PRIMER PARCIAL DEL CURSO 2019/20 (21/11/2019)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 2

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$.

1. La posición de una partícula viene dada por $x(t) = 5 + 4\,t^2 - (4/3)\,t^3$, donde x está en metros y t en segundos. (**a**) Calcular la velocidad v(t) y la aceleración a(t). (**b**) Calcular la velocidad media v_m y la aceleración media a_m entre $t_0 = 0$ s y $t_1 = 1$ s. (**c**) Calcular los tiempos: t_{a0} en que la aceleración se anula; $t_{\text{v0}} > 0$ en que la velocidad se hace cero y t_{fin} en que la partícula vuelve al punto inicial ($t = 0$). (**d**) Calcular el valor máximo x_{max} que alcanza $x(t)$ así como la velocidad $v_{\text{m,f}}$ y celeridad ($c = |v|$) media $c_{\text{m,f}}$ entre $t = 0$ hasta que vuelve a la posición inicial en t_{fin}.

2. Un ascensor sube con aceleración de $a = 2\,\text{m/s}^2$ hacia arriba. (a) Obtener el peso aparente en el ascensor de una persona de masa $m = 80\,\text{kg}$. (b) Igualmente cuando baja con la misma aceleración hacia abajo. (c) Calcular su peso aparente si se corta el cable y el ascensor cae en el vacío. Nota: imaginar una balanza bajo los pies de la persona.

3. Considere un columpio asimilado a una masa puntual m que cuelga de una cuerda inextensible y sin peso de longitud L. Llamamos θ al ángulo que forma la cuerda con la vertical. (a) Si se suelta desde el reposo con un ángulo θ_0, obtener la velocidad v de m en función de θ. (b) Obtener la aceleración tangencial en función del ángulo θ. (c) Obtener la aceleración angular en función de θ. (d) Si θ es pequeño, demostrar que cumple la ecuación de un movimiento armónico simple.

4. Un esquiador de fondo toma impulso alcanzando una velocidad v_A mientra sube por una pendiente larga nevada que forma un ángulo $\theta = 30$º con la horizontal. A partir de ese momento deja de usar los bastones y se deja deslizar hacia arriba hasta pararse. (a) Si se desprecia el rozamiento, obtener la longitud L que recorre hacia arriba sobre la superficie de la nieve. (b) Si el coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu_d = 0.1$, calcular la energía que se pierde por rozamiento en función de la distancia que recorre L' y el valor de dicha distancia L' en función de los parámetros del problema.

5. Demostrar que un campo de fuerzas uniforme $\vec{F}$ es conservativo y obtener el valor de su energía potencial. Aplicar al campo gravitatorio sobre la superficie terrestre que actúa sobre una masa m.

Primer parcial. Física 1. grupo 2. Curso 2019/20

(1) $x(t) = 5 + 4t^2 - \frac{4}{3}t^3$ (x en m, t en s.)

(a) ¿$v(t)$? $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 8t - 4t^2 \Rightarrow \boxed{v(t) = 8t - 4t^2}$ v en m/s, t en s.

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{a(t) = 8 - 8t}$ · a m/s², t en s

(b) entre $t_0 = 0$ y $t_1 = 1s$, calcular: v_m y a_m.

Velocidad media: $v_m = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{[5 + 4 \cdot 1^2 - \frac{4}{3}1^3] - [5]}{1 - 0} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \boxed{v_m = \frac{8}{3} = 2{,}67 \text{ m/s}}$

Aceleración media: $a_m = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{8 \times 1 - 4 \times 1^2 - 0}{1 - 0} = 4 \Rightarrow$

$\boxed{a_m = 4 \text{ m/s}^2}$

(c) ¿t_{a0} / $a = 0$ y $t_{v0} > 0$ / $v = 0$?

