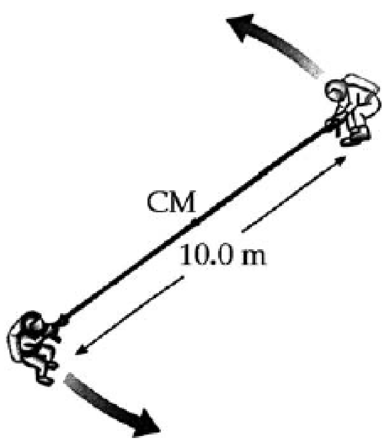
SEGUNDO PARCIAL DEL CURSO 2019/20 (19/12/2019)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 1

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3.12\,\text{m/s}^2}$. 4) Usar $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ para obtener resultados numéricos. En resultados simbólicos, dejar g también en forma simbólica. 5) Dar los números en formato decimal o ciéntifico si son muy grandes o pequeños, no como fracciones o combinaciones de raices. 6) Usar un número apropiado de cifras significativas. 7) Hacer dibujos grandes (media página o así) incluyendo todas las magnitudes relevantes.

1. (1 punto) Demostrar que el momento de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto P respecto a un punto O: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{OP} \times \vec{F}$ tiene como módulo el producto del módulo de la fuerza por la distancia de O a la linea de acción. Ilustrarlo claramente con un dibujo grande. Explicar la dirección y sentido que tiene dicho momento de fuerza $\vec{\tau}$ ¿Cuál es su significado físico?



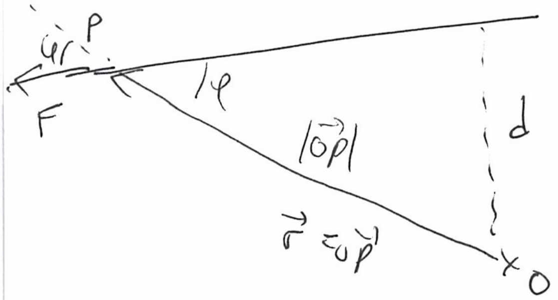
2. (3 puntos) Dos astronautoas (ver figura) con una masa cada uno de 75.0 kg están unidos por una cuerda de 10.0 m de longitud y masa despreciable. Los astronautas están aislados en el espacio y están orbitando a una velocidad de 5.00 m/s respecto de su centro de masas CM. Considerando los astronautas como partículas puntuales (**a**) calcular su momento de inercia respecto a CM y su velocidad angular ω (**b**) el módulo del momento angular del sistema formado por los dos astronautas de dos formas, como partículas individuales y como sólido rígido. (**c**) la energía rotacional del sistema tanto como partículas individuales como sólido rígido. Tras tirar de la cuerda uno de los astronautas, la distancia entre ellos se reduce a $d' = 5.00$ m. (**d**) ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema? ¿Por qué? (**e**) ¿Cuál es la nueva velocidad angular y lineal de los astronautas respecto de CM? (**f**) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (**g**) Explique el origen de la energía ganada o perdida.

3. (4 puntos) Un esfera de masa m y radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Se aplica una fuerza de módulo F paralela al plano sobre su centro C. (**a**) Obtener los momentos de fuerzas $\tau_{C,i}$ de cada una de las fuerzas exteriores que actúan sobre la esfera respecto a su centro (**b**) Obtener los momentos $\tau_{O,i}$ de las mismas fuerzas pero respecto al punto de contacto con el plano (punto O). (**c**) Obtener el modulo y dirección de la fuerza F_0 que hay aplicar a su centro para que no ruede y el valor de la fuerza de rozamiento $f_{r,0}$ en esa situación. (**d**) Si la fuerza pasa a ser $F_1 = 3F_0$ haciendo subir rodando a la esfera por el plano, obtener la aceleracíón de su centro de masas y la fuerza de rozamiento $f_{r,1}$. (**e**) ¿Cuál es su velocidad y energía cinética cuando se ha desplazado una distancia d sobre el plano. **Dato:** Usar que la esfera tiene un momento de inercia respecto a un eje que pasa por su centro de masas $I_{cm} = (2/5)mR^2$-

