Boletín 1A

Boletín 1A. Grado en Ingeniería de la Salud. Física I.

Cinemática de la partícula en una dimensión

1. En las pruebas realizadas en 2014 por una revista de motociclismo con la moto Kawasaki ZZR1400 ABS, se mide la velocidad máxima (298 km/h), y, más importante para los posibles compradores, el tiempo y la distancia recorrida para llegar a una cierta velocidad. Se obtienen los siguientes datos: (**a**) 0-100 km/h; 3.0 s; x_a (**b**) 0-150 km/h; 4.8 s; x_b (**c**) 0-400 m; 10.4 s; v_c (**d**) 0-1000 m; 24.8 s; v_d. Calcular las aceleraciones a_x en cada caso en km/(h s) y en m/s^2. Obtener los datos que faltan, x_a, x_b, v_c y v_d. ¿Por qué no se usa para medir la aceleración simplemente las unidades m/s^2 o km/h^2?

Se trata de un movimiento uniformemente acelerado, partiendo de $x=0$, $v=0$ en $t=0$. Luego $v=v_0+at$ y $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ se convierten en $v=at$ (1); $x=\frac{1}{2}at^2$ (2) y despejando $t=\frac{v}{a}$ y sustituyendo en (2): $x=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$ (3)

(a) $v=100\,\frac{km}{h}$, $t=3\,s$, x_a : De (1) $a=\frac{v}{t}=\frac{100\,km/h}{3\,s} \Rightarrow \boxed{a=33.3\,\frac{km}{hs}=9.25\,\frac{m}{s^2}}$

Hemos cambiado de unidades: $a=33\,\frac{km}{hs}\left(\frac{10^3\,m}{1\,km}\right)\left(\frac{1\,h}{3.6\times10^3\,s}\right)=33.3\,\frac{km}{hs}\left(\frac{1\,m/s}{3.6\,km/h}\right)=9.25\,\frac{m}{s^2}$

$x_a=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\,9.25\,\frac{m}{s^2}(3\,s)^2 \Rightarrow \boxed{x_a=42{,}8\,m}$

(b) $v=150\,\frac{km}{h}\left(\frac{1\,m/s}{3.6\,km/h}\right)=41.7\,m/s$, $t=4.8\,s$. Iguales datos que en (a)

$a=\frac{v}{t}=\frac{150\,km/h}{4.8\,s} \Rightarrow \boxed{a_b=31.25\,\frac{km}{hs}=8.68\,m/s}$

$x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\,8.68\,\frac{m}{s}(4.8\,s)^2 \Rightarrow \boxed{x_b=100\,m}$

(c) $x=400\,m$, $t=10.4\,s$. Usando (2) $a=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\times400\,m}{(10.4\,s)^2} \Rightarrow \boxed{a_c=7.40\,\frac{m}{s}=26.6\,\frac{km}{hs}}$

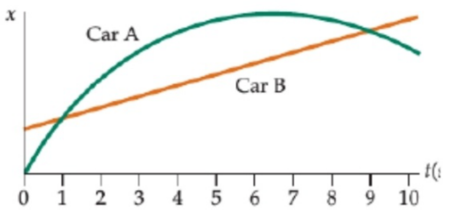
$v_c=at=7.40\,\frac{m}{s^2}\times10.4\,s \Rightarrow \boxed{v_c=80{,}0\,\frac{m}{s}=277\,\frac{km}{h}}$

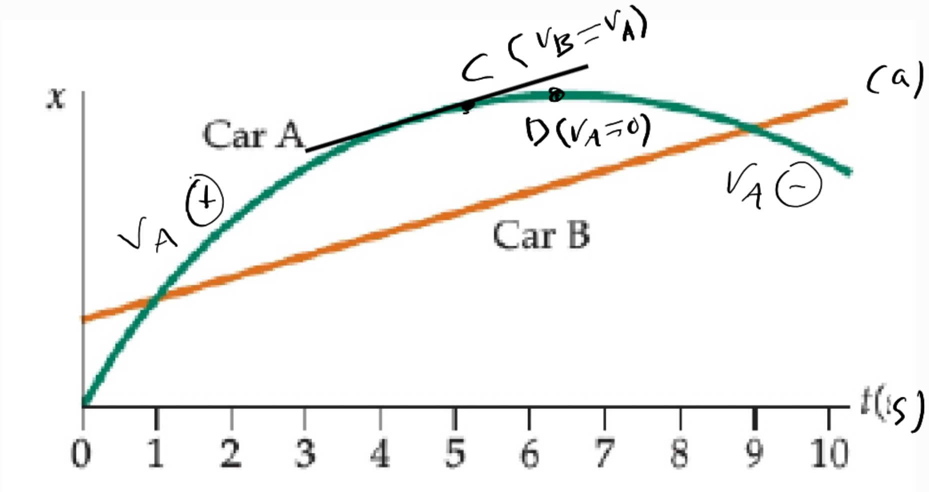
(d) $x=1000\,m$, $t=24.8\,s$. Igual que (c) $a=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\times1000\,m}{(24.8\,s)^2} \Rightarrow$

$\boxed{a_d=3{,}25\,\frac{m}{s}=11.7\,\frac{km}{hs}}$

$v_d=at=3{,}25\,\frac{m}{s}\times24.8\,s \Rightarrow \boxed{v_d=80.6\,\frac{m}{s}=290\,\frac{km}{h}}$

2. Las posiciones de dos coches en carriles paralelos de una autopista recta se muestran en la figura como funciones del tiempo. Responda de forma cualitativa a las siguientes preguntas: **(a)**: ¿Están en algún momento los dos coches lado a lado? Si es así, indique en qué momento(s). **(b)**: ¿Viajan los coches siempre en la misma dirección? Si no es así, indique en qué intervalo ocurriría esto. **(c)**: ¿Viajan los coches en algún momento a la misma velocidad? Si es así, indique el momento. **(d)**: ¿En qué instante están los coches más separados? **(e)**: Dibuje una curva aproximada de la velocidad respecto al tiempo para cada coche.





