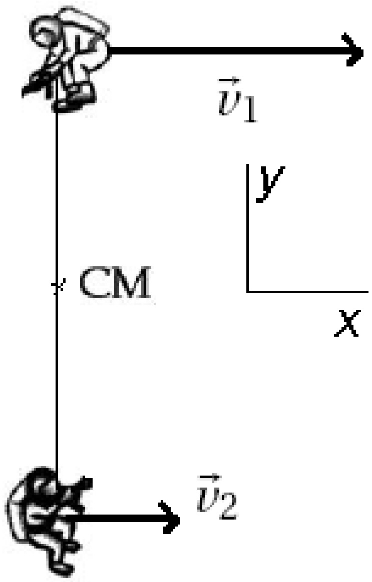
SEGUNDO PARCIAL DEL CURSO 2019/20 (19/12/2019)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 2

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) Razonar todos los pasos. 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\rm fin} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\rm fin} = 3.12\,{\rm m/s^2}}$. 4) Usar $g = 9.8\,{\rm m/s^2}$ para obtener resultados numéricos. En resultados simbólicos, dejar g también en forma simbólica. 5) Dar los números en formato decimal o ciéntifico si son muy grandes o pequeños, no como fracciones o combinaciones de raices. 6) Usar un número apropiado de cifras significativas. 7) Hacer dibujos grandes (media página o así) incluyendo todas las magnitudes relevantes.

1. (1 punto) (**a**)Definir el momento $\vec{\tau}$ de un par de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}' = -\vec{F}$ que actuan sobre rectas paralelas. Demostrar (**b**) que no depende del punto respecto al que se toman momentos y (**c**) que su modulo es igual al producto del módulo de una de las fuerza por la distancia entre las líneas de acción. Ilustrarlo claramente con un dibujo grande. (**d**) Explicar la dirección y sentido que tiene el vector $\vec{\tau}$. (**e**)¿Cuál es su significado físico?



2. (3 puntos) Dos astronautas (ver figura) con una masa cada uno de 75.0 kg y asimilados a masas puntuales, están unidos por una cuerda de 10.0 m de longitud y masa despreciable. Los astronautas están aislados en el espacio por lo que no se tienen en cuenta las fuerzas gravitatorias. En el instante de la figura el astronauta 1 tiene una velocidad $\vec{v}_1 = 15\vec{\imath}\,{\rm m/s}$ y el astronauta 2 tiene una velocidad $\vec{v}_2 = 5\vec{\imath}\,{\rm m/s}$. (**a**) Calcular el momento lineal del sistema $\vec{p}$ y la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{\rm cm}$. (**b**) Calcular la energía cinética $E_{\rm c}$ del sistema y su descomposición en energía cinética orbital $E_{\rm c,orb}$ y energía cinética interna $E_{\rm c,int}$ (o relativa al centro de masas). Un astronauta tira de la cuerda y ambos se acercan, de tal forma que la longitud de la cuerda se reduce. Un nueva observación de la velocidad del astronauta 1 es $\vec{v}_1' = 20\vec{\imath}\,{\rm m/s}$, (**c**) calcular la velocidad $\vec{v}_2'$ en el mismo instante. (**d**) ¿La nueva energía cinética total E_c' después de acercarse es mayor o menor? (**e**) Explique el origen de la energía ganada o perdida.

3. (4 puntos) Una rueda de masa m y radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Se aplica una fuerza de módulo F paralela al plano sobre su centro C. (**a**) Obtener los momentos de fuerzas $\tau_{O,i}$ de cada una de las fuerzas exteriores que actúan sobre la rueda al punto de contacto con el plano (punto O). (**b**) Obtener los momentos $\tau_{C,i}$ de las mismas fuerzas respecto de su centro (punto C). (**c**) Obtener el modulo y dirección de la fuerza F_0 que hay aplicar a su centro para que no ruede y el valor de la fuerza de rozamiento $f_{r,0}$ en esa situación. (**d**) Si la fuerza pasa a ser $F_1 = 3F_0$ haciendo subir rodando a la rueda por el plano, obtener la aceleracíón de su centro de masas y la fuerza de rozamiento $f_{r,1}$. (**e**) ¿Cuál es su velocidad y energía cinética cuando se ha desplazado una distancia d sobre el plano. **Dato:** Usar que la rueda tiene un momento de inercia respecto a un eje que pasa por su centro de masas $I_{cm} = (1/2)mR^2$-

4. (1 punto) Demostrar que el momento angular de un sistema de partículas respecto de un punto fijo O se puede descomponer en la suma del momento angular orbital y del momento angular relativo al centro de masas (también llamado interno o de spin).