4. (1 punto) (**a**) Demostrar que la energía cinética de un sistema de partículas se puede descomponer en energía cinética orbital y energía cinética interna. (**b**)Aplicar a un disco de radio R y masa M que se lanza en el campo gravitatorio en la superficie terrestre de tal forma que se mantiene el disco vertical en el plano del movimiento. En un instante dado, su centro se traslada con velocidad v y gira con velocidad angular ω . Deducir y escribir la expresión de su energía mecánica. **Dato:** el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pasa por su centro de masas es $I_G = (1/2)MR^2$.

5. (1 punto) Escribir la ecuación de una onda armónica $u = u(x, t)$ que se propaga en el sentido negativo del eje x con amplitud 0.100 m, una longitud de onda $\lambda = 3.00$ m y con una velocidad $c = 5.00$ m/s, sabiendo que el punto $x = 0$ está en el instante inicial $t = 0$ en el estado en que u toma su valor mínimo (negativo y máximo en valor absoluto) ¿Cual es la velocidad de un punto de coordenada $x_1 = 6.00$ m en el instante inicial?

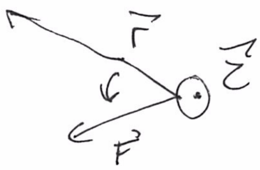
(1) P261 $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ tiene $|\tau| = Fd$.



$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}\times\vec{F}| = |\vec{OP}\times\vec{F}| = |\vec{OP}|\,F\,\mathrm{sen}(\varphi) = Fd$$

Y vemos que d es la distancia de O a la recta que pasa por P y paralela a $\vec{F}$, es decir, su línea de acción.

La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano definido por O y la línea de acción de $\vec{F}$: En el dibujo, el plano del papel. Su sentido el de avance de un tornillo que gira de $\vec{r}$ a $\vec{F}$ por el camino más corto. En el dibujo, será hacia afuera del papel.

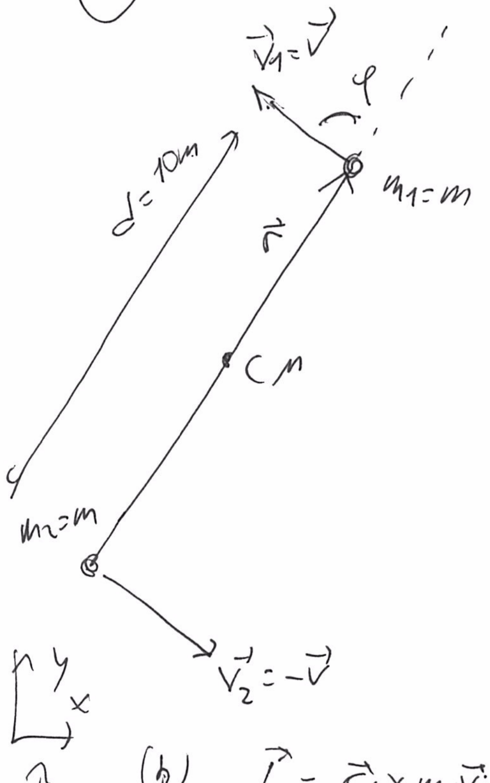


Físicamente, es el sentido de giro de un cuerpo sobre el que actúa $\vec{F}$ respecto al punto O.

Significado físico: es la tendencia a girar respecto a O, que $\vec{F}$ produciría en un cuerpo. La dirección de $\vec{\tau}$ sería el eje de giro. El sentido de $\vec{\tau}$ nos indicaría el sentido de giro, como hemos visto.

Lo que sucede a un cuerpo, depende de todas las otras fuerzas que actúan sobre él.