$a = 0 \Rightarrow 8 - 8t = 0 \Rightarrow 8(1 - t) = 0 \Rightarrow \boxed{t_{a0} = 1s}$

$v = 0 \Rightarrow 8t - 4t^2 = 0 \Rightarrow 4t(2 - t) = 0 \Rightarrow$ $t = 0$ No cumple $t > 0$; $\boxed{t = 2s}$ Sí cumple $t > 0$.

t_{fin} / $x(t_{fin}) = x(0) \Rightarrow \cancel{5} + 4t^2 - \frac{4}{3}t^3 = \cancel{5} \Rightarrow 4t^2(1 - \frac{1}{3}t) = 0$ $\Rightarrow t = 0$ inicial; $\Rightarrow t = 3s$ final $\Rightarrow \boxed{t_{fin} = 3s}$

(d) x_{max} de $x(t)$; ..

Físicamente, x será máximo cuando v cambie de positiva a negativa (de adelante hacia atrás) y por lo tanto $v = 0$.

Matemáticamente, cuando x tenga un extremo, es decir, $\frac{dx}{dt} = 0$, tendremos un máximo o mínimo. Además $\frac{d^2x}{dt^2} < 0 \Rightarrow a < 0$.

Entonces, $v = 0$ en $t = 0$ y $t = 2s$ (c).

En $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = 5 \\ a(0) = 8 > 0 \end{cases}$ y en $t = 2$: $x(2) = 5 + 4 \times 2^2 - \frac{4}{3}2^3 = 10.3$; $a(2) = 8 - 8 \times 2 = -8 \text{ m/s}^2 < 0$.

Luego $\boxed{x_{max} = 10.3 \text{ m}}$

v_m entre $t = 0$ y $t_{fin} \Rightarrow v_m = \frac{x(t_{fin}) - x(0)}{t_{fin} - t_0} = \frac{0}{3 - 0} = 0 \Rightarrow \boxed{v_m = 0}$

Celeridad media $\cdot\ c_m = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt$ $(t_2 > t_1)$, entonces

$|v|dt = |dx|$ el espacio recorrido en valor absoluto, es decir, sin tener en cuenta en qué sentido se mueve la partícula.

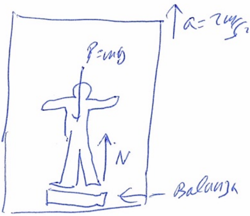
Como v se hace cero en $t=2$ (y $t=0$), v es positiva desde $t=0$ hasta $t=2$ y negativa desde $t=2$ hasta $t=3$. En cada uno de estos tramos recorre la distancia $|x(t_{fin})-x(2)| = |x(2)-x(0)|$. Luego:

$$c_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_{fin}} |dx| = \frac{\int_0^2 |dx| + \int_2^3 |dx|}{\Delta t} = \frac{|x(2)-x(0)| + |x(t_{fin})-x(2)|}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad c_m = \frac{2|x(2)-x(0)|}{\Delta t} = \frac{2(10.3-5)}{3} = \frac{2\times 5.3}{3} \Rightarrow \boxed{c_m = 3.53\ m/s}$$

P1F162-249/10

2 (a) acelera hacia arriba $a = 2 m/s^2$ ¿Peso aparente?



El peso aparente es lo que marca la balanza. Esto es la fuerza que hace la persona sobre la balanza, igual a la que hace la balanza sobre la persona (en sentido contrario).

Es decir $P_a = N$

Por la segunda ley de Newton $F = ma$.

