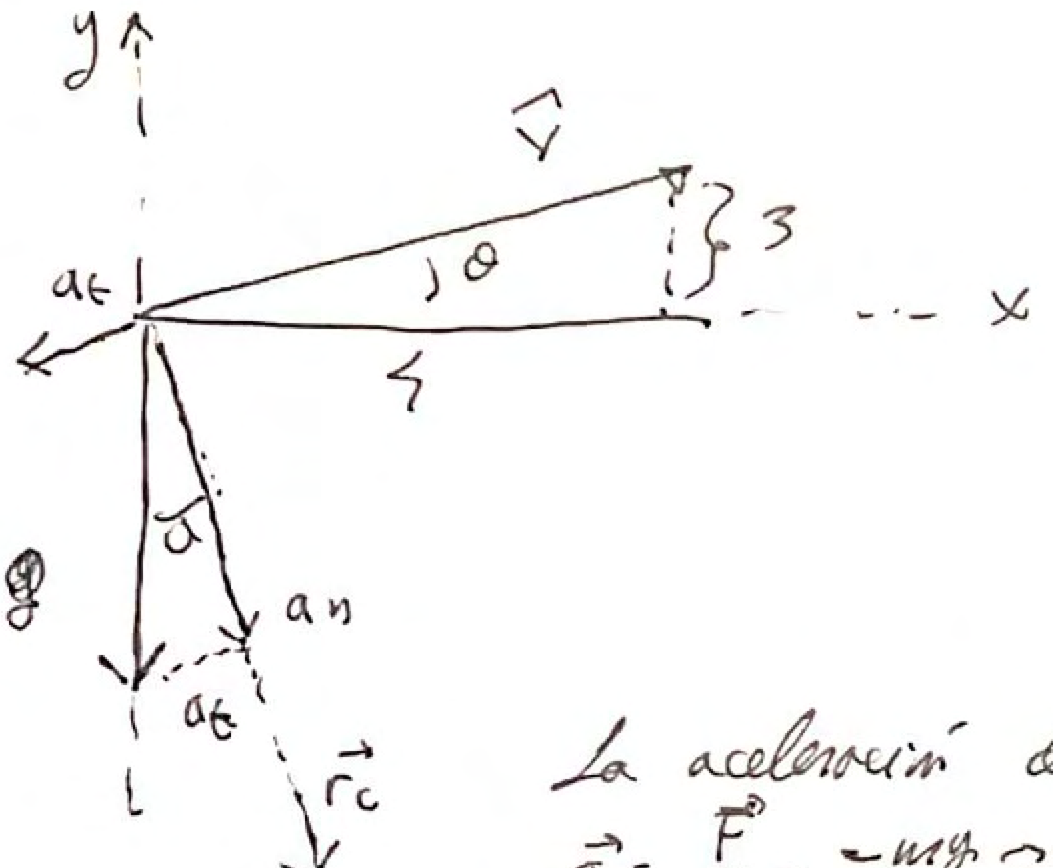
$$v_B^2 = 1.5\,gR + 4\,gR \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{5.5\,gR}}$$

F1P1G1 - 2019

(3) m, $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ m/s en el campo gravitatorio en la superficie, es decir $\vec{F} = -mg\vec{j}$

(a) Obtener a_t y a_n. (b) ¿$|\vec{v}|$ aumenta o disminuye?
(c) R (radio de curvatura) y $\vec{r}_c$ posición relativa a la partícula.

(a)



En el dibujo, hemos exagerado la diferencia entre v_x y v_y para identificar mejor los ángulos

$tg\,\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36.9°$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \Rightarrow$

$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

La aceleración de la partícula en ese instante es $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-mg}{m}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{j}$. Sus componentes a_n y a_t son las proyecciones sobre las direcciones perpendicular y tangente a la velocidad. Según el dibujo

$a_n = g\cos\theta = 9.8\,\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{a_n = 7.84\ m/s^2}$

$a_t = -g\,\text{sen}\,\theta = -9.8\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{a_t = -5.89\ m/s^2}$

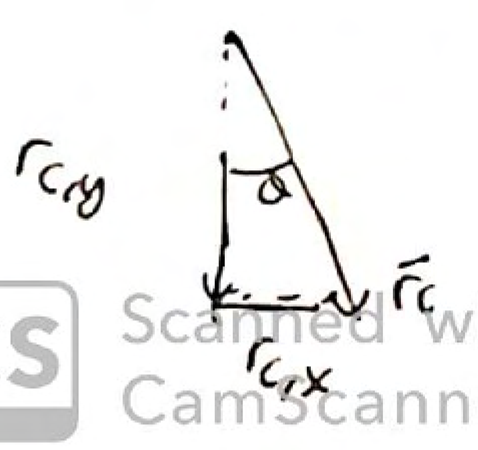
El signo menos de a_t se debe a que la componente a_t tiene el sentido contrario a $\vec{v}$. ($a_t = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = -g\vec{j}\,\frac{(4\vec{i}+3\vec{j})}{5} = -g\frac{3}{5}$)