2) P261



$m=75kg$, $v=5\ m/s$

(a) ¿I_{cm}, ω?

(b) ¿L individuales y S.R.?

(c) E_{rot} (ind.) y S.R.?

$d \to d'=5.00m$ (d) ¿L'?

(e) (ω', v'?)

(f) E'_{rot}?

(g) orígen ;

(a) $I_{cm}=\sum m_i d_i^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2m\frac{d^2}{4} \Rightarrow$

(1) $I_{cm}=\frac{1}{2}md^2=\frac{1}{2}75\times10^2 \Rightarrow \boxed{I_{cm}=3750\ kg\,m^2}$

Giran ~~entorno~~ en torno a cm: $\Rightarrow \omega=\frac{v}{R}=\frac{v}{d/2}=\frac{5}{5} \Rightarrow$ $\boxed{\omega=1\ rad/s}$

(b) $\vec{L}_1=\vec{r}_1\times m_1\vec{v}_1 \Rightarrow L=r_1 m_1 v_1 \operatorname{sen}(\varphi)=\frac{d}{2}mv\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\frac{d}{2}mv.$

La componente z es la única no nula, luego $L_1=+\frac{d}{2}mv$, suponiendo sentido positivo el antihorario (z+) ∴ L_2 es idéntico:

$\Rightarrow L=2\left(\frac{d}{2}mv\right) \Rightarrow L=dmv$ (2)

luego $L=10\times75\times5 \Rightarrow \boxed{L=3750\ kg\,m^2/s}$ (eje z)

Como sólido rígido $L=I\omega=\frac{1}{2}md^2\frac{v}{(d/2)}=mdv$, vemos que es idéntico a (2)

(c) $\vec{v}_{cm}=\frac{1}{2m}(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=0$, luego la energía cinética es toda de rotación:

$E_c=E_{c,rot}+\cancel{E_{c,orbital}}^{0}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=mv^2 \Rightarrow E_c=mv^2$ (3)

Sustituyendo $E_{c,rot}=E_c=75\times5^2 \Rightarrow \boxed{E_{c,rot}=1875\ J}$

d/2

Se reduce $d\to d'=5m$

(d) Como no hay fuerzas externas, ni, por lo tanto, momento de fuerzas externas.

$\vec{L}$ es cte, $\boxed{L'=L=3750\ kg\,m^2/s}$

(e) ¿ω'? ¿v'? Según (2) para $d'v' \to L'=d'mv'=L=dmv \Rightarrow$

$v'=\frac{dv}{d'}=\left(\frac{d}{d'}\right)v=2v \Rightarrow v'=2v=2\times5 \Rightarrow \boxed{v'=10\ m/s}$

Y $\omega'=\frac{v'}{d'/2}=\frac{2v}{d/2}=\frac{4v}{d}=4\left(\frac{v}{d/2}\right)=4\omega \Rightarrow \boxed{\omega'=4\ rad/s}$

(e) De (3) $E'_c=mv'^2=$

$=75\times10^2 \Rightarrow \boxed{E'_c=7500\ J}$ (rot

(f) $\Delta E_{c,rot}=5625\ J$ Ha aumentado. Proviene del trabajo muscular del astronauta que tira.

③ P261 (a,b,c)