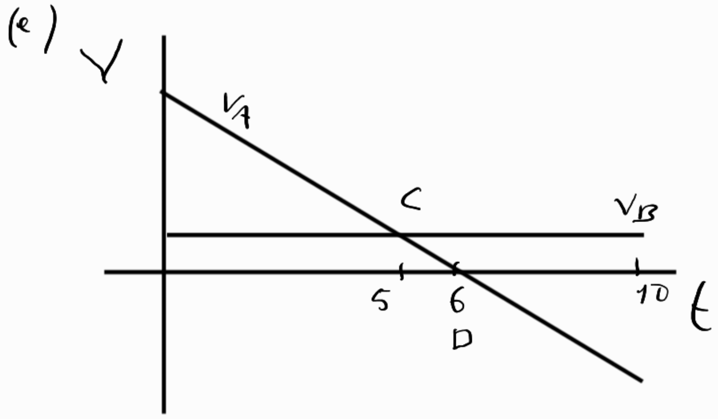
(a) Están al lado cuando $x_A = x_B$ en el mismo instante, luego dos veces para $t=1$ y $t=9$.

(b) La dirección, o más correctamente, el sentido, viene dado por el signo de la pendiente, para B, como es una línea recta v_B es constante y siempre positiva. Pero A cambia de pendiente en D, positiva de $t=0$ a $t=6$ y negativa de $t=6$ a $t=10$. Luego viajan en mismo sentido de $t=0$ a $t=6$ y contrario de $t=6$ a $t=10$.

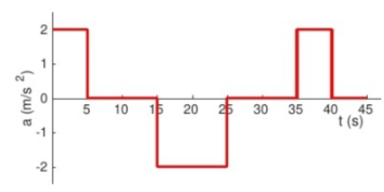
(c) Cuando las curvas tienen la misma pendiente $v_A = \frac{dx_A}{dt} = v_B = \frac{dx_B}{dt} \Rightarrow$ Tienen la misma velocidad aproximadamente en $t=5s$.

(d) Cuando $|x_A - x_B|$ es máximo. Esto puede suceder cuando $x_A - x_B$ sea máximo o mínimo. Matemáticamente $x_A - x_B$ tiene un extremo, luego $\frac{d(x_A - x_B)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} = 0$, o bien $v_A = v_B$, o bien al principio o final del intervalo. Entonces para $t=0$, $t=5$, $t=10$. Vemos que sucede en $t=5$.

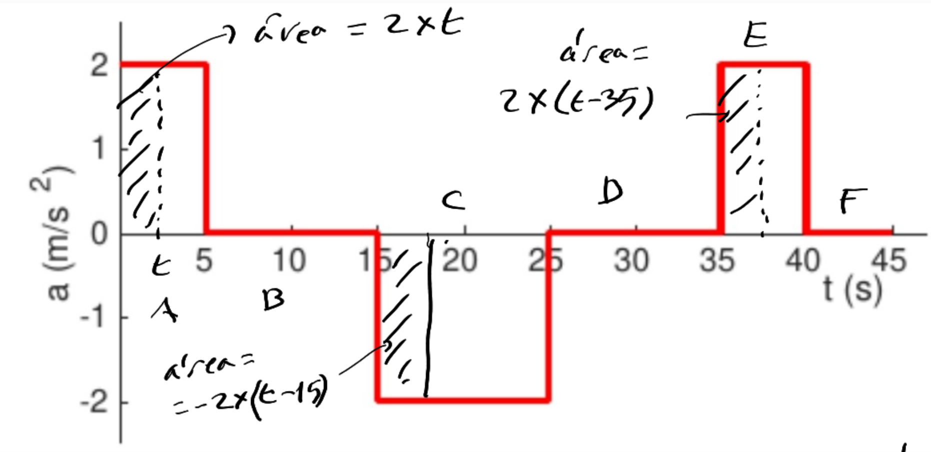
(e)



No sabemos si v es una recta pero cualitativamente tendrá la forma dibujada, cruzando v_B en $t=5$ ($v_A = v_B$) y cambiando de signo en $t=6$.



3. En la figura se muestra (línea más gruesa en rojo) la aceleración de un tren de juguete que se mueve en una dirección (eje x). Sabiendo que en $t=0$ su velocidad es $v=0$ y su posición es $x=0$, dibujar la gráfica de su velocidad $v(t)$ en función del tiempo desde $t=0$ s hasta $t=45$ s, y calcular la posición final de la partícula (cuando $t=45$ s)



Como $a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt$

$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt$, con $v_0=0$

$\Rightarrow [v]_0^v = \int_0^t a\,dt \Rightarrow$

$v=\int_0^t a\,dt$, es decir el área bajo la curva $a(t)$

Hay varios intervalos, pero por la forma tan sencilla, las áreas son todas base×altura.

(A) $t=0$ a $t=5$ $\quad v=2t$, varía de $v=0$ a $v=10$ m/s.

(B) $a=0$, no aumenta el área ni v: $v=10$ m/s entre $t=10$ y $t=15$.

(C) Hay que restar un área $2(t-15)$. $v=10-2(t-15)$ entre $v(15)=10$ y $v(25)=-10$

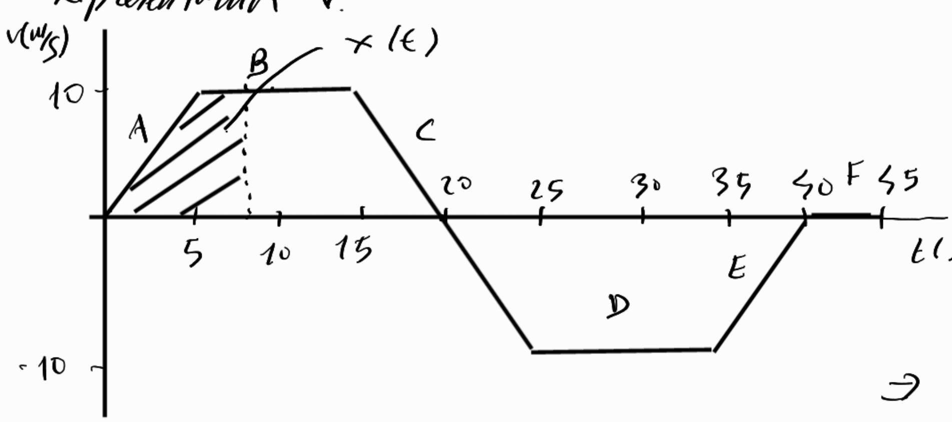
(D) $a=0$, el área no aumenta (ni por lo tanto v). $v=-10$ entre $t=25$ y $t=35$.

