PRIMER PARCIAL DEL CURSO 2023/24 (02/11/2023)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 2

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) **Razonar todos los pasos.** 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$. 4) Usar $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ para obtener resultados numéricos. En resultados simbólicos, dejar g también en forma simbólica. 5) Dar los números en formato decimal o científico si son muy grandes o pequeños, no como fracciones o combinaciones de raices salvo muy simples. 6) Usar un número apropiado de cifras significativas.

RESPONDA A SOLAMENTE **TRES** DE LAS PREGUNTAS SIGUIENTES. LAS PREGUNTAS PUNTUAN IGUAL

(1) Si un partícula tiene una velocidad $\vec{v} = t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath}\,\text{m/s}$ con t en segundos, **(a)** obtener la aceleración $\vec{a}(t)$ y la posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, sabiendo que su posición en $t = 1\,\text{s}$ es $\vec{r}(1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}\,\text{m}$. **(b)** Calcular la aceleración media $\vec{a}_m$ y velocidad media $\vec{v}_m$ entre los tiempos $t = 1\,\text{s}$ y $t = 2\,\text{s}$.

(a) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dt}{dt}\vec{\imath} + \frac{d}{dt}(-t^2)\vec{\jmath} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{\imath} - 2t\vec{\jmath}}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ y $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t=0}^{t} \vec{v}\,dt$ (1), los límites inferiores también pueden ser $\vec{r}_1$ y t_1, como vemos después: De (1)

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t (t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath})\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\vec{\imath} - \frac{t^3}{3}\vec{\jmath}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}\vec{\imath} - \frac{t^3}{3}\vec{\jmath}$$

Usamos que $\vec{r}(1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ para obtener $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}(1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} = \vec{r}_0 + \frac{1^2}{2}\vec{\imath} - \frac{1^3}{3}\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \left[\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath}\right] \Rightarrow$$

$\vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath}$ y $\boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{\jmath}}$

Es todavía más directo: $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t=1}^{t} (t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath})\,dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1 = \left[\frac{t^2}{2}\vec{\imath} - \frac{t^3}{3}\vec{\jmath}\right]_1^t$

$$\vec{r} = (\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \left(\frac{t^2}{2}\vec{\imath} - \frac{t^3}{3}\vec{\jmath}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath}\right) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{\jmath} \quad \text{c.q.d.}$$

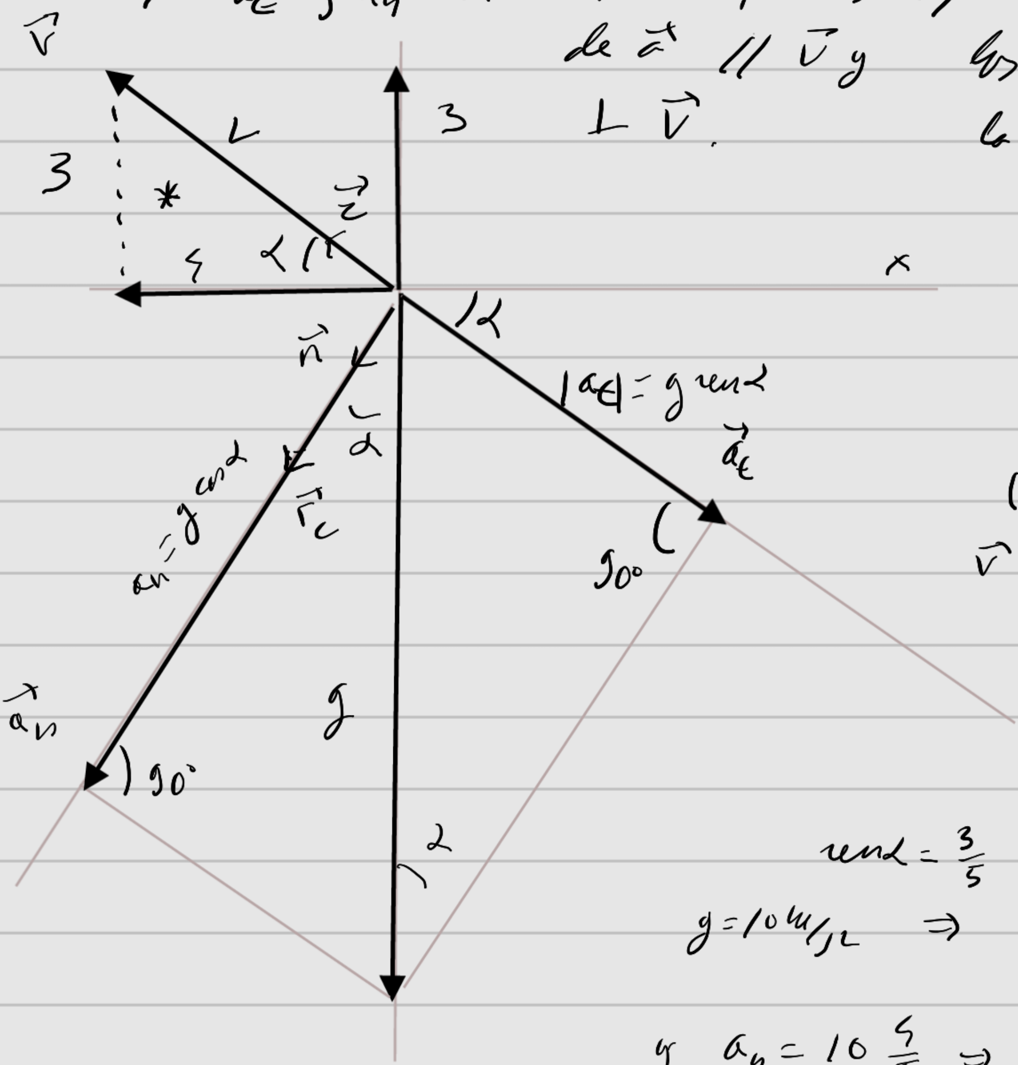
(b) $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(2\vec{\imath} - 2^2\vec{\jmath}) - (\vec{\imath} - 1^2\vec{\jmath})}{2-1} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_m = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}\ \text{m/s}^2}$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\left[\left(\frac{2^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{\jmath}\right] - [\vec{\imath} - \vec{\jmath}]}{2-1} \Rightarrow \vec{v}_m = \left(\frac{4}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)\vec{\imath} - \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} - 1\right)\vec{\jmath}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_m = \frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{7}{3}\vec{\jmath}\ \text{m/s}}$

