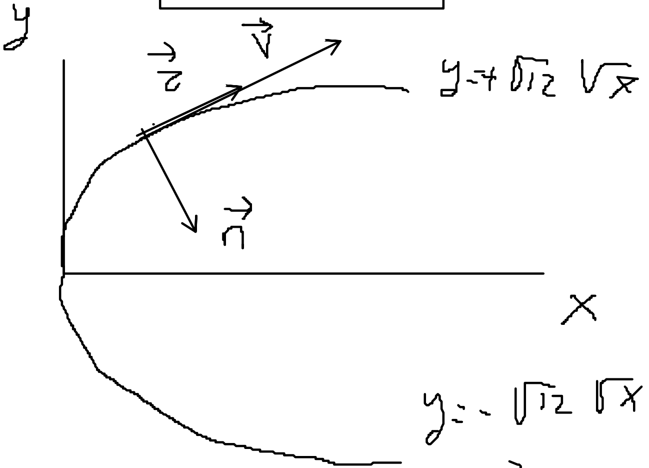
Boletín 1B de Física 1 de ISA. Cinemática en 2 y 3 dimensiones
Ejemplos de problemas resueltos.

1. El vector posición de una partícula viene dado por $\vec{r} = 3t^2\,\vec{\imath} + 6t\,\vec{\jmath}$, donde el tiempo está en segundos y la distancias en metros. Determinar: (**a**) La trayectoria de la partícula. (**b**) Los vectores velocidad y aceleración. (**c**) Los vectores unitarios tangencial $\hat{\tau}$ y normal $\hat{n}$, y las componentes intrínsecas de la aceleración (normal y tangencial). (**d**) El radio de curvatura.

(a) $x = 3t^2;\ y = 6t \Rightarrow t^2 = \frac{x}{3}$ y $t = \pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{6}{\sqrt{3}}\sqrt{x} = \pm\sqrt{\frac{36}{3}}\sqrt{x} \Rightarrow$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{12}\sqrt{x}}$$



En la rama de arriba $y > 0$
$\Rightarrow y = 6t > 0 \Rightarrow t > 0$.
En la rama de abajo $y < 0$

En lo que sigue nos fijamos en la rama de arriba. La de abajo se hace de forma similar.

(b) $\vec{r} = 3t^2\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v} = 6t\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}\ \frac{m}{s}}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = 6\vec{\imath}\ m/s^2}$

(c) $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{6t\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}}{\sqrt{6^2t^2 + 6^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{t\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{t^2+1}}}$ Como $\vec{n} \perp \vec{\tau}$, $\vec{\tau}\cdot\vec{n} = 0$.

Una forma fácil a partir de $\vec{\tau}$ es intercambiar las componentes x e y cambiando una de signo. En el esquema $n_y < 0 \Rightarrow \boxed{\vec{n} = \frac{\vec{\imath} - t\vec{\jmath}}{\sqrt{t^2+1}}}$. Es evidente que $\vec{\tau}\cdot\vec{n} = 0$ y $|\vec{n}| = 1$

Las componentes intrínsecas son las proyecciones de $\vec{a}$ sobre las direcciones de $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ y como son unitarios $a_t = \vec{a}\cdot\vec{\tau}$ y $a_n = \vec{a}\cdot\vec{n} \Rightarrow a_t = 6\vec{\imath}\cdot\left(\frac{t\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{t^2+1}}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{a_t = \frac{6t}{\sqrt{t^2+1}}\ m/s^2}$$

$a_n = 6\vec{\imath}\cdot\left(\frac{\vec{\imath} - t\vec{\jmath}}{\sqrt{t^2+1}}\right) \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{6}{\sqrt{t^2+1}}\ m/s^2}$

(d) Sabemos que $a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \frac{(6t)^2 + 6^2}{\frac{6}{\sqrt{t^2+1}}} \Rightarrow$

$\rho = \frac{6^2(t^2+1)}{6}\sqrt{t^2+1} \Rightarrow \boxed{\rho = 6(t^2+1)^{3/2}\ m}$

2. Una partícula, que en el instante inicial se encuentra en el punto dado por el vector $\vec{r}_0 = 8\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ m con velocidad $\vec{v}_0 = 6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$ m/s, posee una aceleración $\vec{a}(t) = -27\cos(3t)\,\vec{\imath} - 12\mathrm{sen}(2t)\,\vec{\jmath}$ m/s^2. Calcular, para un instante genérico t, el vector de posición de la partícula $\vec{r}(t)$.