(E) $a=2$, v aumenta en $2(t-35)$ donde $v(t)=-10+2(t-35)$ entre $v(35)=-10$ y $v(40)=0$

(F) $a=0$, v no varía, $v=0$ de $t=40$ a $t=45$.

Equivale a la fórmula de MUA para cada tramo $v=v_0+a(t-t_0)$

Representamos v.



Posición final. Ver abajo *

Comentario

$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow$

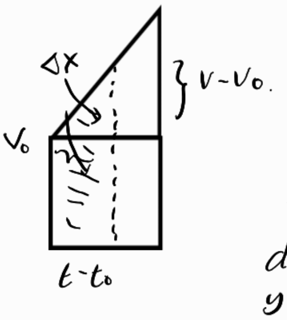
$\int_{x_0=0}^{x} dx = \int_0^t v\,dt \Rightarrow x-0=\int_0^t v\,dt$

$\Rightarrow x=\int_0^t v\,dt$, es decir el área bajo la curva $v(t)$. Hay dos tipos de áreas. Triángulos $\frac{1}{2}$ base×altura (A, C) rectángulo base×altura (B, D) o nula en F. O combinaciones de ambos.

Combinación:

$\Delta x = (t-t_0)v_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)(v-v_0)$, pero para cada tramo $v-v_0=at$

$\Rightarrow \Delta x = v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2$ fórmula de MUA. Si $a=0$ $\Delta x = v_0(t-t_0)$



(*) Sin hacer cuentas vemos que las áreas positivas igualan a las negativas: Dos triángulos de base 5 y altura 10, positivos (t: 0-5 y t=15-20) dos negativos (t: 20-25 y t: 35-45). Un rectángulo positivo (t: 5-20) y otro negativo (t: 25-35) e igual altura: $\Rightarrow x=0+\Delta x \Rightarrow \boxed{x=0}$

4. La posición x (en m) de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta viene dada por $x(t) = 16 - 12t + 2t^2$, donde el tiempo está en segundos. (**a**) Representar gráficamente (a mano) la posición como función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 6$. (**b**) Representar gráficamente (a mano) la velocidad como función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 6$. (**c**) Representar gráficamente (a mano) la aceleración como función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 6$. (**d**) ¿Cuánto vale la velocidad en $t = 0$ s, $t = +2$ s y $t = +4$ s? (**e**) Cuando la velocidad es 0, ¿dónde se encuentra el objeto? (**f**) ¿Cuánto vale la velocidad promedio entre $t = -1$ s y $t = 3$s? (**g**) ¿Cuánto vale la velocidad promedio entre $t = 0$ s y $t = 6$ s? (**h**) ¿Cuánto vale el módulo de la velocidad promedio entre $t = 0$ s y $t = 6$ s? (**i**) ¿En qué instante cambia de sentido el movimiento del objeto? **Nota:** No olvidar nunca, incluso en las representaciones gráficas, indicar las unidades de cada magnitud.

$x(t) = 16 - 12t + 2t^2$ x en cm, t en s. Calculamos v y a

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{v = -12 + 4t \ \text{cm/s}}$ $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a = 4 \ \text{m/s}}$

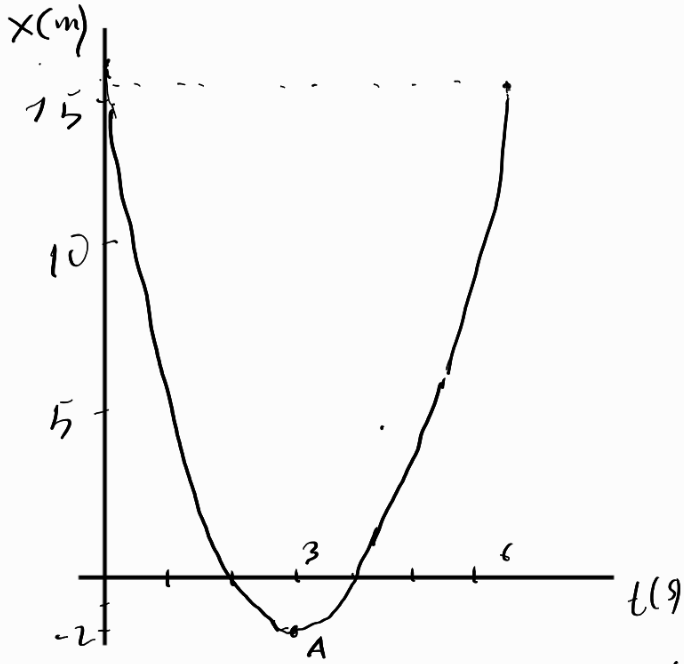
(a) Hacemos una tabla.

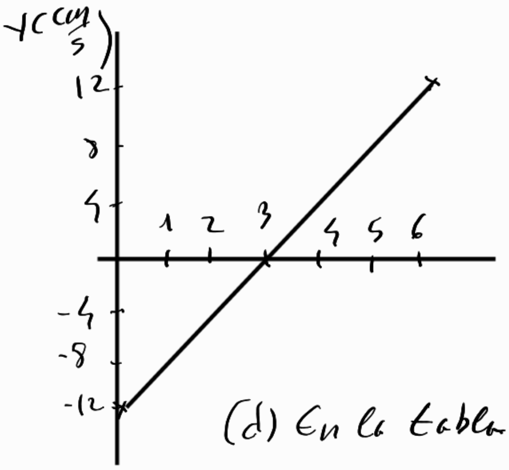
t (s)	x (m)	v (m/s)
0	16	-12
1	6	-8
2	0	-4
3	-2	0
4	0	4
5	6	8
6	16	12

Dibujamos la gráfica $x = x(t)$. Calculamos también cuando es $x = 0$.

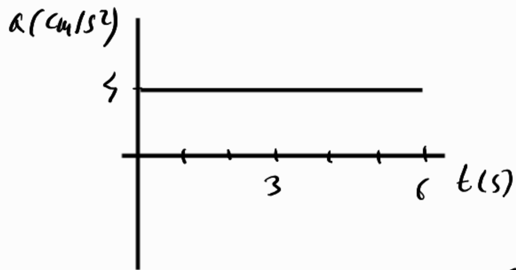
$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 2 \times 16}}{2 \times 2}$

$t = 2$ y $t = 4$.





