SEGUNDO PARCIAL DEL CURSO 2023/24 (14/12/2023)

Grado en Ingeniería de la Salud. Física 1. Grupo 2

Notas importantes: 1) No usar lápiz ni tinta roja. 2) **Razonar todos los pasos.** 3) Dar los resultados con la notación indicada y con sus unidades correspondientes si el resultado es numérico, y en una caja: ejemplos: $\boxed{a_{\text{fin}} = \frac{1}{2} g\, t^2}$, $\boxed{a_{\text{fin}} = 3\,\text{m/s}^2}$. 4) Usar $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ para obtener resultados numéricos. En resultados simbólicos, dejar g también en forma simbólica. 5) Dar los números en formato decimal o científico si son muy grandes o pequeños, no como fracciones o combinaciones de raices salvo muy simples. 6) Usar un número apropiado de cifras significativas.

RESPONDA A SOLAMENTE **TRES** DE LAS PREGUNTAS SIGUIENTES. SE INDICA LA PUNTUACIÓN RELATIVA.

(1) (3 puntos) Para una masa m unida a un muelle que cumple la ley de Hooke $F = -kx$: (a) Obtener la ecuación de movimiento $x = x(t)$, deducir la expresión de la energía potencial $U = U(x)$, enegía cinética $E_c = E_c(x)$ y energía mecánica $E = E(x)$ en función de x (b) Si $k = 10$ N/m y la amplitud es $A = 0.2$ m obtener U, E_c y E cuando $x = 0.1$ m.

(a) Por la segunda ley de Newton $F = ma = m\ddot{x}$, $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, combinando con $F = -kx$, tenemos: $m\ddot{x} = -kx$ ó $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ (1). Como la derivada de la función seno o coseno tienen la propiedad de que son iguales a sí mismas con signo cambiado, probamos $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ (2). Calculamos sus derivadas:

$\dot{x} = -\omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ (3) ; $\ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t + \varphi_0)}_{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$,

comparando con (1), vemos que (2) es solución si $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Luego, la ecuación de movimiento es $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ con } \omega^2 = \frac{k}{m}}$

U: Si F es conservativa, $U(x) - U(x_0) = \int_{x_0}^{x} -F\,dx$ y tomamos $x_0 = 0$ y $U_0 = U(x_0) = 0$, entonces

$$U(x) = \int_0^x -(-kx)\,dx = k\int_0^x x\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 + 0 \Rightarrow \boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

Como hemos podido hacer la integral sin usar el camino, también hemos demostrado que $F = -kx$ es conservativa. El valor máximo de x es $x = A$ (para $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$), luego la energía máxima es $\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$, que sabemos que es constante, pues la energía se conserva en un campo de fuerzas conservativo

$E_c(x)$: la podemos obtener de dos formas:

(i) como $E = E_c + U \Rightarrow E_c = E - U \Rightarrow$ $\boxed{E_c(x) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2}$

(ii) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\left[1-\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right] =$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k\underbrace{A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}_{x}\Big] \Rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$ c.q.d.