$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow N - mg = ma \Rightarrow$$

$$P_a = N = m(g+a) = 80 kg (9.8+2) m/s^2 \Rightarrow 944 N = 944 N \left(\frac{1 kg^*}{9.8 N}\right)$$

$$\boxed{P_a = 944 N = 96.3 kg^*}$$

(b) Si la aceleración es hacia abajo, al empezar a bajar

$$\Sigma F_y = m a_y \qquad N - mg = ma' = -m\, 2 m/s^2 \Rightarrow$$

$$N = m(g - |a'|) = 80 kg (9.8 - 2) m/s^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_a = N = 624 N = 63.7 kg}$$

(d) Cuando el ascensor cae al vacío, su aceleración es $a_y = -g$, como es también la aceleración que tiene la persona que cae, $N = 0$

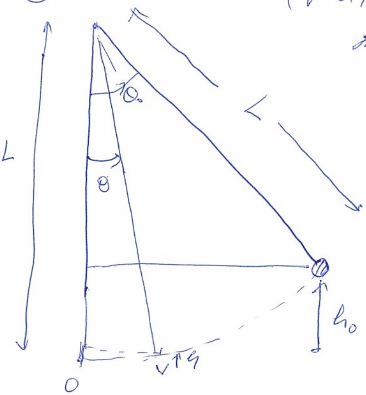
$\Rightarrow \boxed{P_a = 0}$

también se podría deducir según (b)

$$N = m(g - |a'|) = m(g - g) = 0 \text{ . El mismo resultado.}$$

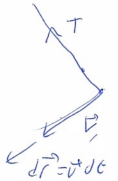
P1F162-2019/20

3



¿V en función de θ?

La partícula describe un arco de trayectoria circular, entonces el hilo L es igual al radio y la fuerza que hace $\vec{T}$ es perpendicular a $\vec{v}$. Como $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ es perpendicular a $\vec{T}$, $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Es decir $\vec{T}$ no realiza trabajo



Como $\vec{T}$ no realiza trabajo y el campo gravitatorio es conservativo, se conserva la energía mecánica $E = mgy + \frac{1}{2}mv^2$.

En θ_0, reposo: $E = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0$.

Tomando como referencia el punto O: $h_0 = L - L\cos\theta_0 \Rightarrow$

$E_0 = mgL(1-\cos\theta_0)$

Para otro punto cualquiera $U = mgh = mgL(1-\cos\theta)$

Por lo tanto

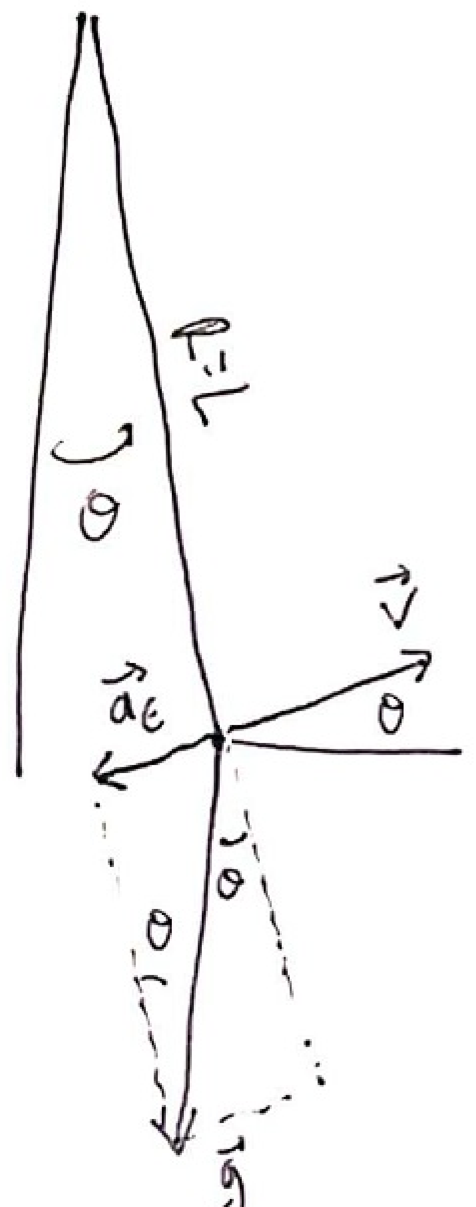
$E_0 = E_i \Rightarrow \cancel{m}gL(\cancel{1}-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gL(\cancel{1}-\cos\theta) \Rightarrow$