Obtenemos primero $\vec v(t)$. Como $\vec a = \dfrac{d\vec v}{dt}$, $d\vec v = \vec a\, dt \Rightarrow$

$$\int_{\vec v_0}^{\vec v} d\vec v = \int_0^t \vec a\, dt \Rightarrow \vec v - \vec v_0 = \int_0^t \left[-27\cos(3t)\,\vec\imath - 12\,\mathrm{sen}(2t)\,\vec\jmath\right] dt \Rightarrow$$

$$\vec v = \underbrace{6\vec\imath + 7\vec\jmath}_{\vec v_0} + \left[-\frac{27}{3}\,\mathrm{sen}(3t)\,\vec\imath + \frac{12}{2}\cos(2t)\,\vec\jmath\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\vec v = 6\vec\imath + 7\vec\jmath + \left(-9\,\mathrm{sen}(3t)\,\vec\imath + 6\cos(2t)\,\vec\jmath\right) - \left(-9\,\underbrace{\mathrm{sen}(3\times 0)}_{0}\,\vec\imath + 6\underbrace{\cos(2\times 0)}_{1}\,\vec\jmath\right)$$

$$\Rightarrow \vec v = \vec v(t) = \left[6 - 9\,\mathrm{sen}(3t)\right]\vec\imath + \left[1 + 6\cos(2t)\right]\vec\jmath$$

Análogamente, $\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt} \Rightarrow d\vec r = \vec v\, dt \Rightarrow \displaystyle\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r = \int_0^t \vec v\, dt \Rightarrow$

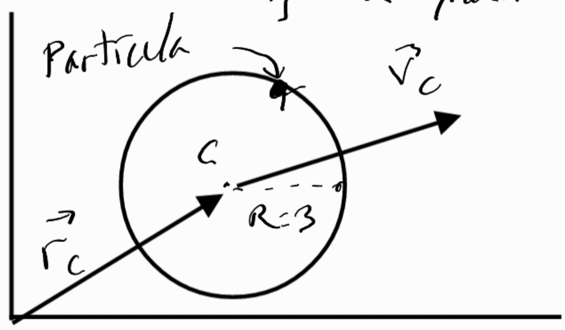
$$\vec r - \vec r_0 = \int_0^t [6 - 9\,\mathrm{sen}\,3t]\,\vec\imath + [1 + 6\cos 2t]\,\vec\jmath\; dt \Rightarrow$$

$$\vec r = \vec r_0 + \left[\left(6t + \frac{9}{3}\cos(3t)\right)\vec\imath + \left(t + \frac{6}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\right)\vec\jmath\right]_0^t \Rightarrow$$

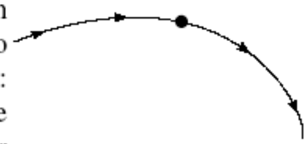
$$\vec r = 8\vec\imath + 2\vec\jmath + \Big(\left(6t + 3\cos 3t\right)\vec\imath + \left(t + 3\,\mathrm{sen}(2t)\right)\vec\jmath -$$
$$- \left(\underbrace{6\times 0}_{0} + 3\underbrace{\cos(3\times 0)}_{1}\right)\vec\imath - \left(0 + 3\underbrace{\mathrm{sen}(2\times 0)}_{0}\right)\vec\jmath \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec r = \vec r(t) = \left(5 + 6t + 3\cos(3t)\right)\vec\imath + \left(2 + t + 3\,\mathrm{sen}(2t)\right)\vec\jmath \text{ m}}$$