5. (1 punto) Escribir la ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa $u = u(x,t)$ sabiendo que se propaga en el sentido negativo del eje x con amplitud 0.20 m, longitud de onda $\lambda = 5.0$ m y velocidad de propagación $c = 10\,{\rm m/s}$, sabiendo que el punto $x = 0$ está en el instante inicial $t = 0$ en el estado en que u toma su valor mínimo (negativo y máximo en valor absoluto) ¿Cual es la velocidad de vibración de un punto de coordenada $x_1 = 10\,{\rm m}$ en el instante inicial?

(1) P2G2 2019   Definir $\vec{\tau}$ de un par de fuerzas

Demuestra $\tau = Fd$.

Explica dir y sentido $\vec{\tau}$

Sentido físico

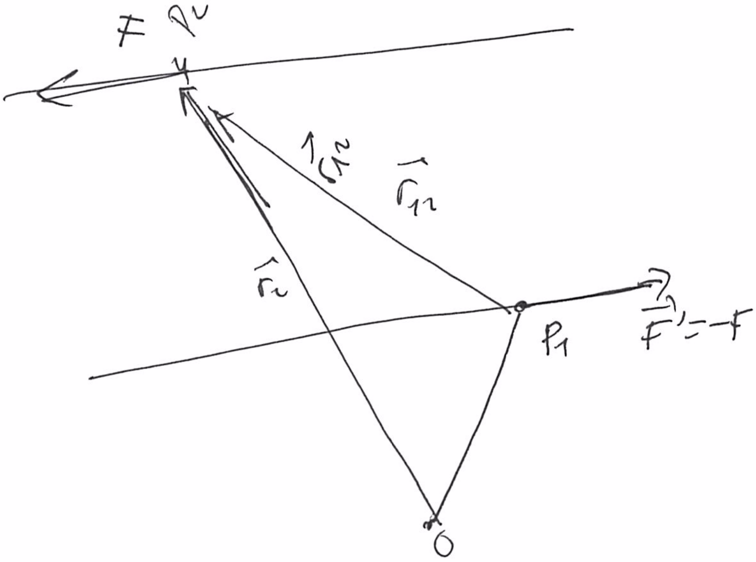
Def: $\vec{\tau}$ es la suma de los momentos de fuerzas respecto a un punto O

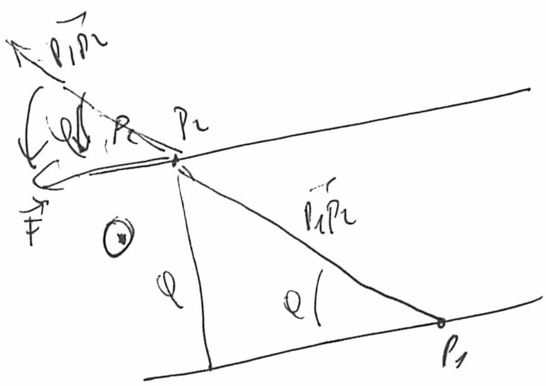
$$\vec{\tau} = \vec{OP_1}\times\vec{F}' + \vec{OP_2}\times\vec{F} =$$

$$= -\vec{OP_1}\times\vec{F} + \vec{OP_2}\times\vec{F} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \left(\vec{OP_2}-\vec{OP_1}\right)\times\vec{F} = \vec{P_1P_2}\times\vec{F}$$

Entonces, vemos que no depende de O, sólo de $\vec{F}$ y P_1 y P_2





Además

$$|\vec{\tau}| = |\vec{P_1P_2}|\,|\vec{F}|\,\mathrm{sen}(\varphi) = F\,|\vec{P_1P_2}|\,\mathrm{sen}\,\varphi \Rightarrow$$

$\boxed{|\vec{\tau}| = Fd}$ siendo d, la distancia entre las líneas de acción.