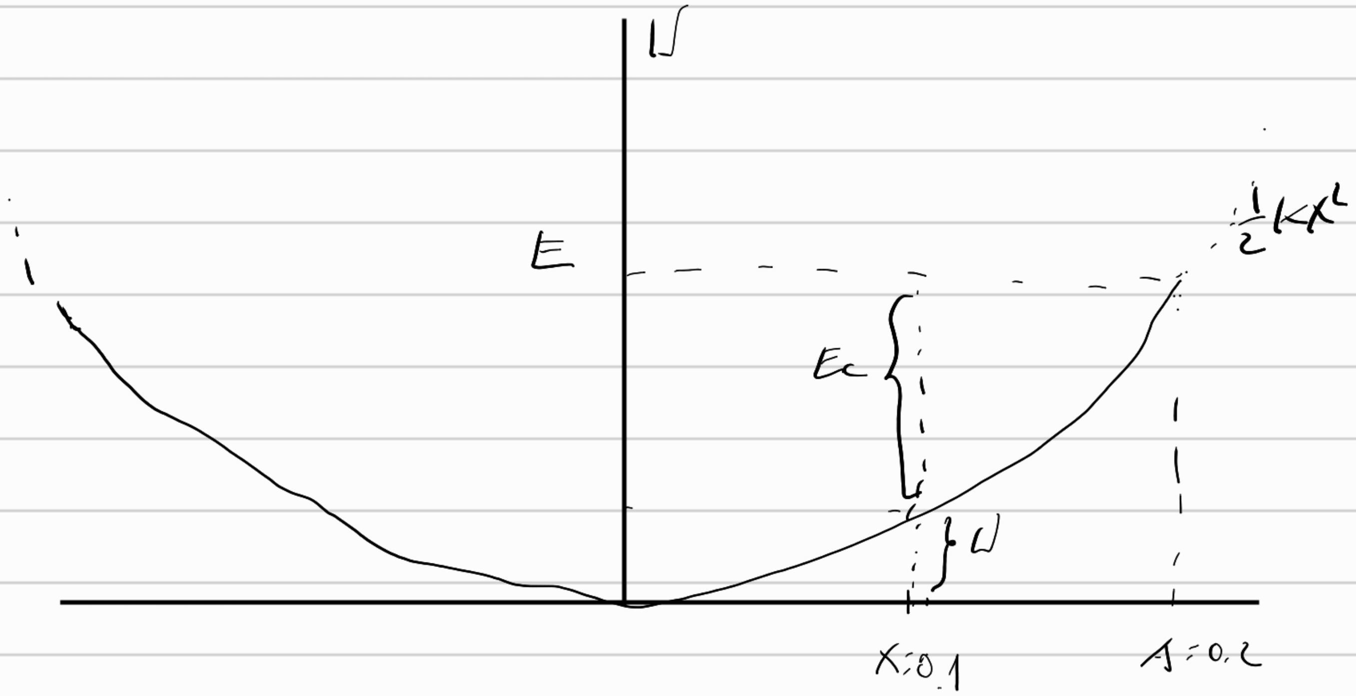
(b) Si $k = 10\,\frac{N}{m}$, $A = 0.2\,m$ y $x = 0.1\,m$ tenemos:

$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\,10\,\frac{N}{m}\,0.2^2\,m^2 = 5 \times 0.04\,J \Rightarrow$ $\boxed{E = 0.2\,J}$

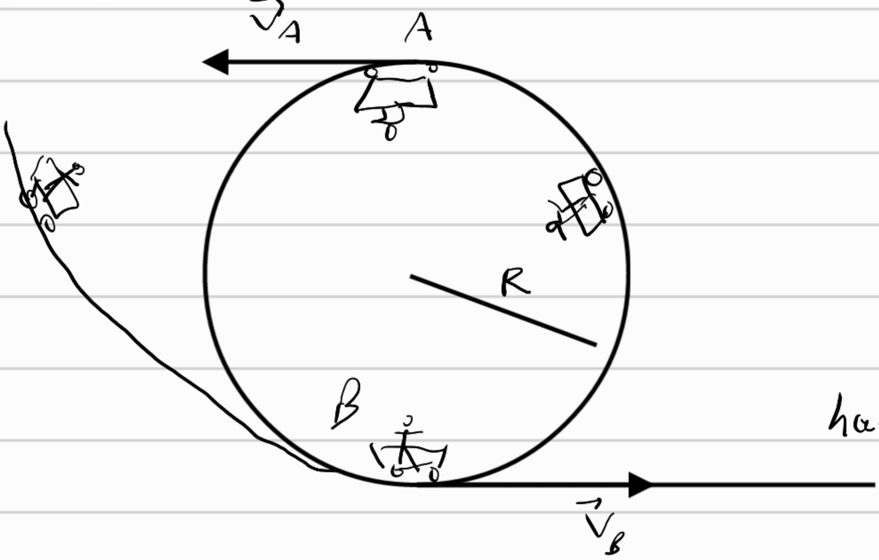
$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\,10\,\frac{N}{m}\,0.1^2\,m^2 = 5 \times 0.01\,J \Rightarrow$ $\boxed{U = 0.05\,J}$

$E_c = E - U \Rightarrow$ $\boxed{E_c = 0.15\,J}$

Como ampliación gráfica:



(2) (3 puntos) Una vagoneta en una vagoneta de una montaña rusa de un parque de atracciones realiza un rizo vertical de radio R. En el punto más alto (punto A) del rizo tiene una velocidad de móduo v_A y la vagoneta está invertida. En ese punto los pasajeros tienen la sensación de tener un cuarto de su peso. (a) Calcular la velocidad de la vagoneta en su punto más alto. (b) Calcular la velocidad de la vagoneta v_B cuando vuelve a su punto más bajo (punto B) y el peso aparente de un pasajero de masa m en B. Dar los resultados en función de g, R y m. **Nota:** Las ruedas de la vagoneta hacen que se pueda despreciar el rozamiento de la misma con la rampa.

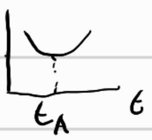


El peso aparente es lo que marcaría una báscula bajo los pies (o pierna y silla) de una persona. La báscula marca la fuerza F_b que hace sobre la persona. En la situación normal

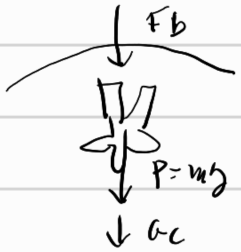
$F_b = P$, pues la persona está en equilibrio. Si no hay balanza es la fuerza que hace la vagoneta.

En A, la persona está moviéndose junto a la vagoneta en dirección horizontal, realizando un movimiento circular con $a_n = \frac{V^2}{R}$

En A, V_A será mínima



, luego $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ en A



$F_b + mg = m a_c = m\frac{V_A^2}{R}$, Si $F_b = \frac{1}{4} mg \Rightarrow \frac{1}{4}\cancel{m}g + \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{V_A^2}{R} \Rightarrow$

$$\boxed{V_A = \sqrt{\frac{5}{4} gR}}$$

$\vec{F}_b$ no puede tener componente tangencial pues $\vec{P} \perp \vec{V}_A$ y $\vec{a}_t = 0$.

(b) V_B: No es evidente cuales son las fuerzas sobre la persona en general, pero sí sobre el conjunto vagoneta + persona, con masa M, pues no hay rozamiento entre la rampa y la vagoneta, por lo que la fuerza de la rampa es normal a la rampa, que coincide con la trayectoria y $dW_N = \vec{N}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{V}\,dt = \vec{N}\cdot\vec{V}\,dt \Rightarrow$

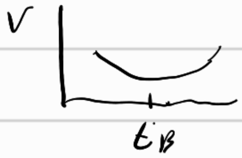
$dW_N = NV\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}\,dt = 0$. Como el peso $M\vec{g}$ es conservativo; $E = \frac{1}{2}MV^2 + Mgh$ se conserva, luego

$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}MV_A^2 + Mg2R = \frac{1}{2}MV_B^2$, tomando $h_B = 0$ y sustituyendo

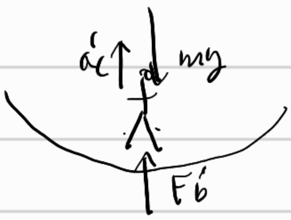
$\frac{1}{2}\cancel{M}\frac{5}{4}gR + \cancel{M}g2R = \frac{1}{2}\cancel{M}V_B^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{4} + \frac{16}{4}\right)gR = {}^2 \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{\frac{21}{4}gR}}$

Nota de $E = \frac{1}{2}MV^2 + Mgh = cte$, vemos que como en A, $h_A = 2R$ es máxima V es mínima.

Peso aparente en B, será la fuerza F'_b que hace la balanza imaginaria o la vagoneta sobre la persona. Por la ecuación anterior, en B, $h=0$ es mínima, por lo que $v=v_B$ será máxima



y $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, $\vec{a}_c$ es vertical, $\vec{P}$ también, luego $\vec{F}'_b$ también tiene que serlo, y viendo los sentidos