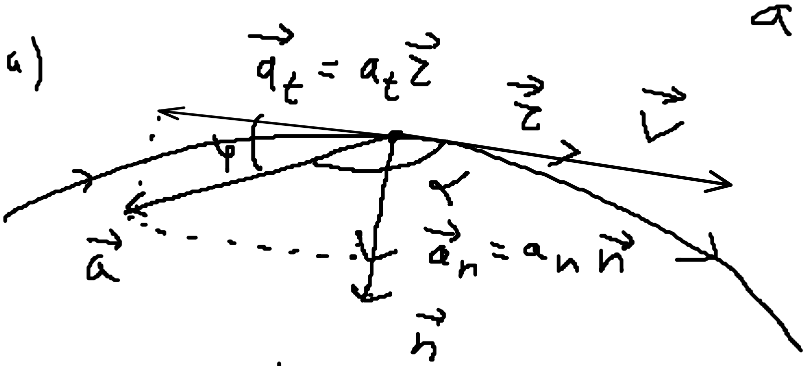
Se trata de un movimiento circular de radio $R=3$ m, con velocidad angular $\omega = 2$ rad/s, y posición inicial $\varphi = 0$, en torno a un punto C, que se mueve con velocidad constante $\vec v_C = 6\vec\imath + 2\vec\jmath$ m/s a partir de la posición inicial $\vec r_{C,0} = 5\vec\imath + 2\vec\jmath$ m



3. Una partícula se mueve describiendo la trayectoria que se muestra en la figura (el sentido de movimiento viene dado por las flechas y la partícula se representa por un círculo negro). En el instante mostrado, el módulo de su velocidad va disminuyendo con el tiempo y el módulo de la aceleración tangencial es el doble que el de la normal: **(a)** Dibuje el vector aceleración de la partícula de manera que se aprecie claramente su dirección y sentido. **(b)** Calcule el ángulo entre el vector aceleración y el vector velocidad (en radianes).



(a)



$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n}$

$a_t = \frac{dv}{dt} < 0$ pues

$v = |\vec{v}|$ disminuye

(b) $\frac{|a_t|}{a_n} = 2 \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{a_n}{|a_t|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 26.6°$ y