(2) Una partícula de masa m en el campo gravitatorio de la superficie de la tierra, (g=10 m/s^2) tiene en cierto instante una velocidad $\vec{v} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ m/s. **(a)** Dibujar a escala dicha velocidad así como el vector aceleración y los vectores aceleraciones tangencial y normal $\vec{a}_t$, $\vec{a}_n$. **(b)** Calcular las componentes tangencial a_t y normal a_n de la aceleración . A partir de dichos valores, **(c)** explicar si el módulo de $\vec{v}$ aumenta o disminuye? **(d)** Obtener su radio de curvatura y la posición $\vec{r}_c$ del centro de curvatura instantáneo respecto a la partícula. Añadir $\vec{r}_c$ al dibujo anterior. **(e)** Obtener la velocidad y aceleración angular del radio de curvatura en ese instante. Nota: use la misma escala para posiciones, velocidades y aceleraciones.

(a) $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ son las componentes de $\vec{a}$ // $\vec{v}$ y $\perp \vec{v}$.



(b) a_t y a_n son las proyecciones sobre la dirección tangencial, paralela a $\vec{v}$ y su normal respectivamente. Según el dibujo, vemos que $a_t = -g\,\text{sen}\,\alpha$. (signo − pues es opuesta a $\vec{v}$) y $a_n = g\cos\alpha$. Obtenemos el sen α y cos α del triángulo *

$v = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \Rightarrow$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, usando

$g = 10\,\text{m/s}^2 \Rightarrow a_t = -10 \times \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{a_t = -6\,\text{m/s}^2}$

y $a_n = 10\,\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{a_n = 8\,\text{m/s}^2}$

También se puede obtener calculando $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$ y $\vec{n} = -\frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}$ (intercambiando τ_x y τ_y y cambiando su signo según el esquema en que n_x y n_y son negativos. Como $\vec{a} = -g\vec{\jmath} = -10\vec{\jmath}$ m/s²

$a_t = \vec{\tau}\cdot\vec{a} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\cdot(0,-10) = -6\,\text{m/s}^2$ cqd. y $a_n = \vec{n}\cdot\vec{a} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)\cdot(0,-10) = 8\,\text{m/s}^2$ cqd

(c) Como a_t es negativa y $a_t = \frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow v$ disminuye. También vemos que $\vec{a}_t$ es opuesta a $\vec{v}$, por lo que la frena.