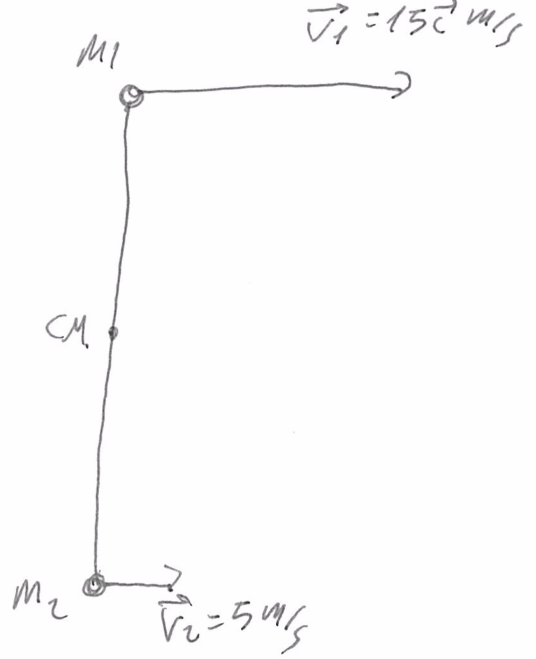
Luego $\vec{\tau}$ no depende de P_1 y P_2, solamente de $\vec{F}$ y de las líneas de acción.

Dirección: la del producto vectorial $\vec{P_1P_2}\times\vec{F}$, es decir perpendicular al plano definido por $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ (o por sus líneas de acción)

Sentido: según la regla de Maxwell: avance de un tornillo que gira de $\vec{P_1P_2}$ a $\vec{F}$ por el camino más corto. En el dibujo, hacia fuera del papel. ⊙. También corresponde al sentido de giro de un cuerpo sobre el que actúa $\vec{\tau}$.

Significado físico: Como $\vec{F}+\vec{F}'=0$, el par de fuerzas no tiende a trasladar un cuerpo, sino que solamente tiende a hacerlo a girar en torno a un eje paralelo a $\vec{\tau}$ y con el sentido de giro relacionado con $\vec{\tau}$ por la regla de Maxwell.

(2) P2G3



(a) $m_1 = m_2 = m = 75\,kg$ { Cuerda: $d = 10.0\,m$, sin masa

(a) $P_y = 0$, pues no hay componentes y

$P_x = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m15 + m5 = 20m$

$\to P_x = 20\times75\ kg\,m/s \Rightarrow \boxed{P_x = 1500\,kg\,m/s}$

V_{cm}, como $p = M V_{cm} \Rightarrow$

$V_{cm,x} = \frac{P_x}{M} = \frac{P_x}{2m} = \frac{1500}{2\times75} \Rightarrow \boxed{V_{cm,x} = 10\,m/s}$ $\boxed{V_{cm,y} = 0}$

Nos limitamos al eje x, salvo indicación en contrario

(b) $E_c = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}$, calculamos las velocidades relativas al centro de masas

$V^*_{1x} = V_{1x} - V_{cm,x} = 15 - 10 \Rightarrow \boxed{V^*_{1x} = 5\,m/s}$

$V^*_{2x} = V_{2x} - V_{cm,x} = 5 - 10 \Rightarrow \boxed{V^*_{2x} = -5\,m/s}$

[Nota: entonces el sistema se traslada con velocidad 10 m/s y rota respecto a su C.M. con $\omega = \frac{V^*}{R} = \frac{V^*}{d/2} = \frac{2V^*}{d} = \frac{2\times5}{10} = 1\,rad/s$ $(V^* = |V_1^*| = |V_2^*|)$
(No se pide)

Luego $E_c^* = 2\times\frac{1}{2} m \underset{\parallel\, V_2^{*2}}{V_1^{*2}} = m V_1^{*2} = 75\times5^2 \Rightarrow \boxed{E_c^* = 1875\,J}$

$E_{orb} = \frac{1}{2}(2m)V_{cm}^2 = \frac{1}{2}\,2\times75\times10^2 \Rightarrow \boxed{E_{orb} = 7500\,J}$

(e)

$E_c = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{1}{2}\times0.75\times(15^2 + 5^2) \Rightarrow \boxed{E_c = 9375\,J}$

$\boxed{E_c = E_c^* + E_{orb}}$ Como debe ser.