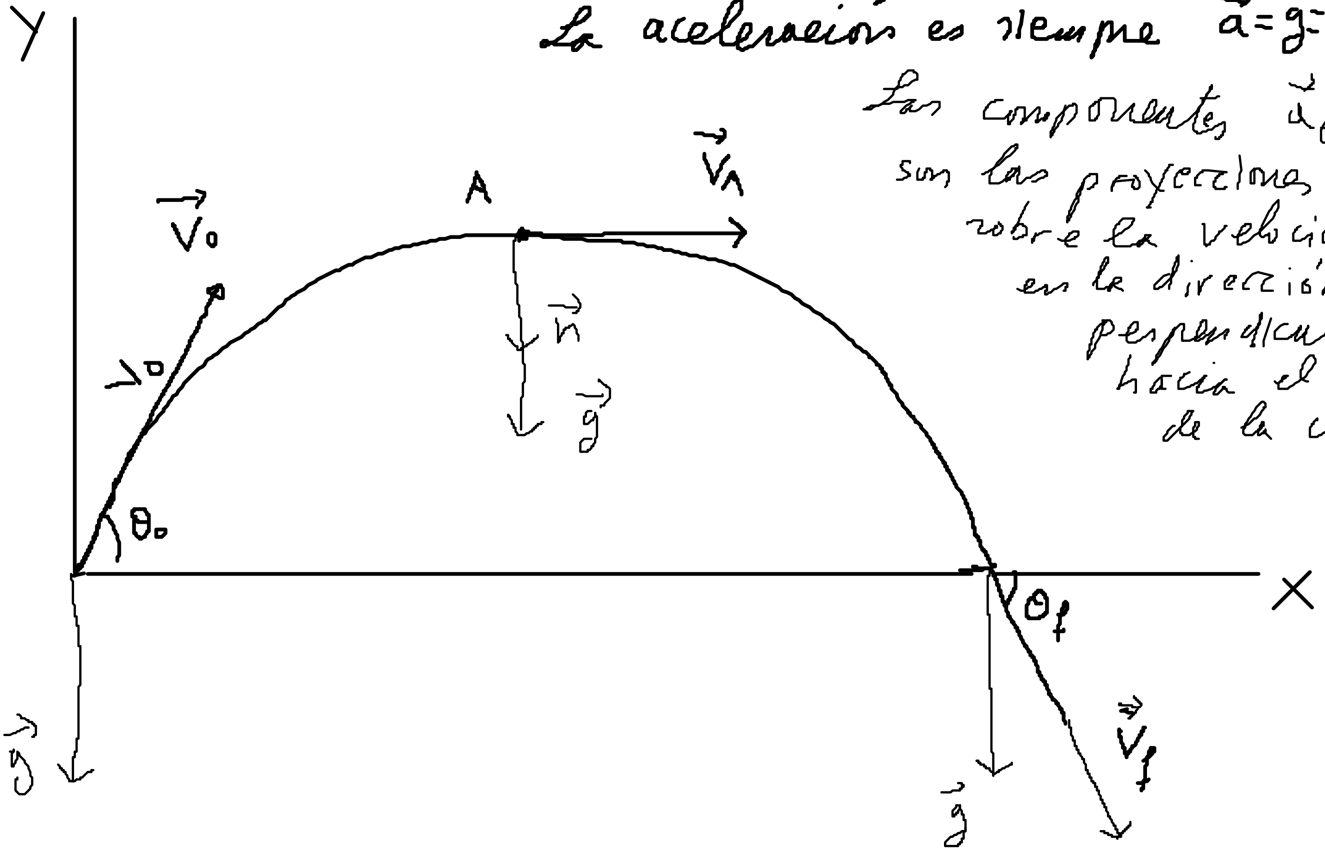
α, que es lo que nos piden $\alpha = 180° - \varphi \Rightarrow \boxed{\alpha = 153{,}5°}$

$\alpha = 153{,}5° \left(\frac{\pi\, rad}{180°}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2{,}68\, rad}$

4. Un proyectil es lanzado desde el origen de coordenadas que se supone al nivel del suelo, con velocidad $\vec{v}_0$ de módulo v_0 y que forma un ángulo θ_0 con el eje x. Calcular la aceleración y sus componentes intrínsecas escalares y vectoriales a_t, a_n, $\vec{a}_t = a_t\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = a_n\vec{n}$, en (a) el punto más alto de la trayectoria; (b) en el punto inicial; (c) en el punto de caida.

La aceleración es siempre $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$.

Las componentes $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ son las proyecciones de $\vec{g}$ sobre la velocidad $\vec{v}$ y en la dirección perpendicular hacia el interior de la curva.