Sabemos que v es una recta. En realidad nos bastan dos puntos. a es una cte



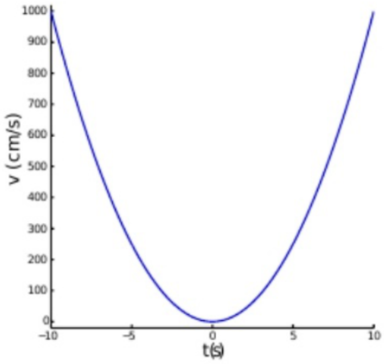
(d) En la tabla (e) En $x = -2$, para $t = 3$. El punto A con tangente horizontal

(f) $v_m = \frac{x(3) - x(-1)}{(3 - (-1))\,s}$; $x(-1) = 16 - 12(-1) + 2(-1)^2 = 30 \Rightarrow v_m = \frac{-2 - 30}{4} \Rightarrow \boxed{v_m = -8 \ \text{m/s}}$

(g) $v'_m = \frac{x(6) - x(0)}{6 - 0} = \frac{16 - 16}{6} = 0$; $\boxed{v'_m = 0}$

(i) Cuando v cambia de signo, en $\boxed{t = 3\,s}$. También cuando x deja de disminuir y comienza a aumentar.

(h) Promedio de $c = |v|$. Tomamos todos los desplazamientos como positivos, 18 de $t = 0$ a $t = 3$ y 18 de $t = 3$ a $t = 6$. $c_m = \frac{18 + 18}{6} \Rightarrow \boxed{c_m = 6 \ \text{m/s}}$ Es lo que usamos al conducir.



5. Una partícula se mueve en línea recta de forma que en $t = 3\,$s pasa por el origen. Midiendo su velocidad v respecto al tiempo t , se obtiene la parábola que se muestra (en $t = 0$ la velocidad es nula, en $t = -10\,$s es $1000\,$cm/s, y en $t = 10\,$s vuelve a ser $1000\,$cm/s). Calcular la aceleración y la posición de la partícula como función del tiempo.

En resumen

t (s)	x (cm)
3	0

t (s)	v (cm/s)
-10	1000
0	0
10	1000

Nos dicen que es una parábola:

$$V = At^2 + Bt + C$$

Para $t = 0, V = 0$ $\quad 0 = A0^2 + B0 + C \Rightarrow C = 0$

Para $t = -10$; $V = 1000$ $\quad 1000 = A(-10)^2 + B(-10)$

Para $t = 10$; $V = 1000$ $\quad 1000 = A10^2 + B(10)$

Restando estas dos ecuaciones $0 = -2B10 \Rightarrow B = 0$

De la primera: $1000 = A(-10)^2 = A100 \Rightarrow A = 10\frac{cm}{s^3}$ (para que al multiplicar por t^2 en s^2, de $\frac{cm}{s}$)

Luego $V = 10\frac{cm}{s^3}t^2$. Como $a = \frac{dy}{dt} \Rightarrow$ $\boxed{a = 10\frac{cm}{s^3}t}$ Vemos que la aceleración no es constante.

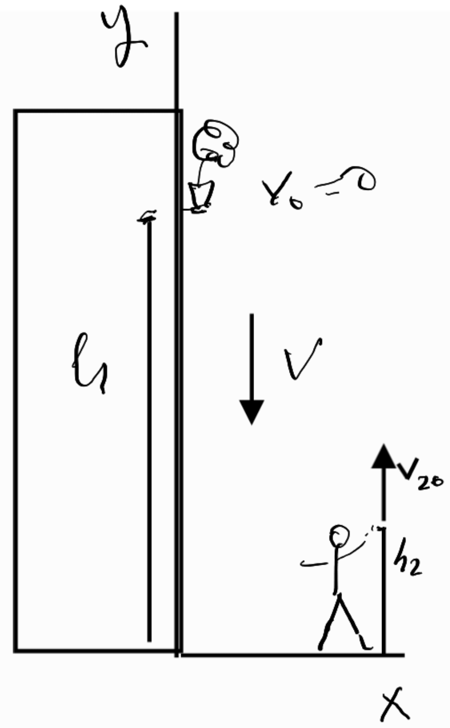
Para calcular x, usamos que $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V\,dt \Rightarrow$

$[x]_{x_0}^{x} = \int_{t_0}^{t} At^2\,dt$ Usamos que para $t_0 = 3, x_0 = 0 \Rightarrow$

$x - 0 = \left[\frac{1}{3}At^3\right]_3^t = \frac{1}{3}At^3 - \frac{1}{3}A3^3$, sustituyendo $x = \frac{1}{3}10t^3 - \frac{1}{3}10\times 3^3 \Rightarrow$

$$\boxed{x = -90\,cm + \frac{10}{3}\frac{cm}{s^3}t^3}$$

6. Calcular la velocidad con que llega al suelo una maceta que cae accidentalmente desde una ventana de un septimo piso, que está a una altura $h = 24\,\mathrm{m}$. Calcular el tiempo que tarda en caer. Un indignado paseante, lanza una piedra verticalmente con una velocidad $v_2 = 10.5\,\mathrm{m/s}$ desde su mano a $2.0\,\mathrm{m}$ de altura. ¿Alcanza a la ventana? ¿Qué velocidad tendría qué dar a la piedra para alcanzar la ventana? Dato: g=9.8 m/s^2.



Maceta: $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, $v_0 = 0$, $y_0 = h$

$y_{final} = 0 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$

$t = \sqrt{\frac{2 \times 24\,m}{9.8\,m/s^2}} \Rightarrow \boxed{t = 2.28\,s}$

No lo piden, pero $v_f = \underbrace{v_{0y}}_{0} - g t = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_f = -\sqrt{2gh} = 21.7\,m/s$

Piedra: $y_2 = \underbrace{y}_{h_2} + \underbrace{v_0}_{v_{20}} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$; $y_2 = h_2 + v_{20} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$

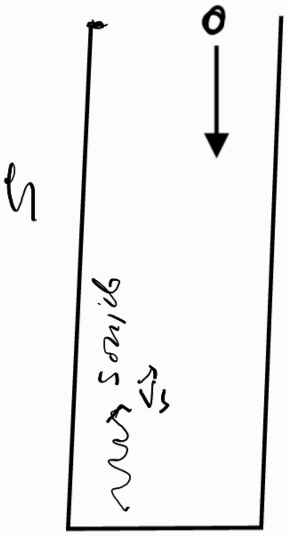
t_2 es otro t. Para calcularlo usamos que $v_{2f} = 0$ cuando alcanza la altura máxima $v_2 = v_{20} - g t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{v_{20}}{g}$

$\Rightarrow y_2 = h_2 + v_{20} \frac{v_{20}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{20}^2}{g^2} = h_2 + \frac{1}{2} \frac{v_{20}^2}{g}$ (3)

Sustituyendo $y_2 = 2m + \frac{1}{2} \frac{(10.5\,m/s)^2}{9.8\,m/s^2} \Rightarrow \boxed{y_2 = 7.6\,m}$ queda muy lejos de la ventana con la maceta.