a) $\tau_{C,i}$ respecto a G

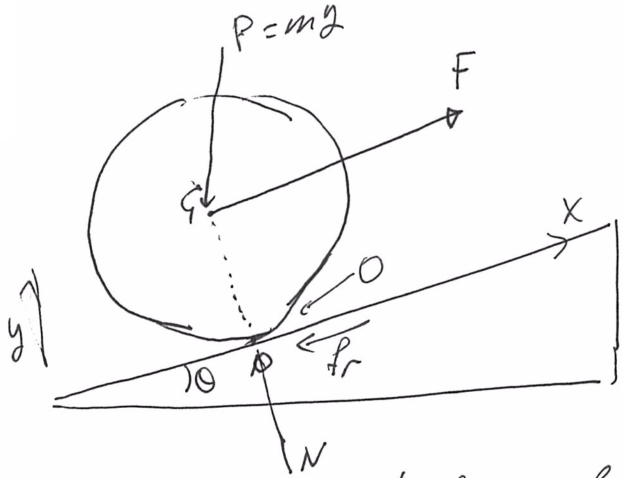
b) $\tau_{O,i}$ " " O

c) F_0 tal que no ruede, $f_{r,0}$ (rozamiento)

d) Si $F_1 = F_0$, ¿a_{cm}? ¿$f_{r,1}$?

(e) v y E_c si se desplaza d.

Dato: $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ (esfera)

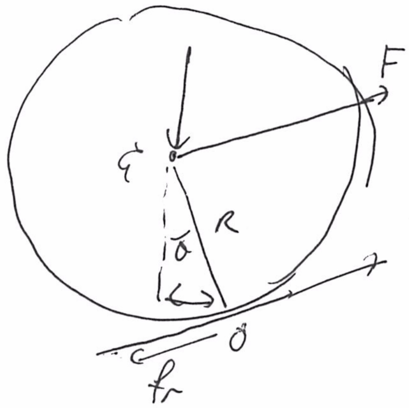


(a) ($\tau_{O,i}$) El momento de una fuerza es igual a su módulo multiplicado por la distancia de su línea de acción d; $\tau = Fd$. Tomamos como criterio de signo positivo, el horario que va a ser el del movimiento.

f_r y N están aplicadas en O, luego d=0, luego $\boxed{\tau_O(N)=\tau_O(f_r)=0}$

$R \perp F$, luego $d=R \Rightarrow \boxed{\tau_O(F) = RF}$

$\tau(P)$: como P es vertical, d es la distancia horizontal entre G y O: $d = R\,\text{sen}\,\theta$. Tiende a producir un giro en sentido antihorario (rueda hacia abajo) $\Rightarrow \boxed{\tau_O(P) = -mgR\,\text{sen}\,\theta}$

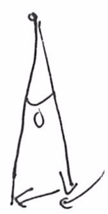


(b) ¿$\tau_{C,i}$? F y P están aplicadas en G, luego d=0

$\Rightarrow \boxed{\tau_C(F)=\tau_C(P)=0}$

La línea de acción de N pasa por G, luego d=0

$\boxed{\tau_G(N)=0}$



Queda f_r, como R es perpendicular al plano y a f_r, $d=R \Rightarrow$

$P_x = P\,\text{sen}\,\theta$. $\boxed{\tau(f_r) = f_r R}$

(c) Si no rueda, está en equilibrio, luego $\sum \tau_i = 0$ y $\sum \vec{F}_i = 0$.

Elegimos O, como centro de momentos, según (a)

$\sum \tau_{O,i} = RF - mgR\,\text{sen}(\theta)$ (1), en equilibrio $RF_0 - mgR\,\text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{F_0 = mg\,\text{sen}\,\theta}$ (F_0 compensa exactamente $P_x = mg\,\text{sen}\,\theta$ en el mismo punto) (también $N = P_y$)

Tomamos el eje x paralelo al plano hacia arriba, pues es el sentido del movimiento después

$\sum F_{i,x} = 0 \Rightarrow F - P_x - f_r = m\,a_{cm,x}$ (2). En equilibrio

$F_0 - mg\,\text{sen}\,\theta - f_{r,0} = 0 \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta - f_{r,0} = 0 \Rightarrow \boxed{f_{r,0} = 0}$

(3) P2G1 (d, e)

(d) Si $F_1 = 3F_0 = 3mg\,\text{sen}\,\theta$, ¿$a_{cm}$? y ¿$f_{r,1}$?