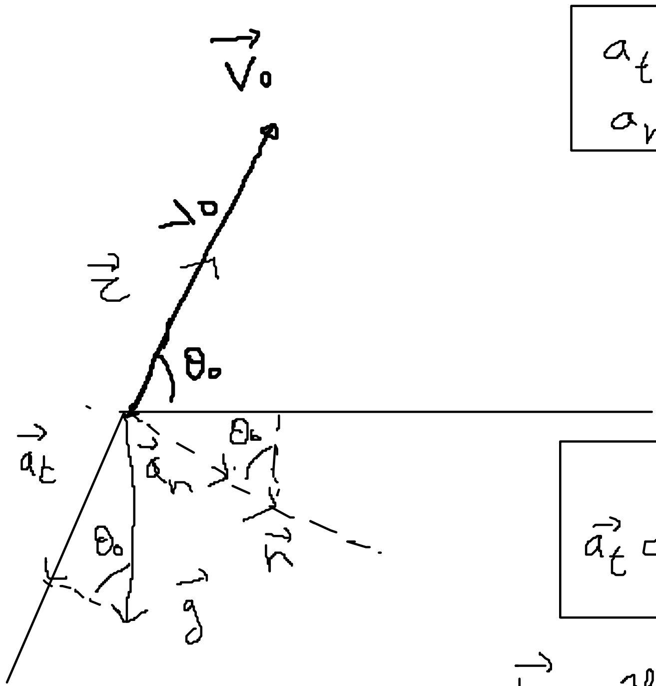


En A

Vemos que en A $\vec{g} \perp \vec{v}$, luego $\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}_n = \vec{g} = -g\vec{j} \\ \vec{a}_t = 0\end{array}}$

Como $\vec{n} = -\vec{j} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}a_n = g \\ a_t = 0\end{array}}$

En el punto Inicial



$$\boxed{\begin{array}{l}a_t = -g\sin\theta_0 \\ a_n = g\cos\theta_0\end{array}}$$

$a_t < 0$ pues $v = |\vec{v}|$ disminuye al subir

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}_0}{V_0} = \frac{V_0(\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})}{V_0} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j} \Rightarrow$$

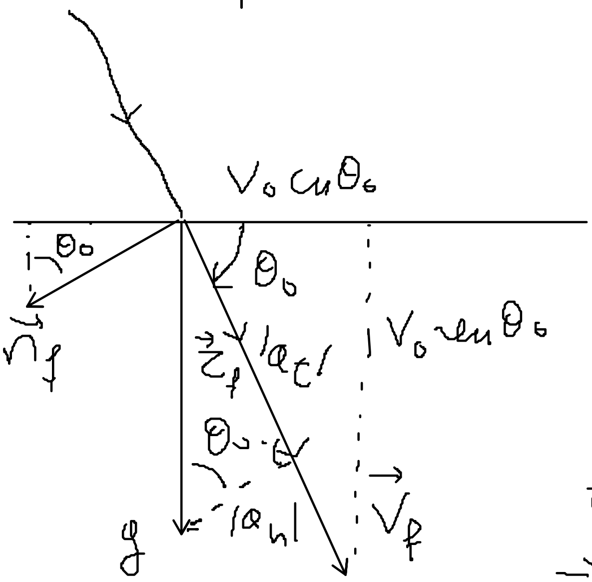
$$\vec{a}_t = a_t\vec{\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_t = -g\sin\theta_0\cos\theta_0\vec{i} - g\sin^2\theta_0\vec{j}}$$

$$\vec{n} = \sin\theta_0\vec{i} - \cos\theta_0\vec{j} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_n = g\cos\theta_0\sin\theta_0\vec{i} - g\cos^2\theta_0\vec{j}}$$

(c) En el punto de caída.



Tenemos que calcular $\vec{V}_f$. Por intuición, será igual a $\vec{V}_0$, pero con la componente vertical Invertida. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{0}{y} = \underset{0}{y_0} + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ V_{fy} = V_{0y} - gt \end{array}\right\}$$

$$t\left(V_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \begin{cases} t = 0 & \text{inicial} \\ t = \frac{2V_{0y}}{g} & \text{final} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{fy} = V_{0y} - \cancel{g}\frac{2V_{0y}}{\cancel{g}} = -V_{0y} = -V_0\sin\theta_0 \quad \text{c.q.d.}$$

Y sabemos que $V_x = V_{0x} = V_0\cos\theta_0$ cte

Luego $|a_t| = g \cos\theta_0$ y como $\vec{a}_t \uparrow\uparrow \vec{\tau}_f \Rightarrow$

$\boxed{a_t = g \operatorname{sen}\theta_0}$ Positiva, $v = |\vec{v}|$ aumenta al caer.

$$\vec{\tau}_f = \frac{\vec{V}_f}{V_f} = \frac{V_0 \cos\theta_0 \vec{i} - V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \vec{j}}{V_0} = \cos\theta_0 \vec{i} - \operatorname{sen}\theta_0 \vec{j}$$