(c) ¿Velocidad para alcanzar la ventana? Usamos la ecuación (2) con $y_2 = h$ y v_{20} la incógnita $h = h_2 + \frac{1}{2} \frac{v_{20}'^2}{g} \Rightarrow v_{20}' = \sqrt{2g(h - h_2)} = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} (24-2)m} \Rightarrow \boxed{v_{20}' = 20.8\,m/s}$

7. Desde que se deja caer una piedra en un pozo hasta que se oye el sonido del choque con el agua trancurren 2 s. Calcula la profundidad del pozo sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s. Despreciar los efectos de rozamiento y suponer que la piedra cae con una aceleración de $g = 10$ m/s^2.



$t = 2s$, $t = t_1 + t_2$ [1]

t_2: tiempo que tarda el sonido en llegar arriba

$t_2 = \frac{h}{v_s}$, con $v_s = 340\,m/s$

t_1: tiempo que tarda la piedra en caer:

$\underset{0}{y} = h + \underset{0}{v_0} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ De (1)

$2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s} \Rightarrow \frac{1}{v_s}(\sqrt{h})^2 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h} - 2 = 0$

Tenemos una ecuación de segundo grado en $\sqrt{h}$, la ordenamos un poco

$(\sqrt{h})^2 + \sqrt{\frac{2v_s^2}{g}}\,\sqrt{h} - 2v_s = 0 \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{h} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2v_s^2}{g}} \pm \sqrt{\frac{2v_s^2}{g} + 8v_s}\right]$ El ⊖ daría $\sqrt{h}$ negativo, tomamos ⊕ y sustituimos.

$\sqrt{h} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2\times 340^2}{10}} + \sqrt{\frac{2\times 340^2}{10} + 8\times 340}\right] = 4,3065\ m^{1/2} \Rightarrow$

$\boxed{h = 18.55\,m}$ Podemos calcular t_1 y t_2.

$t_2 = \frac{h}{v_s} = \frac{18.55\,m}{340\,m/s} \Rightarrow t_2 = 0.0545\,s$.

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 18.55}{10}} \Rightarrow t_1 = 1.945\,s$ y comprobamos que $t_1 + t_2 = 2\,s$

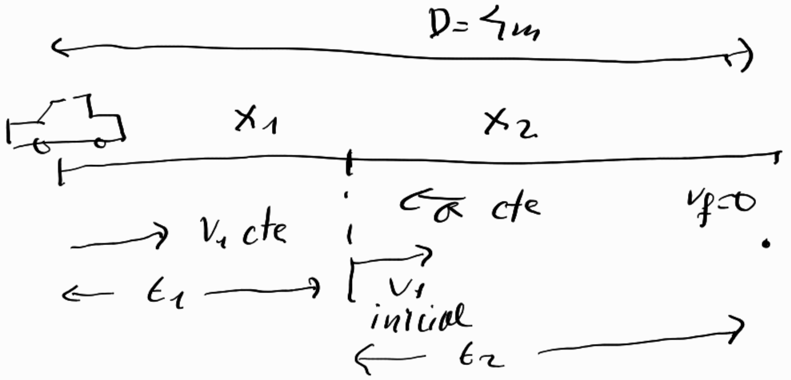
t_2 parece pequeño, pero $h = \frac{1}{2} 10\, 2^2 = 20\,m$, un error de $\approx 1.5\,m$ que es significativo.

8. Un automóvil tiene una desaceleración típica de unos 7 m/s^2, y el tiempo de reacción típico de un conductor es de 0.5 s. Si en una zona escolar debemos circular a una velocidad tal que podamos detenernos en menos de 4 m, (**a**) ¿A qué velocidad máxima podremos circular? (**b**) ¿Qué fracción de los 4 m corresponden al tiempo de reacción?

Sea $a = 7 m/s$, $t_1 = 0.5 s$, $D = 4 m$

(a) Hay dos movimientos, uno a velocidad constante V_1, durante un tiempo. El auto recorre:

$x_1 = V_1 t_1$.



El otro uniformemente decelerado, con velocidad inicial V_1, final 0, durante un tiempo t_2

$x_2 = V_1 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2$

Como $x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow V_1 t_1 + V_1 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2 = 4$ (1)

Además $\underset{0}{V_f} = V_1 - a t_2 \Rightarrow 0 = V_1 - a t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{V_1}{a}$, sustituimos en (1)

$$V_1 t_1 + V_1 \frac{V_1}{a} - \frac{1}{2} a \frac{V_1^2}{a^2} = 4 \Rightarrow V_1 t_1 + \frac{V_1^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{a} = 4 \Rightarrow V_1 t_1 + \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{a} = 4.$$

Ordenando un poco $V_1^2 + 2aV_1 t_1 - 8a = 0$. Es una ecuación de segundo grado.

$V_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, $B = 2at_1 = 2 \times 7 \times 0.5 = 7$; $4AC = 4 \times 1 \times (-8a) = -4 \times 8 \times 7 = -392$

Luego: $V_1 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 392}}{2}$, tomamos el signo $\oplus$, pues el $\ominus$ daría $V_1 < 0$

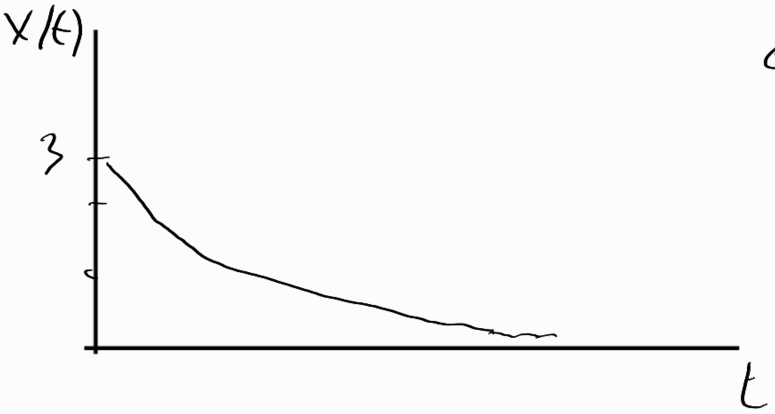
$\Rightarrow V_1 = 4.76 \frac{m}{s}\left(\frac{3.6 \, Km/h}{1 \, m/s}\right) = 17.1 \frac{Km}{h} \Rightarrow \boxed{V_1 = 4.76 \frac{m}{s} = 17.1 \frac{Km}{h}}$