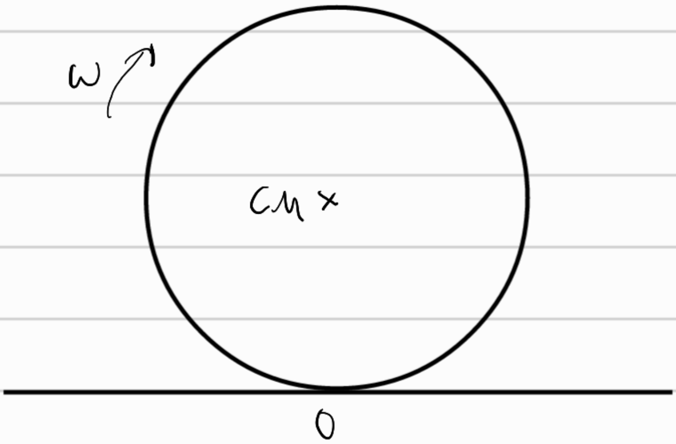


$$F'_b - mg = a'_c = m\frac{v_B^2}{R}$$, sustituyendo

$$F'_b = mg + \frac{m}{R}\frac{21}{4}gR$$ ⇒ El peso aparente F'_b es:

$$\boxed{F'_b = \frac{25}{4}mg = 6{,}25\,mg}$$, 6.25 veces su propio peso.

(3) (4 puntos) Una esfera de masa M y radio R se encuentra rodando sin deslizar sobre un plano horizontal con velocidad angular ω. (a) Obtener su energía cinética suponiendo que gira respecto al punto de contacto O. (b) Calcular la energía cinética orbital o de traslación y la energía cinética interna o de rotación. Se efectua una fuerza de módulo F sobre un eje que pasa por su centro de masas y que forma un ángulo β con la horizontal menor de 45° (esta fuerza no es capaz de levantar la bola). (c) Obtener la aceleración angular usando el teorema del momento angular respecto al punto de contacto O. (d) Obtener la aceleración angular usando el teorema del momento angular respecto del centro de masas. **Notas:** (c) y (d) se pueden expresar como que el centro de momentos es el punto O o el CM respectivamente. El momento de inercia de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro de masas es $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$.



(a) La energía cinética de rotación respecto a un eje fijo (y O, es en transitoriamente pues tiene velocidad cero en rodadura), es $E_C = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$. Calculamos $I_0 = I_{cm} + Md^2 = I_{cm} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 \Rightarrow I_0 = \frac{7}{5}MR^2$ y

$$E_{C,O} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \Rightarrow \boxed{E_{C,O} = \frac{7}{10} MR^2\omega^2}$$

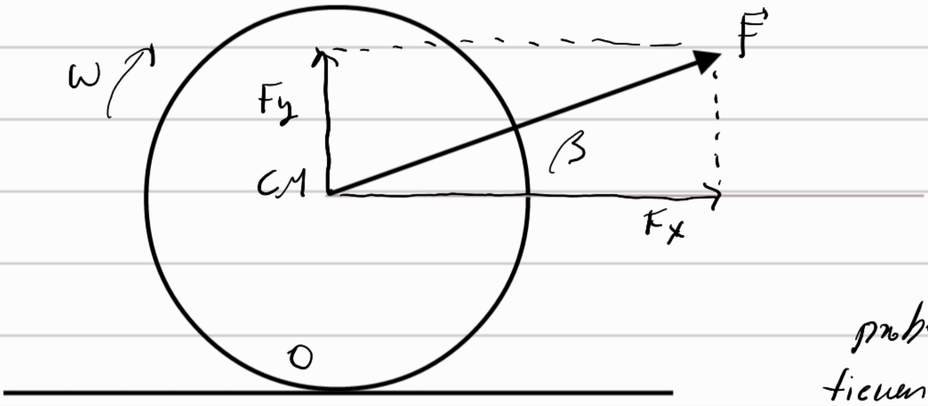
(b) La energía cinética de un sistema se puede descomponer en (CM: centro de masas)

$$E_C = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$$

, siendo $\frac{1}{2} M V_{CM}^2$, la energía cinética de traslación u orbital y $\sum_i \frac{1}{2} m v_i^{*2}$, la energía cinética relativa al CM, que para un sólido rígido es de rotación $\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$.
Por la condición de rodadura ($V_{CM} = \omega R$), $\frac{1}{2} M V_{CM}^2 = \frac{1}{2} MR^2\omega^2$ y
$\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega^2 \Rightarrow \boxed{E_{C,orbital} = \frac{1}{2}MR^2\omega^2}$ $\boxed{E_{C,interna} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2}$