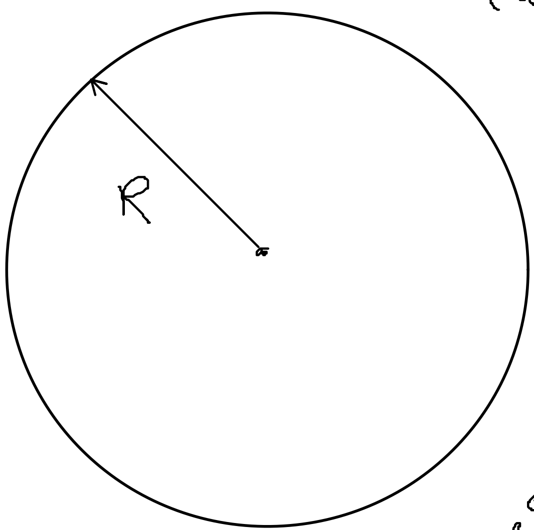
Como $\vec{a}_t = a_t \vec{\tau}_f \Rightarrow \boxed{\vec{a}_t = g \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0 \vec{i} - g \operatorname{sen}^2\theta_0 \vec{j}}$

Viendo el esquema arriba:

$\boxed{a_n = g \cos\theta_0}$, $\vec{n}_f = -\operatorname{sen}\theta_0 \vec{i} - \cos\theta_0 \vec{j}$ $\left\{ \begin{array}{l} (|\vec{n}_f| = 1) \\ (\vec{n}_f \cdot \vec{\tau}_f = 0) \end{array} \right.$

Y como $\vec{a}_n = a_n \vec{n}_f$, $\boxed{\vec{a}_n = -g \cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0 \vec{i} - g \cos^2\theta_0 \vec{j}}$

5. Una partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad angular constante ω y con periodo T =1.4 s **(a)** ¿Cuánto vale su velocidad angular ω? Expresar el resultado en rad/s y en rpm (revoluciones por minuto). **(b)** ¿Cuánto vale su frecuencia f? **(c)** Si el radio de la circunferencia es R=80 cm, ¿cuánto vale su velocidad (en módulo) v, su aceleración tangencial a_t y su aceleración normal a_n? **(d)** Obtener para $\phi = 30°$, el ángulo de $\vec{r}$ con el eje X positivo, el valor de los vectores $\vec{r}$, $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ y $\vec{a}_n$.



(a) Si ω es cte. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, como en un periodo recorre una vuelta 2π rad.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1,4 \text{ s}} \Rightarrow \boxed{\omega = 4,49 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

En $\frac{\text{rev}}{\text{min}}$:

$$\omega = \frac{1 \text{ rev}}{T} = \frac{1 \text{ rev}}{1,4 \text{ s}} \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) \Rightarrow \boxed{\omega = 42,9 \frac{\text{rev}}{\text{min}}}$$

rpm

(b) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,4 \text{ s}} \Rightarrow \boxed{f = 0,714 \text{ Hz}}$

En realidad $42,9 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$ es también una frecuencia: número de vueltas por unidad de tiempo.