(b) Fracción $f = \frac{x_1}{D}$; $x_1 = V_1 t_1 = 4.76 \frac{m}{s} \, 0.5 s \Rightarrow x_1 = 2.38 m \Rightarrow$

$f = \frac{2.38}{4} \Rightarrow \boxed{f = 0.595 = 59.5\%}$

9. La posición de una partícula viene dada par la expresión $x(t) = 3e^{-2t}$ m (tiempo en segundos). Calcular su velocidad y aceleración en función del tiempo. ¿Cuánto vale la velocidad inicial ($t = 0$)?, ¿y la final ($t \to \infty$)?, ¿y la aceleración inicial ($t = 0$)?, ¿y la final ($t \to \infty$)?, ¿en qué unidades está el factor 2 del exponente?

$$x(t) = 3e^{-2t}, \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 3(-2e^{-2t}) \Rightarrow \boxed{v(t) = -6e^{-2t}\ m/s}$$



Es coherente, pues vemos en el esquema que v(t) es negativa con pendiente que disminuye en módulo.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -6(-2e^{-2t}) \Rightarrow$$

$$\boxed{a(t) = 12e^{-2t}\ m/s^2}$$

$$v(0) = -6e^{-2\times 0} = -6\cdot 1 \Rightarrow \boxed{v(0) = -6\ m/s}$$

Si $t \to \infty$ $e^{-2t} \to 0 \Rightarrow$

$$\boxed{v(\infty) = 0}$$

$$a(0) = 12e^{-2\cdot 0} = 12\times 1 \Rightarrow \boxed{a(0) = 12\ m/s^2}$$

$$a(\infty) = 12e^{-2\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{a(\infty) = 0}$$

El exponente no puede tener unidades, por lo que 2 debe estar en s^{-1} para que al multiplicar por t en s, se anulen las dimensiones y unidades.

10. Una partícula se mueve en la dirección x con una aceleración que varía con el tiempo de la forma $a = -45\cos(3t)$ m/s^2 (tiempo en segundos y ángulos en radianes). Si en el instante inicial ($t = 0$) la velocidad es nula y la partícula se encuentra en $x = 5$ m, calcular su velocidad y posición en función del tiempo. ¿Qué unidades tiene el factor 3 que aparece junto al tiempo en la función trigonométrica?

$a = -45\cos(3t)\ \text{m/s}^2$ (t en s), $v(0) = 0$, $x(0) = 5\,\text{m}$

$a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t a\,dt \Rightarrow v - 0 = \int_0^t -45\cos 3t\,dt \Rightarrow$

$v = \left[-\dfrac{45}{3}\,\text{sen}(3t)\right]_0^t = -15\,\text{sen}\,3t - (-15\,\underbrace{\text{sen}(3\times 0)}_{0}) \Rightarrow$

$\boxed{v = -15\,\text{sen}(3t)\ \text{m/s}}$

Análogamente $v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt$ y

$\int_5^x dx = \int_0^t v\,dt \Rightarrow x - 5 = \int_0^t -15\,\text{sen}(3t)\,dt = \left[+\dfrac{15}{3}\cos(3t)\right]_0^t \Rightarrow$

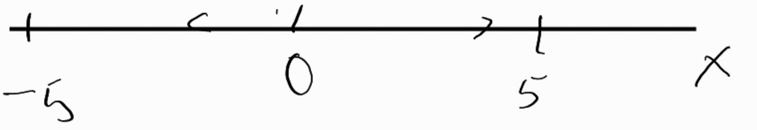
$\cancel{x - 5} = (5\cos 3t) - (5\underbrace{\cos(3\times 0)}_{1}) = 5\cos 3t\ \cancel{-5} \Rightarrow$

$\boxed{x = 5\cos(3t)\ \text{m}}$

Unidades: $3t$ debe estar en radianes, luego 3 rad/s para que al multiplicar por t quede en radianes

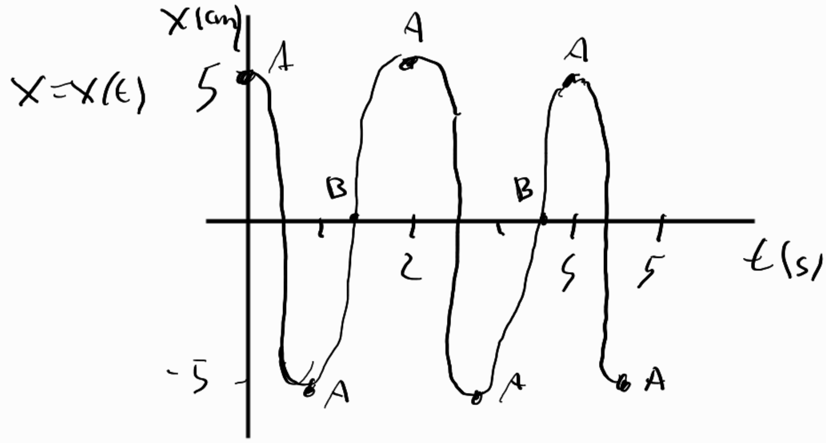
11. Un objeto unido a un muelle se mueve a lo largo de una línea recta oscilando alrededor de $x = 0$, y su posición en un instante t viene dada por la ecuación $x(t) = 5\cos(\pi t)$ cm (t en s y ángulos en radianes). (**a**) Si el tiempo se mide en segundos y los ángulos en radianes, ¿qué unidades tiene, en este caso, el factor π? (**Nota:** esto no implica que, en otro contexto, el factor π no pueda tener otras dimensiones). (**b**) Representar gráficamente, desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s, su posición en función del tiempo. (**c**) Determinar la amplitud de las oscilaciones. (**d**) ¿Cuánto tiempo tarda en realizar una oscilación completa? ¿Cuantas veces oscila en un segundo? (**e**) Determinar su velocidad instantánea y representarla gráficamente en función del tiempo, desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s . (**f**) ¿En qué puntos y en qué instantes la velocidad es nula? En esos puntos, ¿cambia de sentido el movimiento del objeto? (**g**) ¿En qué puntos e instantes la velocidad es máxima?, ¿cuánto vale esa velocidad? (**h**) Determinar su aceleración instantánea y representarla gráficamente en función del tiempo, desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s . (**i**) ¿En qué puntos y en qué instantes esta aceleración es nula? En esos puntos, ¿cambia de sentido el movimiento del objeto? (**j**) ¿En qué puntos e instantes es máxima?, ¿cuánto vale esa aceleración máxima?