Se cumple que $\sum_{ext} \tau_i = I\alpha$; $\sum \vec{F}_{i,ext} = m\vec{a}_{cm}$, y la condición de rodadura $a_{cm} = \alpha R$; $v_{cm} = \omega R$

nos interesa solo la $a_{cm,x}$, pues $a_{cm,y} = 0$, llamamos $a = a_{cm,x}$

Tomamos momentos de fuerzas respecto a O.

De (1): $\sum \tau_{O,i} = I_O \alpha$, obtenemos I_O por el teorema de Steiner $I_O = I_{cm} + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 \Rightarrow \underline{I_O = \frac{7}{5}mR^2}$.

Entonces

$$F_1 R - mg\,\text{sen}\,\theta R = \left(\frac{7}{5}mR^2\right)\frac{a}{R} \to$$

$$F_1 - mg\,\text{sen}\,\theta = \frac{7}{5}ma \Rightarrow 3mg\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta = \frac{7}{5}ma$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{10}{7}g\,\text{sen}\,\theta}$$

Para obtener $f_{r,1}$, de (2):

$$F_1 - P_x - f_{r,1} = ma \Rightarrow 3mg\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta - f_{r,1} = m\frac{10}{7}g\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow f_{r,1} = 2mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{10}{7}mg\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{f_{r,1} = \frac{4}{7}mg\,\text{sen}\,\theta}$$

(e) Como a es cte, podemos usar que $v^2 - \underbrace{v_0^2}_{0} = 2ad^* \Rightarrow$

$$v = \sqrt{2\times\frac{10}{7}g\,\text{sen}\,\theta\, d} \to \boxed{v = \sqrt{\frac{20}{7}g\,\text{sen}\,\theta\, d}}$$

La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv^2$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{7}{10}m\frac{20}{7}g\,\text{sen}\,\theta\, d \Rightarrow \boxed{E_c = 2g\,\text{sen}\,\theta\, d}$$

Alternativa

O bien por el teorema del trabajo, como P_y y N no realizan trabajo, pues son perpendiculares al desplazamiento y $f_{r,1}$, tampoco, pues no desplaza su punto de aplicación ($v_O = 0$):

$$W_{ext} = \sum F_{i,x}\underbrace{d_x}_{d} = (F_1 - P_x)d = (3mg\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta)d = \Delta E_c = E_c \Rightarrow \boxed{E_c = 2mg\,\text{sen}\,\theta\, d}$$

③ P2 61 (e) complemento

(*) La ecuación $v^2-v_0^2=2ad$, también se puede obtener a partir de que el c.d.m. se comporta como una partícula puntual sobre la que actúan todas las fuerzas sobre el sistema. Como se anulan en la dirección y, consideramos sólo la x.

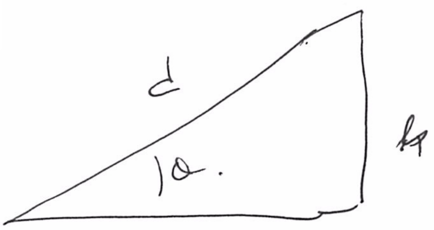
$$F_{net}=\sum F_{i,x}=m\,a_{cm,x} \Rightarrow F_{net}=\sum F_{i,x}=ma \quad ,$$

y $W_{net}=F_{net}\,d$ pues F_{net} es cte y paralela y del mismo sentido que el desplazamiento

$$W_{net}=\Delta E_{c,cm}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow F_{net}\,d=ma=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\underline{v^2-v_0^2=2ad} \quad \text{c.q.d.}$$

Alternativa 2. Por el balance de energía



N y fr no realizan trabajo, el trabajo realizado por F_1 es $W_1=F_1d$, pues $\vec{F_1}\parallel\vec{d}$ y es cte.