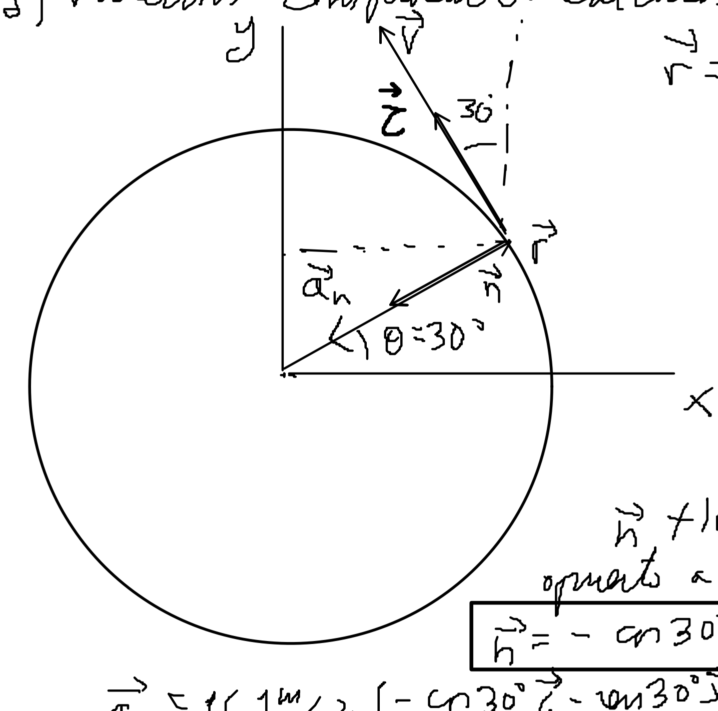
(c) $R = 0,8$ m. $v = R\omega = 0,8 \text{ m} \; 4,49 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{v = 3,59 \text{ m/s}}$ cte

Como v cte $\Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow a_t = 0$

Como ω cte $\Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. O bien $\alpha = \frac{a_t}{R} = 0$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3,59 \text{ m/s})^2}{0,8 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{a_n = 16,1 \text{ m/s}^2}$$ o bien $a_n = \omega^2 R$

(d) Podemos complicarlo. Calcular $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}_n$ para $\theta = 30°$



$$\vec{r} = R\underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\vec{i} + R\underbrace{\sin 30°}_{\frac{1}{2}}\vec{j} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r} = 0,4\sqrt{3}\,\vec{i} + 0,4\,\vec{j} \text{ m} = 0,693\,\vec{i} + 0,4\,\vec{j} \text{ m}}$$

$$\vec{\tau} = -\sin(30°)\vec{i} + \cos(30°)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}$$

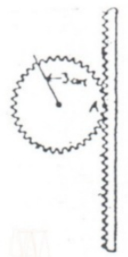
$$\vec{v} = v\vec{\tau} = 3,59 \text{ m/s}^2 \left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = -1,04\,\vec{i} + 1,79\,\vec{j} \text{ m/s}}$$

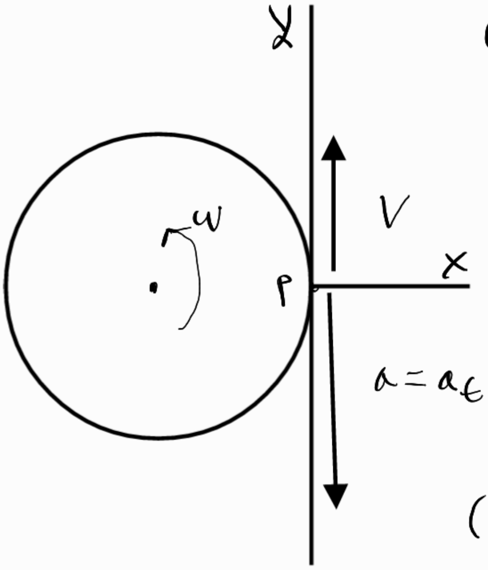
$\vec{n}$ tiene igual dirección y sentido opuesto a $\vec{r}$, luego $\vec{n} = \frac{-\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{R} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{n} = -\cos 30°\,\vec{i} - \sin 30°\,\vec{j}}$$ y $\vec{a}_n = a_n\vec{n} \Rightarrow$

$$\vec{a}_n = 16,1 \text{ m/s}^2 \left(-\cos 30°\,\vec{i} - \sin 30°\,\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_n = -14,0\,\vec{i} - 8,06\,\vec{j} \text{ m/s}^2}$$



6. Una rueda dentada de radio 3 cm gira respecto a un eje que pasa por su centro debido a la acción de una cremallera rectilínea. En determinado instante, la aceleración de la cremallera es de 15 cm/s^2 hacia abajo y su velocidad es de 6 cm/s hacia arriba. Determinar: (a) La velocidad angular, en rad/s y rpm (revoluciones por minuto). (b) La aceleración angular de la rueda dentada. (c) La velocidad y aceleración del diente de la rueda dentada en contacto con la cremallera. **Nota:** En el punto de contacto, ya que no existe deslizamiento, las velocidades (en módulo) de la cremallera y la rueda deben de ser iguales, y la aceleración de la cremallera y la aceleración tangencial de la rueda (en módulo) también.