(c) Como $\vec{F}_{ext} = 0$, se conserva $p_x \Rightarrow P_x = 1500 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$

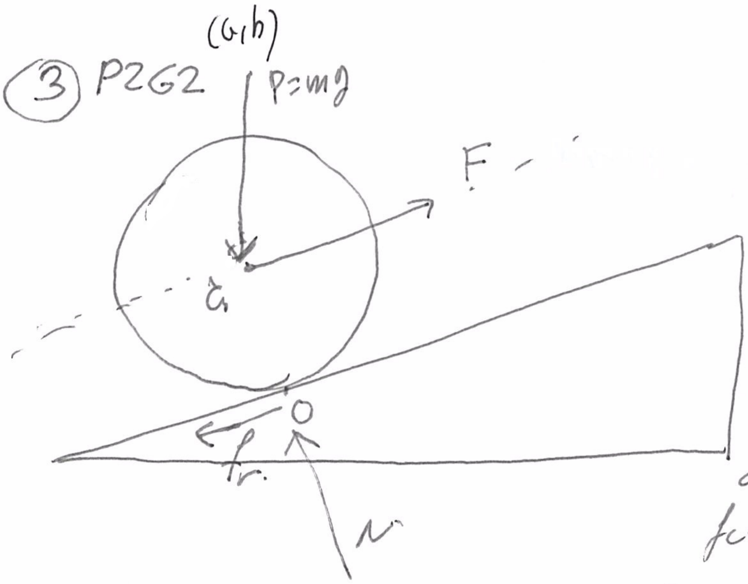
$\Rightarrow 1500 = 75(20 + V_2') \Rightarrow V_2' = \frac{1500}{75} - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2' = V_{2x}' = 0}$

(d) La nueva energía cinética es $E_c' = \frac{1}{2} m V_1'^2 + \frac{1}{2} m \underset{0}{V_2'^2} = \frac{1}{2}\,75\times20^2$

$\Rightarrow E_c' = 15000\,J$, $E_c = 9375\,J$

Ha aumentado. Proviene del trabajo muscular del astronauta que tira.

③ P2G2



a) Momentos de las fuerzas respecto del punto O

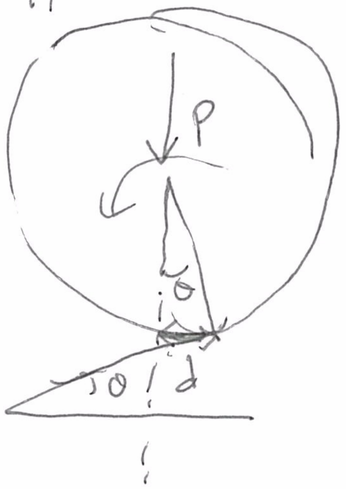
El momento de una fuerza es igual a su modulo multiplicado por la distancia a la línea de acción de la fuerza $\tau = Fd$. Tomamos como criterio de signo +, horario, pues el que tendrá cuando rueda.

$\boxed{\tau_O(N)=\tau_O(f_r)=0}$, pues están aplicados en O y d=0

(1) $\boxed{\tau(F)=RF}$, pues $R \perp F$ y es esa distancia.

Para P, como su dirección es vertical, d es la distancia horizontal de O, a la vertical de G.

$d = R\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow$ (2) $\boxed{\tau(P)=-PR\,\text{sen}\,\theta}$. Negativo, pues tiende a producir un giro antihorario.



(b) ¿τ_G?