(b) Como $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} < 0 \Rightarrow |\vec{v}|$ está disminuyendo. (a_t se opone a $\vec{v}$)

(c) $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5^2}{\frac{4}{5}g} = \frac{5^3}{4g} \Rightarrow \boxed{R = 3.2\,m}$

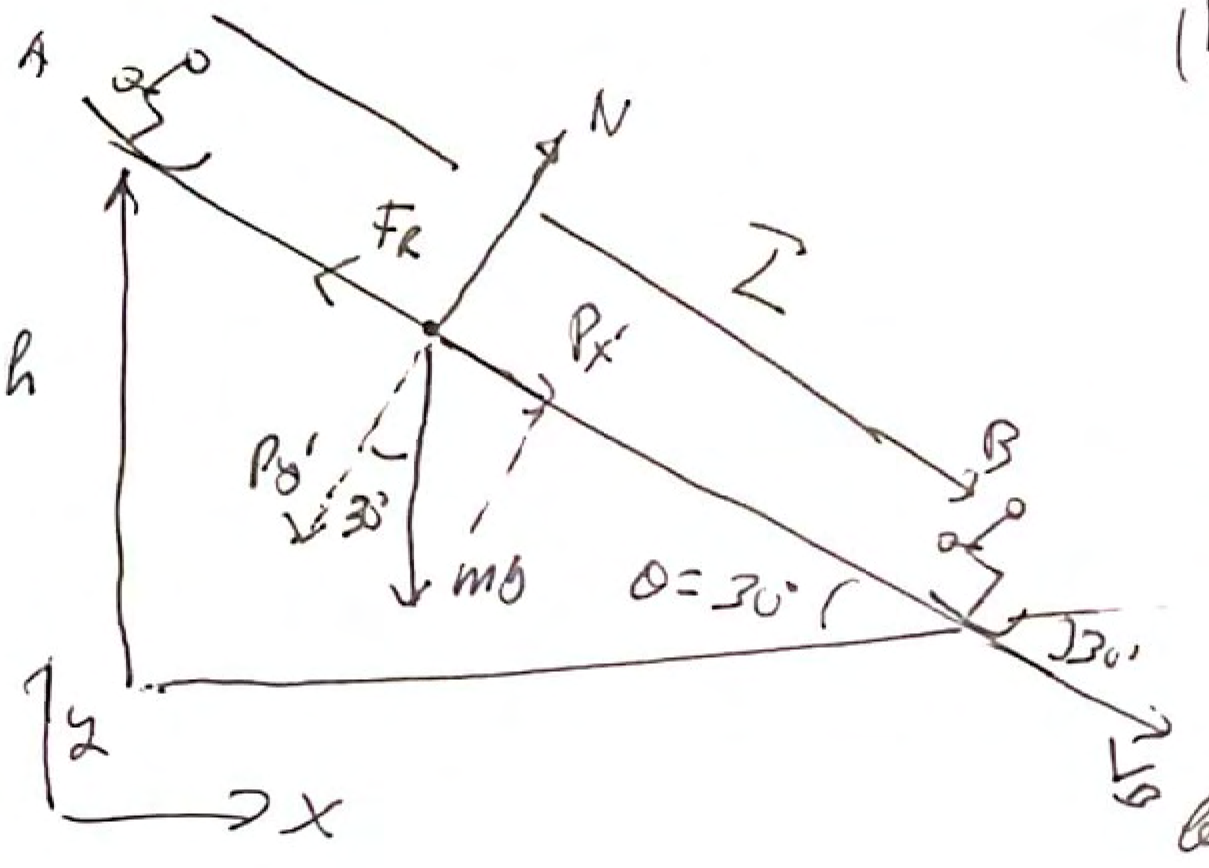
$\vec{r}_c$ está en la dirección de la normal a $\vec{a}_n$, con módulo R, luego

$\vec{r}_c = R(\text{sen}\,\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}) = 3.2\left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_c = 1.92\vec{i} - 2.56\vec{j}\ m}$



F1P161-2019

(3)



(a) Sin rozamiento $\vec{v}$ cuando ha descendido una altura h.