$x(t) = 5\cos(\pi t)$ cm (t en s)



(a) $\pi = \pi$ rad/s

(b)



$x(0) = 5\cos(0) = 5$

$x(1s) = 5\cos(\pi) = -5$

$x(2s) = 5\cos(2\pi) = 5$

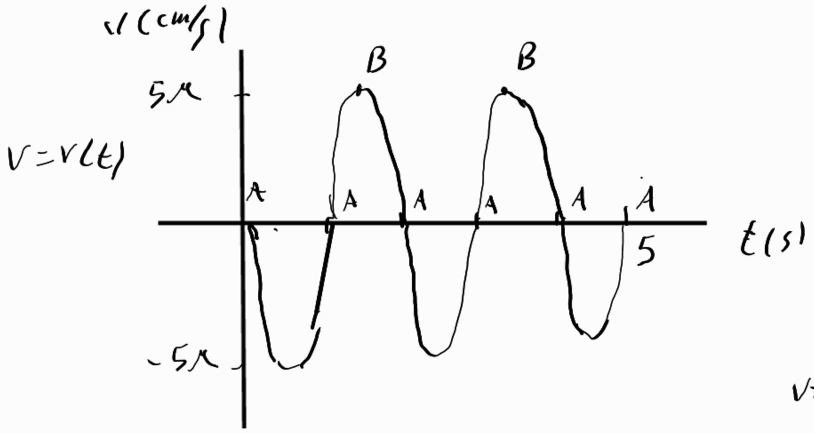
$x(3s) = 5\cos(3\pi) = -5$

(c) $|x| = 5|\cos(\pi t)|$. Como $|\cos(\pi t)| \leq 1 \Rightarrow |x|_{máx} = 5 \Rightarrow \boxed{A = 5\text{ cm}}$

(d) Esto es el periodo. Vemos que $\omega = \pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \boxed{T = 2\text{ s}}$

También lo vemos en la gráfica.

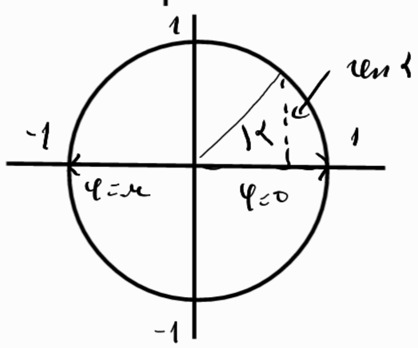
(e) $v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \operatorname{sen} \pi t \Rightarrow \boxed{v = -5\pi \operatorname{sen}(\pi t)\text{ cm/s}}$



Hemos usado que en los puntos A de pendiente horizontal $v=0$ y que del primero al segundo v disminuye pues la pendiente es negativa, etc.

Matemáticamente:

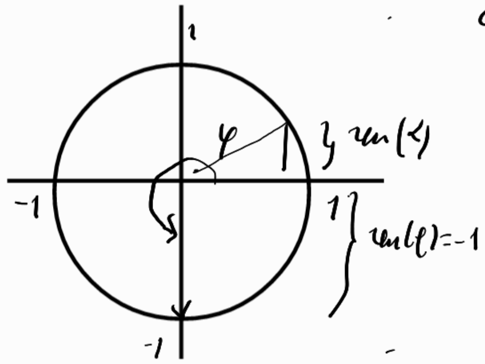
$v = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \pi t = 0 \Rightarrow \pi t = \pi n,\ t = n$



como vemos en la circunferencia trigonométrica ($R=1$). Sucede en $\boxed{t = 0, 1, 2, 3, 4, 5}$

Sí cambia de sentido, como también puede verse en la gráfica $x = x(t)$, pues x pasa de aumentar a disminuir o viceversa en los puntos A.

(g) Vemos que v es máxima en los puntos B, $t=1.5$ y 3.5.
Matemáticamente, $v_{máx}$ cuando $\operatorname{sen}(\pi t) = -1 \Rightarrow v_{max} = 5\pi$



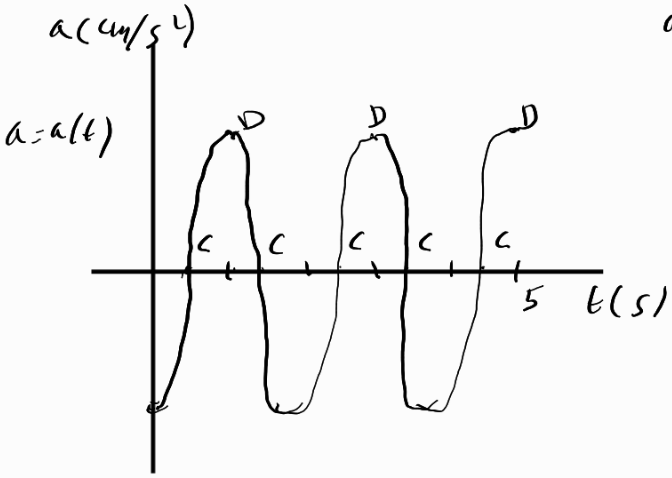
En la circunferencia trigonométrica (R=1) vemos que $\operatorname{sen}(\varphi) = -1$ para $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, luego

$\pi t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow t = -\frac{1}{2} + 2n$, $n = 0,1,2 \ldots \Rightarrow$

$t = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \underbrace{\frac{11}{2}}_{>5} \Rightarrow \boxed{t: 1.5, 3.5}$

(h) $a = \frac{dv}{dt} = -5\pi^2 \cos(\pi t) \Rightarrow \boxed{a = -5\pi^2 \cos(\pi t) \text{ cm/s}^2}$

Vemos que $a = -\pi^2 x$ y $|a|_{max} = 5\pi^2$. Luego la gráfica de $a = a(t)$ es igual a la de $x(t)$ cambiando el valor máximo y el signo.