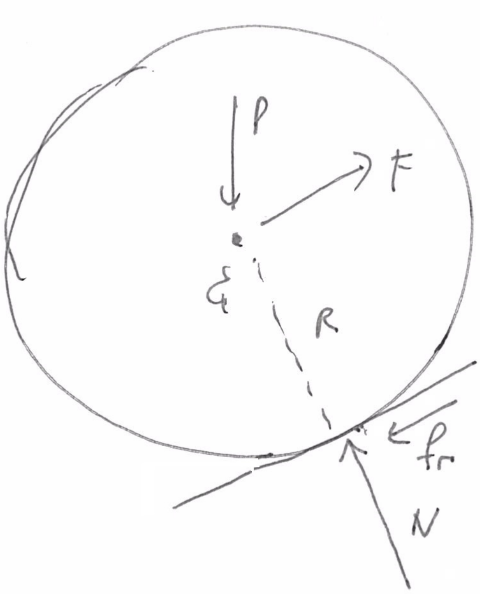
F y P pasan por G, luego d=0

$\boxed{\tau_G(F)=\tau_G(P)=0}$,

La línea de acción de N, pasa por G, luego d=0

$\boxed{\tau(N)=0}$

Sólo queda (3) $\boxed{\tau(f_r)=Rf_r}$; pues d=R



P262

3 cont (c)(d)

(c) En equilibrio $\sum \tau_i = 0$ y $\sum \vec{F}_i = 0$

Respecto al punto O, según (a)

$$\sum \tau_{O,i} = \tau(F_0) + \tau(P) = RF_0 - PR\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow$$

$$F_0 = P\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{F_0 = mg\,\text{sen}\,\theta}$$ F_0 compensa la componente P_x del peso.

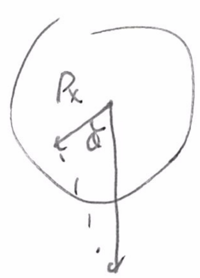
La dirección y sentido, paralelo al plano y hacia arriba

Tomando el eje x en el plano hacia arriba.. $\sum F_{i,x} = 0$

$$F_0 - P_x - f_r = 0 \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\alpha - f_r = 0$$

$P_x = P\,\text{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \boxed{f_r = 0}$ Como es lógico pues F_0 compensa en el mismo punto la fuerza del peso en el eje x.



(d) $F_1 = 3F_0$; las ecuaciones dinámicas son $\sum \vec{F}_{i,ext} = m\vec{a}_{cm}$

y $\sum \tau_{i,ext} = I\,\alpha$. (4), con $\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$ por la condición de rodadura

Respecto al punto, calculamos I_0, por el teorema de Steiner.

$$I_0 = I_{cm} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 \Rightarrow \underline{I_0 = \frac{3}{2}mR^2}$$

De nuevo, usando (a) $\sum(\tau_i) = RF_1 - mgR\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow$ usando (4)

$(a = a_{cm})$ $$RF_1 - mgR\,\text{sen}\,\theta = I_0\,\alpha \Rightarrow R\,3mg\,\text{sen}\,\theta - mgR\,\text{sen}\,\theta = \frac{3}{2}mR^2\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow 2g\,\text{sen}\,\theta = \frac{3}{2}a \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{3}g\,\text{sen}\,\theta}$$

En el eje x $\quad F_1 - mg\,\text{sen}\,\theta - f_r = ma \Rightarrow 3gm\,\text{sen}\,\theta - mg\,\text{sen}\,\theta - f_r = m\frac{4}{3}g\,\text{sen}\,\theta$

$$f_r = 2mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{4}{3}mg\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{f_r = \frac{2}{3}mg\,\text{sen}\,\theta}$$

P262 Cont (e)

Como a es uniforme, podemos usar que $v^2 - v_0^2 = 2ad$ (*)

$\Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{4}{3} g \operatorname{sen}\theta\, d} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{8}{3} g \operatorname{sen}\theta\, d}}$ $v = v_{cm}$

Su energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad \text{con } \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{4} m v^2 = \frac{\cancel{3}}{4} m \frac{8}{\cancel{3}} g \operatorname{sen}\theta\, d$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = 2 m g \operatorname{sen}\theta\, d}$$

Alternativa

También lo podemos obtener usando que en el *, la fuerza

F_1 realiza un trabajo $W_1 = F_1 d = 3mg d \operatorname{sen}\theta$, que

se invierte en energía potencial y cinética

$$W_1 = F_1 d = 3mg \operatorname{sen}\theta\, d = mgh + E_c = mg d \operatorname{sen}\theta + E_c$$