(b) Si $\mu_d = 0.1$, obtener φ, energía perdida por rozamiento y (v) tras descender h.

(a) Sobre el esquiador actúa la fuerza gravitatoria $\vec{F} = -mg\vec{\jmath}$ que es conservativa con energía potencial $U = mgh$ $(h = y)$ y la fuerza normal que no realiza trabajo $(dW = \vec{N} \cdot d\vec{r} = \vec{N} \cdot \vec{N}' d)$, pues $\vec{N} \perp d\vec{\ell}$.

Entonces se conserva la energía mecánica. $E = U + E_c \Rightarrow$

$E_{C,A} = \frac{1}{2} m \cancel{v_A^2}^{\,0} + mgh$; $E_{C,B} = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg\cancel{h'}$
(reposo)
Tomamos $h = 0$ en el punto final.

$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$, como forma un ángulo de 30° por debajo de la horizontal $\boxed{\vec{v}_B = \sqrt{2gh}\,(\cos 30° \vec{\imath} - \sin 30° \vec{\jmath})}$

Como no tenemos valor numérico para h, no vale la pena sustituir.

(b) Si tomamos ahora los ejes x' e y', en la dirección del movimiento y perpendicular. $\sum F_{i,y'} = m a_{y'} = 0 \Rightarrow N - P_{y'} = 0 \Rightarrow \underline{N = mg\cos 30°}$

$\sum F_{i,x'} = m a_{x'} \Rightarrow P_{x'} - F_R = m a_{x'} = ma \Rightarrow \underline{mg\sin 30° - F_R = ma}$.

Ahora $\vec{F}_R$ realiza un trabajo negativo, pues se opone al desplazamiento. El trabajo perdido es. $\varphi = \left|\int \vec{F}_R \cdot d\vec{r}\right| = |\vec{F}_R \cdot \vec{L}| = |-F_R L| = F_R L$ con $F_R = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$ y $h = L\sin\theta \Rightarrow L = \frac{h}{\sin\theta} \Rightarrow \varphi = \mu_d mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta} \Rightarrow$

$\boxed{\varphi = \mu_d mg \frac{h}{tg\theta}}$. Ahora el balance de energía es $E_A = E_B + \varphi \Rightarrow$

$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + \mu_d mg \frac{h}{tg\theta} \Rightarrow 2gh(1 - \mu_d \cot(\theta)) = v_B^2$

$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh(1 - \mu_d \cot(30°))}}$, sustituyendo $\boxed{v_B = 1.29\sqrt{h}}$.

FIP161-2019

(5) Demostrar el teorema de conservación de la energía mecánica en un campo de fuerzas conservativo

Un campo de fuerzas conservativo es aquel en que el trabajo realizado por las fuerzas del campo no depende del camino, sino solamente del punto inicial y final.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad \text{no depende del camino.}$$

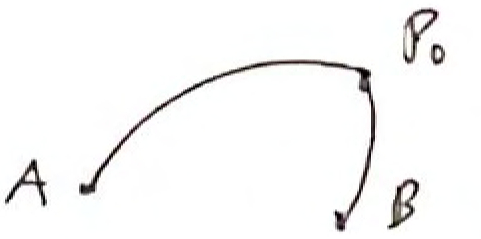
Esta propiedad permite definir la energía potencial como

(1) $U(P) = \underbrace{U(P_0)}_{=U_0} - \int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{l}$, para fijado $U(P_0)=U_0$, sólo depende de P.

$$U(A)-U(B) = \left[U_0 - \int_{P_0}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{l}\right] - \left[U_0 - \int_{P_0}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l}\right] = -\int_{P_0}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{P_0}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_{A}^{P_0} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{P_0}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l}.$$

Esta integral inicialmente se hace en un camino que pasa por P_0, pero como no depende del camino, P_0 es irrelevante.



Luego, existe una función de punto U definida en (1) tal que

$$\boxed{U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}}$$

Por otra parte el teorema del trabajo dice que si $\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula, $W_{AB} = E_{cB} - E_{cA}$ (2)

Esto es fácil de demostrar

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\, d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_A^B m\vec{v}\, d\vec{v} = \int_A^B m(v_x dv_x + \dots) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right]_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Entonces, si $\vec{F}$ es conservativa, se cumple (1) y (2) y por lo tanto:

$$W_{AB} = U_A - U_B = E_{cB} - E_{cA} \Rightarrow \boxed{U_A + E_{c,A} = U_B + E_{cB}}$$

Se define la energía mecánica E como $E = U + E_c$, entonces $\boxed{E_A = E_B}$

Es decir, la energía mecánica se conserva en un campo de fuerzas conservativo.