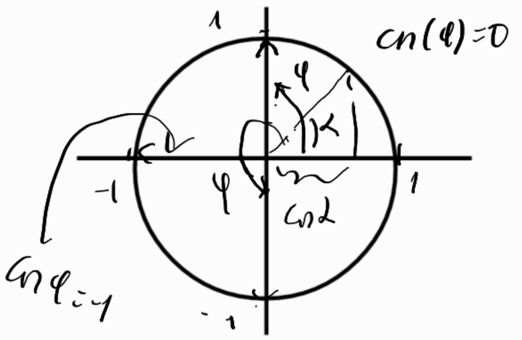
$a=0$, $x=0 \Rightarrow \cos(\pi t) = 0 \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, según vemos en la circunferencia trigonométrica

$\Rightarrow t = \frac{1}{2} + n$ con $n = 0,1,2,\ldots \Rightarrow$

$t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{t = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5 \text{ y } 4.5 \text{ s}}$

Son los puntos C

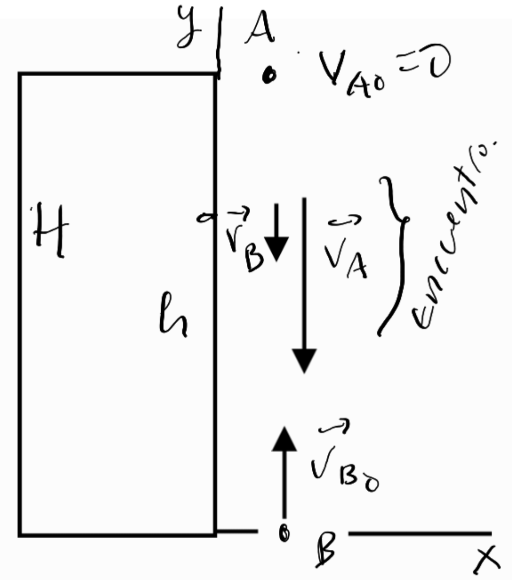
No cambia de sentido, pasa de aumentar v a disminuir o viceversa.



(i) $a_{max} = \pi^2 5$ cm/s² cuando $\cos \pi t = -1$. Es decir (ver circunf. trig.) cuando $\pi t = \pi + 2\pi n$

$\Rightarrow t = 1 + 2n \Rightarrow \boxed{t = 1, 3, 5 \text{ s}}$, puntos D

12. Una bola A se suelta desde lo más alto de un edificio en el mismo instante en que otra bola B se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Cuando las bolas se encuentran ambas se mueven en el mismo sentido y la velociad de A es cuatro veces la velocidad de B. (a) ¿En qué fracción F de la altura del edificio ocurre el encuentro? Despreciar los efectos de rozamiento y suponer que la piedra cae con una aceleración de $g = 9.8$ m/s^2. (b) Si la velocidad inicial de la partícula B es $v_{B0} = 14$ m/s, calcular la altura del edificio H y comprobar el resultado, esto es, que en el momento del encuentro $y_A = y_B = FH$ y v_A=4v_B.



Como A cae, su sentido es siempre hacia abajo. Si B tiene el mismo sentido también baja.

Ecuaciones para v e y para cada partícula

$$v_A = v_{A0} - gt \Rightarrow v_A = -gt \quad (1)$$

$$y_A = y_{A0} + v_{A0}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_A = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$v_B = v_{B0} - gt \quad (3)$$

$$y_B = y_{B0} + v_{B0}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_B = v_{B0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

h: altura del punto de encuentro
H: " " edificio

En el punto de encuentro $y_A = y_B = h$; $v_A = 4v_B$, sustituimos (2) y (4), (1) y (3)

$$H - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = v_{B0}t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} \Rightarrow H = v_{B0}t \quad (5)$$

$$(-gt) = 4(v_{B0} - gt) \Rightarrow -gt = 4v_{B0} - 4gt \Rightarrow 3gt = 4v_{B0} \Rightarrow t = \frac{4v_{B0}}{3g}$$

Sustituimos t en (4) y en (5):

$$h = y_B = v_{B0}\frac{4v_{B0}}{3g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{4v_{B0}}{3g}\right)^2 = 4\frac{v_{B0}^2}{3g} - 8\frac{v_{B0}^2}{9g} = \left(\frac{4\times3-8}{9}\right)\frac{v_{B0}^2}{g} \Rightarrow$$

$$h = \frac{4}{9}\frac{v_{B0}^2}{g} \;;\; H = v_{B0}t = v_{B0}\frac{4}{3}\frac{v_{B0}}{g} = \frac{4}{3}\frac{v_{B0}^2}{g} \Rightarrow$$

$$F = \frac{h}{H} = \frac{\frac{4}{9}\frac{v_{B0}^2}{g}}{\frac{4}{3}\frac{v_{B0}^2}{g}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

luego $\boxed{F = \frac{1}{3}}$ Las bolas se encuentran a un tercio de la altura del edificio.

(b) $g = 9.8\,m/s^2$, $v_{B0} = 14\,m/s$. Calcular H y comprobar que $y_A = y_B$, $v_A = 4v_B$

$$H = \frac{4}{3}\frac{v_{B0}^2}{g} = \frac{4}{3}\frac{(14)^2}{9.8} \Rightarrow \boxed{H = 26.67\,m}$$

De (5) $t = \frac{H}{v_{B0}} = \frac{26.67}{14\,m/s} \Rightarrow t = 1.905\,s$

$$y_A = H - \frac{1}{2}gt^2 = 26.67 - \frac{1}{2}9.8\times1.905^2 \Rightarrow \boxed{y_A = 8.888\,m},\; v_A = -gt = -9.8\times1.905 \Rightarrow \boxed{v_A = -18.67\,m/s}$$

$$y_B = v_{B0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 14\times1.905 - \frac{1}{2}9.8\times1.905^2 \Rightarrow \boxed{y_B = 8.888\,m},\; v_B = v_{B0} - gt = 14 - 9.8\times1.905 \Rightarrow \boxed{v_B = -4.67\,m/s}$$

luego $\frac{H}{3} = 8.89\,m = y_A = y_B = h$ c.q.d, $4v_B = 4\times4.67 = 18.68 = v_A$ c.q.d