Luego $E_c = 3mg \operatorname{sen}\theta\, d - mg d \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \boxed{E_c = 2mg \operatorname{sen}\theta\, d}$

c.q.d

(*) Equivale a $F_{net_i} \cdot d = \sum F_{x,i}\, d = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$

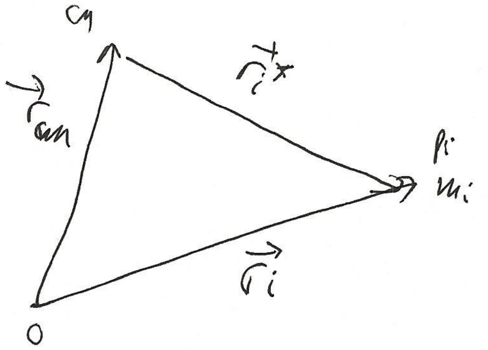
el trabajo realizado por la f exteriores es igual al aumento de energía cinética orbital o del centro de masas.

Pero $F_{net} = ma \Rightarrow \cancel{m} a d = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$ $v = \sqrt{2ad}$

P2 G2-F1 2019

(3) Demostrar que $\vec{L}_o$ de un sistema se puede descomponer en momento angular orbital más momento angular interno (o de spin o relativo al centro de masas)

Usaremos que $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i^*$ y su derivada respecto al tiempo $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*$



Además, por definición de centro de masas

$M\vec{r}_{cm} = \sum m_i \vec{r}_i$ y $M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$

y (1) $\sum m_i \vec{r}_i^* = M\vec{r}_{cm}^* = 0$; $\sum m_i \vec{v}_i^* = M\vec{v}_{cm}^* = 0$

Pues $\vec{v}_{cm}^*$ y $\vec{r}_{cm}^*$ son la velocidad y posición del c.d.m relativo a sí mismo, y, por lo tanto nulos. ($M = \sum m_i$)

$\vec{L}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i^*) \times m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*)$; multiplicamos:

$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i^* + \sum \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*.$$

Agrupando los términos en i, y sacando factor común a los términos que no dependen de i:

$$\Rightarrow \vec{L}_o = \vec{r}_{cm} \times \underbrace{\left(\sum m_i\right)}_{M} \vec{v}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^*\right)} + \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^*\right)} \times \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*$$

según (1)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_o = \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*}$$

El primer sumando es el momento angular de una partícula de masa M que se mueve con el centro de masas y se denomina momento angular orbital.

El segundo sumando es el momento angular relativo al c.d.m y se denomina momento angular interno, de spin o relativo al c.d.m.

(5) P2G2 2019

Onda armónica $u=u(x,t)$ en una cuerda tensa.

(a) propagación $-x$; $A=0.20m$, $\lambda=5.0m$ y $c=10m/s$

En $x=0, t=0$ está en el máximo negativo

(b) v para $x_1=10m$ y $t=0$.

Si se propaga en el sentido negativo del eje x

$$u=A\cos(kx+\omega t+\varphi_0)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{5m} \Rightarrow k=\frac{2\pi}{5}\,rad/m \,.\, / \quad c=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow T=\frac{\lambda}{c} \text{ y}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\lambda}c=kc=\frac{2\pi}{5}10 \Rightarrow \underline{\omega=\frac{20}{5}\pi\,rad/s}$$

Además $u(0,0)=-A=A\cos(k\cdot 0+\omega\cdot 0+\varphi_0) \Rightarrow \cos(\varphi_0)=-1 \Rightarrow \varphi_0=\pi$

Luego $\boxed{u=0.20m\cos\left(\frac{2\pi}{5}x+\frac{20}{5}\pi t+\pi\right)}$ x en m, t en s, fase en rad.

(b) La velocidad de vibración es

$$v=\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}=-\omega A\,\text{sen}(kx+\omega t+\varphi_0)$$

Si $x_1=10m=2\lambda$, por lo que $k_1x_1=\frac{2\pi}{\lambda}2\lambda=4\pi$ y

x_1 está en la misma fase que $x=0$, con igual perturbación u y velocidad $\dot{u}$.

Luego $v=\dot{u}=-\omega A\,\text{sen}(k\cdot 0+\omega\cdot 0+\pi)=-\omega A\,\text{sen}\,\pi=0$

$$\Rightarrow \boxed{v=0}$$