Entonces W_1 es igual al aumento de la energía mecánica, por el teorema del trabajo con fuerzas no conservativas

$$W_1=F_1d=\Delta E_c+\Delta U=E_c-\underbrace{E_{c,i}}_{0}+mg(h-\underbrace{h_0}_{0})$$

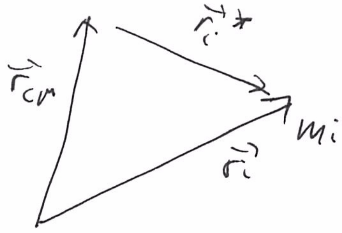
$$\Rightarrow F_1d=E_c+mg\,d\,\mathrm{sen}\theta \Rightarrow F_1d-mg\,d\,\mathrm{sen}\theta=E_c \Rightarrow$$

$$3mg\,\mathrm{sen}\theta\,d-mg\,\mathrm{sen}\theta\,d=E_c \Rightarrow \boxed{E_c=2mg\,\mathrm{sen}\theta} \quad \text{c.q.d.}$$

(7) P261. (a) Demostrar que $E_c = E_{c,orb} + E_{c,int}$

Usamos:
$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*$

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*)\cdot(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*)$$



$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_i^* + \frac{1}{2} \sum m_i (2\vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_{cm}).$$

Donde hemos usado que el producto escalar es conmutativo y $\vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_{cm} = \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i^*$

Como $\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} = |\vec{v}_{cm}|^2 \cos(0) = v_{cm}^2$ y $\vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_i^* = v_i^{*2}$, nos falta demostrar que el tercer sumando es nulo. Sacando el factor común $\vec{v}_{cm}$:

$$\left(\sum m_i \vec{v}_i^*\right) \cdot \vec{v}_{cm} = M \vec{v}_{cm}^* \cdot \vec{v}_{cm}$$, pero $\vec{v}_{cm}^*$ es la velocidad del centro de masas relativa a sí mismo que es nula.

En definitiva: $E_c = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i\right)}_{M} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2} \Rightarrow$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{*2}}$$

$E_{c,interna} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2}$ es la E_c relativa al c.d.m.

$E_{c,orbital} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$: energía de traslación de una masa $M = \sum m_i$ con el centro de masas

(b) Un aro tiene una energía de rotación $E_{c,int} = \frac{1}{2} I \omega^2$ respecto el c.d.m. con $I = \frac{1}{2} mR^2$, de traslación u orbital $\frac{1}{2} mv^2$ y una energía potencial $mgh \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 + mgh}$$

(5) P261 u onda armónica / $+x$

(a) $A = 0.100\,m$, $\lambda = 3.00\,m$, $c = 5.00\,m/s$

Si $x=0$, $t=0$ u mín. (negativo)

(b) v si $x = x_1 = 6.00\,m$ y $t=0$

(a) Como u se propaga en el sentido negativo del eje x.

$$u = A\cos(kx + \omega t + \varphi_0)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}\,m^{-1} \quad \text{ó rad/m} \qquad y \qquad c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{\lambda}{2\pi}}{\frac{T}{2\pi}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{\omega}} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = ck = 5 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}\,\text{rad/s}$$

Nos falta saber φ_0 para $u(x,t) = u(0,0) = -A = A\cos(0+0+\varphi_0)$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_0) = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \pi.$$

Luego $$\boxed{u = 0.100\,m\cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{10\pi}{3}t + \pi\right)}$$ x en m, t en s. fase en radianes.

(b) $$v = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \operatorname{sen}(kx + \omega t + \varphi_0)$$

Como $x_1 = 6.00\,m = 2\lambda$, $kx_1 = \frac{2\pi}{\lambda}2\lambda = 4\pi$, u tiene el mismo valor y velocidad que $x=0$

Luego $$v_1 = -\frac{10\pi}{3}\,0.100\,\underbrace{\operatorname{sen}(k\cdot 0 + \omega\cdot 0 + \pi)}_{\operatorname{sen}\pi = 0} \Rightarrow \boxed{v_1 = 0}$$