$gL(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow \boxed{v = \pm\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

PIF162 - 2019/20

(b) obtener a_t en función de θ

La aceleración es $\vec{g} = -g\vec{j}$



Consideramos como positivo el movimiento hacia la derecha, $\theta>0$, $\dot{\theta}>0$, $v=R\dot{\theta}>0$, tal como se ve en el dibujo. Entonces a_t es la proyección de $\vec{g}$ sobre $\vec{v}$ y como tiene sentido contrario, será negativa. Entonces

$$\boxed{a_t = -g\operatorname{sen}\theta}$$

(c) obtener $\alpha = \alpha(\theta)$

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta} \quad (2)$$

El signo es correcto, pues si $\theta>0$, $\alpha<0$, es decir la velocidad angular $\dot{\theta}$ disminuye (si $\dot{\theta}>0$)

(d) obtener la ecuación del M.A.S para θ pequeño

Como $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$, de (2) obtenemos

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$ y si θ es pequeño $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ y

$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$, Definiendo $\omega^2 = \frac{g}{L}$, que es posible pues $\frac{g}{L}>0$,

obtenemos (3) $\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$ con $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Es fácil comprobar que $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$ cumple la ecuación (3)

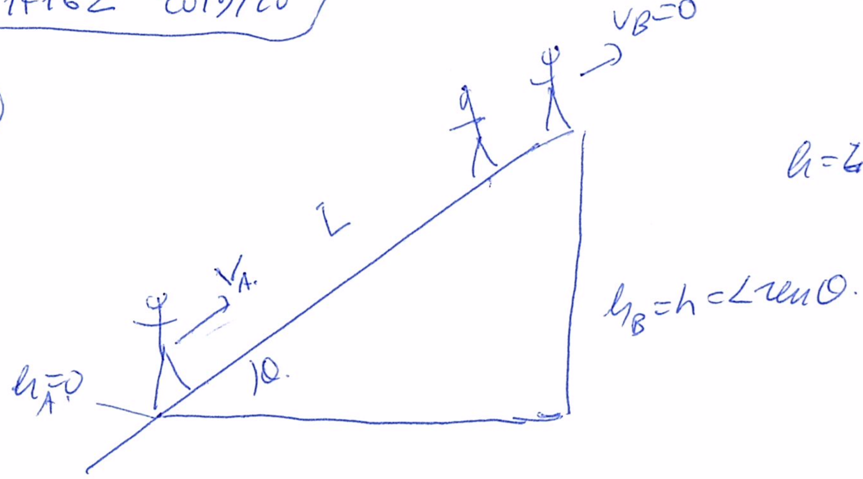
$\dot{\theta} = -\omega\theta_0\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2\theta \to \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, tal como se quería demostrar.

(b) Avanzado. Hay que tener en cuenta el sentido de la velocidad, pues si $\dot{\theta}>0$ (movimiento hacia la derecha) $a_t = -g\operatorname{sen}\theta$, pero si $\dot{\theta}<0$ (movimiento hacia la izquierda), $a_t = g\operatorname{sen}\theta$, ya que tiene el mismo sentido que v.

Esto se ve también vectorialmente. $a_t = (-g\vec{j})\cdot\vec{\tau}$ y $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$, como $\vec{v} = L\dot{\theta}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; $\vec{\tau} = \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $\boxed{a_t = -g\operatorname{sen}\theta\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} = -g\operatorname{sen}\theta\operatorname{signo}(\dot{\theta})}$

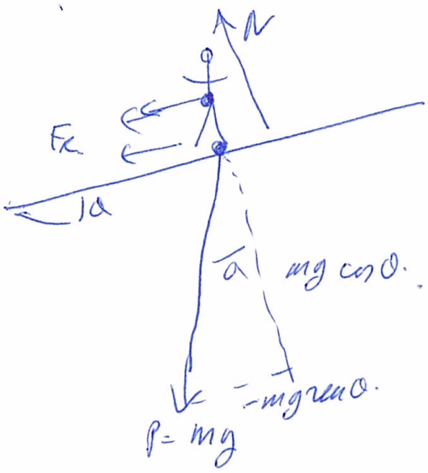
P1F1G2 2019/20

(5)



$h=L\,sen\theta$

Sobre el esquiador actúa su peso, la normal a la superficie y en su caso, la fuerza de rozamiento hacia atrás.