(d) $\vec{r}_c = \rho\vec{n}$, siendo $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ y $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5^2}{8} = 3.125\,\text{m} \Rightarrow$

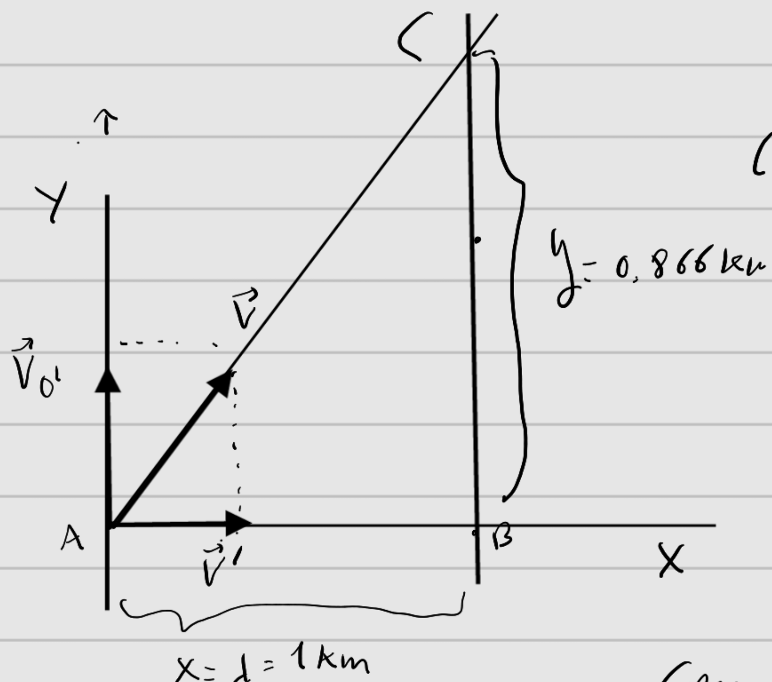
$$\vec{r}_c = \frac{25}{8}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{15}{8}, -\frac{20}{8}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_c = (-1.875\,\vec{i} - 2.5\,\vec{j})\ m}$$

ho hem atendido al dibujo.

(e) $\omega = \frac{V}{\rho} = \frac{5}{3.125} \Rightarrow \boxed{\omega = 1.6\ rad/s}$ y

$$\alpha = \frac{a_t}{\rho} = \frac{-6}{3.125} \Rightarrow \boxed{\alpha = -1.92\ rad/s^2}$$

(3) Un nadador con velocidad promedio v_N=2 km/h quiere cruzar un río de 1 km de ancho desde un punto A para llegar a un punto B justo enfrente en la otra orilla. No sabe que hay una corriente de velocidad v_C paralela al río por lo que nada perpendicularmente a la corriente llegando a un punto C a una distancia de 0.866 km río abajo de B. **(a)** ¿Cuál es la velocidad de la corriente y qué tiempo tarda? **(b)** Vuelve andando a B y como ya sabe que hay corriente decide volver a A, pero ahora nadando con un ángulo adecuado para llegar directamente a A. ¿Con qué ángulo tendrá que nadar respecto de la perpendicular al río y que tiempo tardará? **(c)** Si anda a v_W=5 km/h, ¿qué es mejor la técnica usada en (a) o la usada en (b) para llegar de A a B?



a) En el movimiento relativo $\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{v}\,'$. $\vec{V}_{0'}$ es la velocidad del sistema de referencia $0'$, es decir la velocidad de la corriente. $\vec{V}_{0'} = V_c \vec{J}$ y $\vec{v}\,'$ es la velocidad del nadador respecto al agua. Como intenta nadar directamente de A a B, $\vec{v}\,' = V_N \vec{\imath}$. Luego

$$\vec{r} = \vec{v}\, t_1 = \underbrace{V_N t_1}_{x} \vec{\imath} + \underbrace{V_c t_1}_{y} \vec{J} \quad (\text{hasta } C)$$

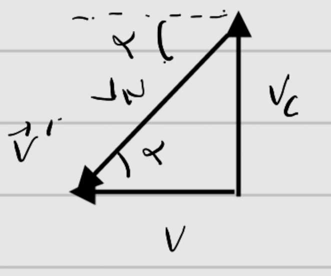
Como $V_N t_1 = x = d \Rightarrow 2 \frac{km}{h} t_1 = 1\,km \Rightarrow \boxed{t_1 = 0.5\,h}$

y como $V_c t_1 = y = 0.866\,km \Rightarrow V_c = \frac{0.866\,km}{0.5\,h} \Rightarrow$

$$\boxed{V_c = 1.732 \frac{km}{h}}$$

(b) Para volver de B a A, $\vec{v} = -v\vec{\imath}$, $|\vec{v}\,'| = V_N = 2\,km/h$ y $\vec{V}_{0'} = V_c \vec{J}$ sin cambios pues es la velocidad de la corriente. Como $\vec{v} = \vec{V}_{0'} + \vec{v}\,'$, tenemos el siguiente esquema. Vemos que $\frac{V_c}{V_N} = \operatorname{sen}\alpha$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1.732}{2} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 60°}$$