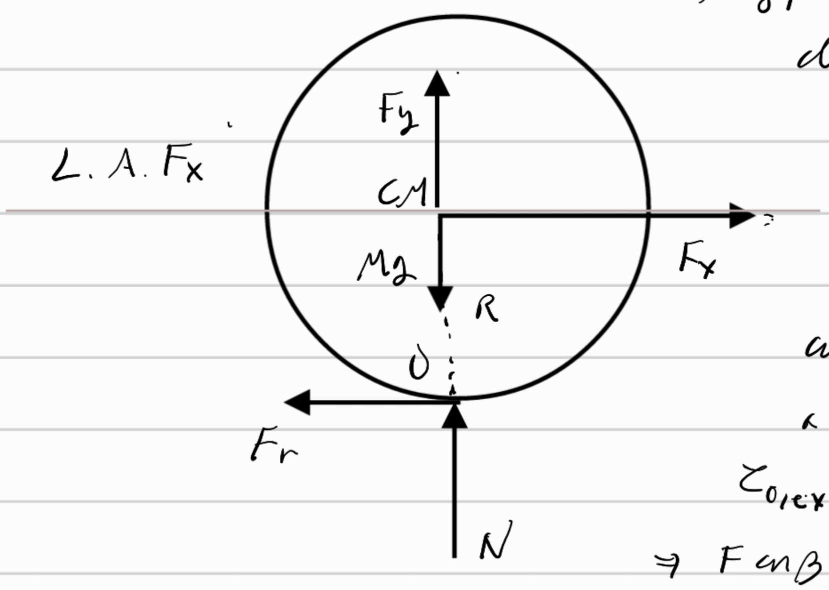
Vemos que $E_{C,orbital} + E_{C,interna} = \frac{7}{10}MR^2\omega^2$ igual a la energía calculada en (a), comprobando la descomposición de la Ec.

(c)



El teorema de momento angular respecto a un punto fijo es $\vec{\tau}_{O,ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$, en problemas planos, $\vec{L}_O$ y $\vec{\tau}_{O,ext}$ tienen la dirección ⊥ al plano y por lo tanto $\tau_{O,ext} = \frac{dL_O}{dt}$, con $L_O = I_O\omega \Rightarrow \tau_{O,ext} = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$

$\tau_{O,ext} = I_O\alpha$. Esta es la ecuación que aplicamos. Necesitamos calcular $\tau_O(F_i) = F_i d_i$ siendo d_i, la distancia de la línea de acción de F_i al centro de momentos ("O" en este apartado). Descomponemos $\vec{F}$ en $F_x\vec{i}$ y $F_y\vec{j}$, con $F_x = F\cos\beta$ y F_y sen β. El diagrama de fuerzas queda:



Mg, F_y y N tienen la misma línea de acción (vertical que pasa por O) con $d=0$, luego dan momentos nulos. F_r está aplicada en O, luego $d=0$ y su momento es nulo. Queda solo F_x, cuya línea de acción L.A. F_x está a distancia $d=R$ de O, luego:

$$\tau_{O,ext} = \tau_O(F_x) = F_x R = F\cos\beta R = I_O\alpha$$

$$\Rightarrow F\cos\beta R = \frac{7}{5}MR^2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{7}\frac{F\cos\beta}{MR}}$$

(d) Con respecto al CM: $\tau_{CM,ext} = I_{CM}\alpha$. Mg, F_x y F_y están aplicadas en CM, luego $d_i=0$ y $\tau_i = F_i d_i = 0$. La línea de acción de N, vertical que pasa por O, también pasa por CM, luego $d=0$ y $\tau_{CM}(N)=0$. Solo queda F_r y su línea de acción L.A. F_r, horizontal pasando por "O" está a $d=R$ de CM. Luego $\tau_{CM,ext} = \tau_{CM}(F_r) = F_r R$ y

(1) $F_r R = \frac{2}{5}MR^2\alpha$, pero no conocemos F_r. Usamos $\Sigma F_{ix} = Ma_{CMx}$

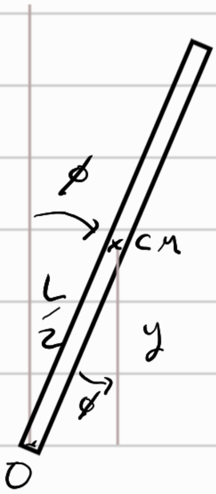
$\Rightarrow F_x - F_r = Ma_{CM} \rightarrow F\cos\beta - F_r = M\alpha R$ (2) ($a_{CM} = \alpha R$ en rodadura).