Si descomponemos las fuerzas en la dirección normal y paralela a la superficie.

Dirección normal $\sum F_i=0 \quad N-mg\cos\theta=0$

$\Rightarrow \boxed{N=mg\cos\theta}$

Dirección paralela (hacia la derecha)

$$-mg\,sen\theta-F_R=ma.$$

Además como está en movimiento $F_R=\mu_d N$

$-mg\,sen\theta-\mu_d N=ma \Rightarrow$

$-mg\,sen\theta-\mu_d\, mg\cos\theta=ma$

$$\boxed{a=-g(sen\theta+\mu_d\cos\theta).}$$

No obstante el problema, es más sencillo por energías.

(a) Si $\mu_d=0$, como $\vec{N}$ no realiza trabajo al ser $\perp$ al desplazamiento, se conserva la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}m\cancel{v_B^2}^{\,0}+mgh \Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2=gL\,sen\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{L=\frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g\,sen\theta}}$$ Como $a_x=g\,sen\theta$, está en la conocida fórmula $2La=v^2$.

(b) En ese caso parar F_R existe y recorre $L' \Rightarrow \phi=|W_R|=F_R L' \Rightarrow$

$\phi=\mu_d N L' \rightarrow \boxed{\phi=\mu_d\, mg\cos\theta L'}$

El balance de energía es $E_A=E_B+\phi \Rightarrow$

$\frac{1}{2}mv_A^2=mgh'+\phi \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2=mgL'sen\theta+\mu_d mg\cos\theta L' \Rightarrow$

$$\boxed{L'=\frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g(sen\theta+\mu_d\cos\theta)}}$$ Igualmente corresponde a la ecuación $2ax=v^2$.

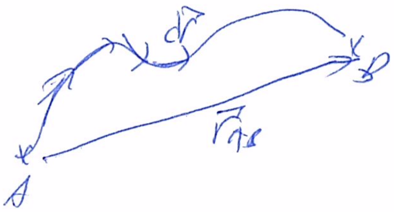
P1G2F1 2019/20

5) Demostrar que $\vec F$ es conservativa si es uniforme.

El trabajo realizado por $\vec F$ es:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec F\cdot d\vec r = \vec F\cdot\int_A^B d\vec r = \vec F\cdot \vec r_{AB}$$

pues $\vec r_{AB}$ es la suma vectorial de todos los $d\vec r$.



Como $\vec F\cdot\vec r_{AB}$ no depende del camino, vemos que $\vec F$ es conservativa.

Obtener U.

Como $\vec r_{AB}=\vec r_B-\vec r_A \Rightarrow W_{AB}=\vec F\cdot(\vec r_B-\vec r_A)=\vec F_B\cdot\vec r_B-\vec F\cdot\vec r_A$

Sabemos que en un campo de f. conservativas $W_{AB}=U_A-U_B$, por lo que comparando:

$$U_B=-\vec F_B\cdot\vec r_B \; ; \; U_A=-\vec F_A\cdot\vec r_A.$$

En general $\boxed{U=-\vec F\cdot\vec r + C_1}$. La cte C_1 no cambia el trabajo realizado y es arbitraria.

Aplicación a $\vec g$

Si $\vec F=-mg\vec k \Rightarrow \vec F\cdot\vec r=(0,0,-mg)\cdot(x,y,z)=-mgz \Rightarrow$

$\boxed{U=mgz+C_1}$ C_1 arbitraria, normalmente se hace $C_1=0$ cuando la altura de referencia, suelo, es $z=0$.