$v = V_N \cos\alpha = 2 \frac{km}{h} \frac{1}{2} = 1\,km/h$. Para recorrer $d = 1\,km$

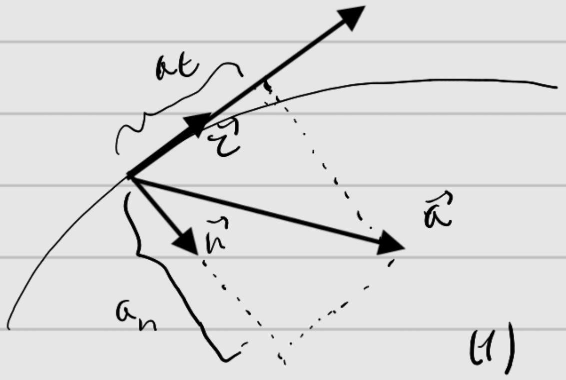
$d = v t_2 \Rightarrow t_2 = d/v = \frac{1\,km}{1\,km/h} \Rightarrow \boxed{t_2 = 1\,h}$

(c) El tiempo total en el primer cruce es t_1 más el tiempo t_1' que necesita para recorrer a pie $y = 0.866$,

$t_1' = \frac{y}{V_W} = \frac{0.866\,km}{5\,km/h} = 0.1732\,h$. Luego $t_a = 0.5 + 0.1732 = 0.6732\,h$, menor que $t_2 = 1\,h$, es decir: $\boxed{\text{Es más conveniente (a), ahorra } (1-0.6732)\,h \simeq 19.6 \text{ minutos}}$

(4)(a) Defina las componentes intrínsecas de la aceleración, tangencial y normal, ilustrándolo con un dibujo, que muestre todas las propiedades y vectores. **(b)** Deduzca que $a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ y $a_n = v^2/\rho$.

(a) Las componentes intrínsecas de la aceleración a_t y a_n son las componentes del vector $\vec{a}$ paralela y perpendicular a la velocidad. Si llamamos $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$ al vector unitario paralelo a $\vec{v}$ y $\vec{n}$ al vector perpendicular o normal a $\vec{v}$ hacia el interior de la curva que hace la trayectoria $\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}$. También podemos considerar las componentes vectoriales $\vec{a}_t = a_t\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = a_n\vec{n}$.



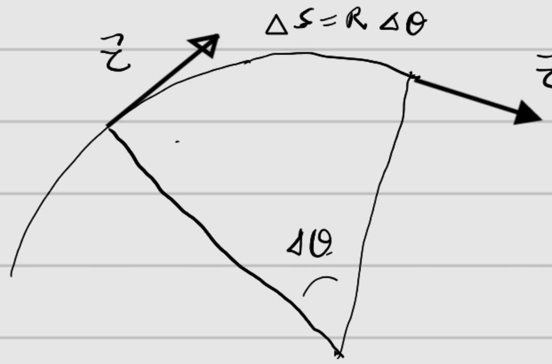
(b) Como $\vec{v} = v\vec{\tau}$, y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$

(1) $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Veamos que $\frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}$.

Como $|\vec{\tau}| = 1$, $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = |\tau|^2 = 1$, derivando $\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} + \vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0$, y como el producto escalar es conmutativo $2\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}$.

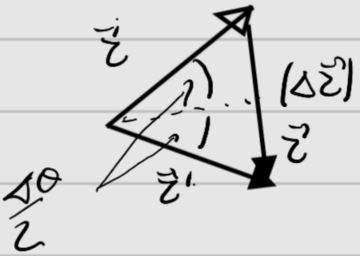
Luego $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n}$ y $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n} \Rightarrow \boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$ c.q.d.

Nos falta calcular $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$, para ello usamos que un trozo de trayectoria se asemeja a un arco de circunferencia de radio R, llamado el radio de curvatura. Como $\vec{\tau}$ es $\perp$ al radio, en dos puntos próximos P y P', el ángulo de $\vec{\tau}$ y $\vec{\tau}'$, es el mismo que entre los radios $\Delta\theta$



$\vec{\tau}' = \vec{\tau} + \Delta\vec{\tau} \Rightarrow \Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau}$,

$|\Delta\vec{\tau}| = 2\underbrace{|\vec{\tau}|}_{=1}\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \simeq 2\frac{\Delta\theta}{2}$



para ángulos pequeños, luego

$|\Delta\vec{\tau}| \simeq \Delta\theta \Rightarrow \left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| = \omega$ y como $\omega = \frac{v}{R}$, $a_n = v\frac{v}{R} \Rightarrow$

$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$