Sustituyendo F_r de (2) en (1): $(F\cos\beta - M\alpha R)R = \frac{2}{5}MR^2\alpha \Rightarrow$

$$F\cos\beta R = \underbrace{\left(\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right)}_{"I_O = \frac{7}{5}MR^2}\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{7}\frac{F\cos\beta}{MR}}$$

Como es lógico, sale el mismo resultado

(4) (4 puntos) Una barra delgada de masa M y longitud L puede girar en torno a un eje de giro que pasa por su extremo. Inicialmente está en reposo verticalmente, por encima del eje. Se separa ligeramente de su posición de equilibrio de forma que comienza a girar sobre el eje. (a) Calcular la velocidad angular ω y la aceleración angular α cuando la barra pasa por la horizontal. (b) Igualmente calcular la aceleración (vector) $\vec{a}_{CM}$ de su centro de masas. (c) Calcular la aceleración angular α para un ángulo ϕ con respecto a la posición inicial. (d) Calcular la velocidad angular ω para el mismo ángulo ϕ. **Dato:** El momento de inercia de una barra respecto a su centro de masas $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



(a) Como en el eje de giro no hay rozamiento, se conserva la energía mecánica $E = E_c + U$, siendo $E_c = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, la energía de rotación respecto del punto fijo O, y $U = Mgy$, la energía potencial, con y la altura del centro de masas, tomando como referencia de alturas el punto O.

Calculamos $I_O = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)ML^2$

$\Rightarrow I_O = \left(\frac{1+3}{12}\right)ML^2 \Rightarrow \underline{I_O = \frac{1}{3}ML^2}$ y $E_c = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega^2 \Rightarrow \overline{E_c = \frac{1}{6}ML^2\omega^2}$

y, vemos en el dibujo que es $y = \frac{L}{2}\cos\phi$, siendo $\overline{y_0 = \frac{L}{2}\cos 0 = \frac{L}{2}}$

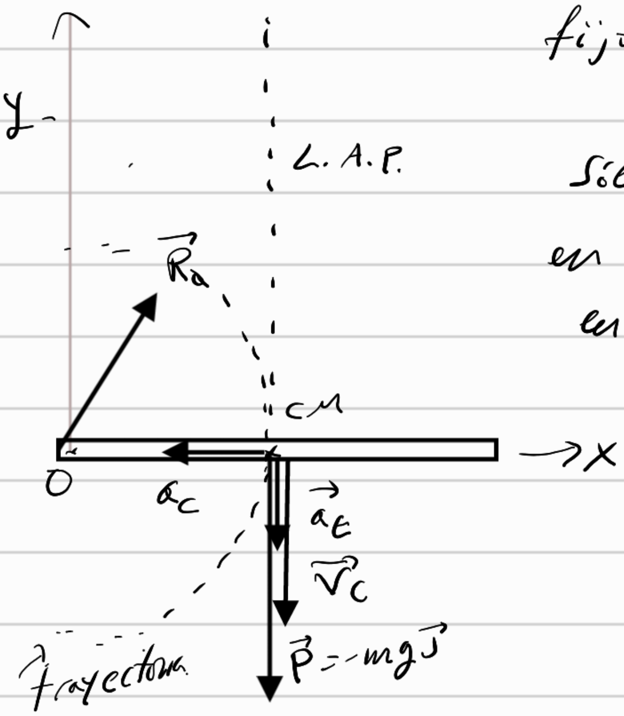
y para $\phi = 90°$, $y_1 = \frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$, luego $E_0 = E_1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{6}ML^2\underbrace{\omega_0^2}_{0} + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega_1^2 + Mg\underbrace{y_1}_{0} \Rightarrow g\frac{L}{2} = \frac{1}{6}L\omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{3\frac{g}{L}}}$$

Para calcular α, usamos el teorema del momento angular respecto a un punto fijo, que en problemas planos se reduce a:

$$\tau_{O,ext} = I_O \alpha \quad (1)$$



Sólo actúan las fuerzas exteriores $\vec{R}_O$, en el eje de giro y el peso $\vec{P}$ aplicado en el centro de masas CM.

$\tau_{O,ext} = \sum_i \tau_O(\vec{F}_i)$, siendo el momento $\tau_O(\vec{F}_i) = F_i d_i$, con d_i la distancia de la línea de acción de $\vec{F}_i$ al punto O. La fuerza $\vec{R}_O$ da momento nulo pues está aplicada en O y $d_i = 0$. La línea de acción del peso L.A.P. vemos que está a distancia $d_i = \frac{L}{2}$ de O, luego

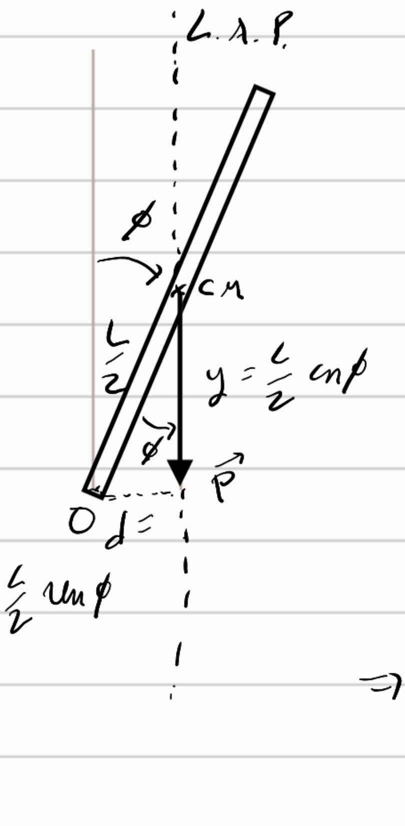
$\tau_0(\vec P) = Mg\frac{L}{2}$ y $\tau_{0,ext} = Mg\frac{L}{2}$, usando (1) $\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}=\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}}$$

(b) El CM realiza una trayectoria circular de radio $R=\frac{L}{2}$, por lo que tendrá en la posición "1", una aceleración normal o centrípeta $a_n = a_c = \omega_1^2 R = \left(\sqrt{\frac{3g}{L}}\right)^2\frac{L}{2} = 3\frac{g}{L}\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow a_c = \frac{3}{2}g$ y como va hacia la izda $\vec n = -\vec\imath$ y $\vec a_n = a_n\vec n = -\frac{3}{2} g\vec\imath$. La $\vec a_t$ irá dirigida perpendicular al radio y hacia abajo. Como $\vec a_t \uparrow\uparrow \vec v_c \Rightarrow$ $a_t>0$ y $a_t = +\alpha R = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\frac{L}{2} = \frac{3}{4} g$ $\vec a_t = a_t\vec\tau$, siendo $\vec\tau = -\vec\jmath \Rightarrow$

$$\vec a_t = -\frac{3}{4} g\vec\jmath \quad \text{y} \quad \vec a_{CM} = a_t\vec\tau + a_n\vec n \Rightarrow \boxed{\vec a_{CM} = -\frac{3}{2} g\vec\imath - \frac{3}{4} g\vec\jmath}$$

(c) Usamos de nuevo $\tau_{0,ext} = I_0\alpha$ para un ángulo ϕ cualquiera, el único cambio es que la distancia a O de la línea de acción del peso es $d=\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\phi$ y $\tau_0(\vec P) = Pd \Rightarrow$



$$\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\phi}$$

(d) El cambio ahora es que para ϕ cualquiera $y_{CM} = y = \frac{L}{2}\cos\phi \Rightarrow$

$$E(0)=E(\phi) \Rightarrow \frac{1}{2} I_0\underbrace{\omega_0^2}_{0} + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_0\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\phi$$

$$\Rightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}(1-\cos\phi) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\right)\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\phi)}}$$