(a) El punto P de la rueda en contacto con la cremallera tiene la misma velocidad v y su aceleración tangencial es igual a a.

Entonces: $v = \omega R$, $a_t = \alpha R \Rightarrow$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{6\,cm/s}{3\,cm} \Rightarrow \boxed{\omega = 2\,rad/s}$

(b) $\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{a}{R} = \frac{-15\,cm/s^2}{3\,cm} \Rightarrow \boxed{\alpha = -5\,rad/s}$

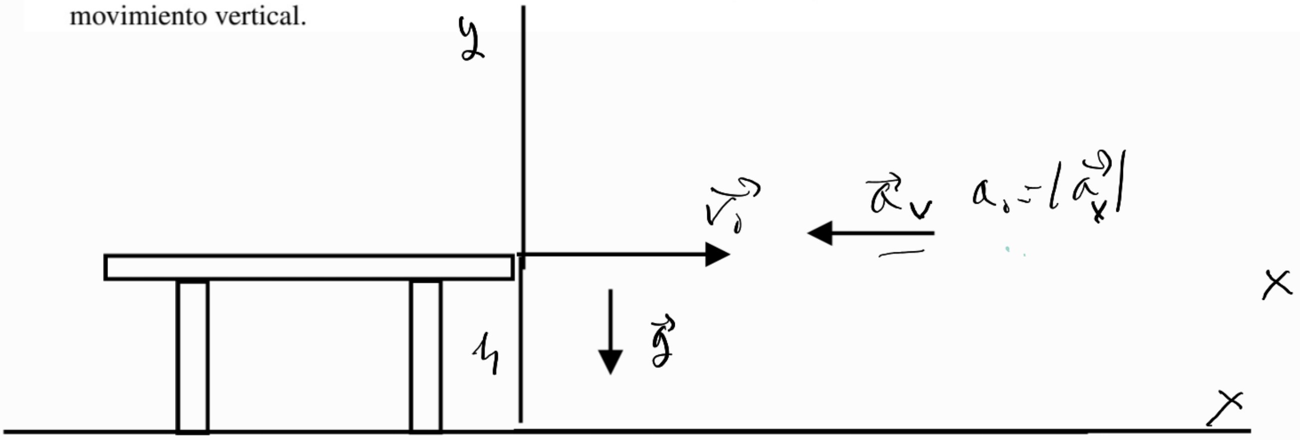
(c) El diente en el punto P, ya conocemos su aceleración tangencial $\vec{a}_t = -15\vec{j}\ cm/s^2$. La aceleración normal va dirigida hacia el centro de la rueda y vale $\frac{v^2}{R} \Rightarrow$

$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\vec{i} = -\frac{6^2\,cm^2/s^2}{3\,cm}\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_n = -12\vec{i}\ cm/s$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -12\vec{i} - 15\vec{j}\ cm/s^2}$

y $\vec{v} = v\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 6\vec{j}\ cm/s}$

7. Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura h sobre el suelo. Lanza un petardo horizontalmente con una velocidad v_0 (en módulo). Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al petardo una aceleración horizontal constante de módulo a_0. El resultado es que el petardo cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura h en términos de v_0 , a_0 y g . Ignore el efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.



↗ Punto de caída

Tenemos que $\vec{a} = \vec{a}_v \vec{i} + \vec{g} = -a_0 \vec{i} - g\vec{j}$, de.

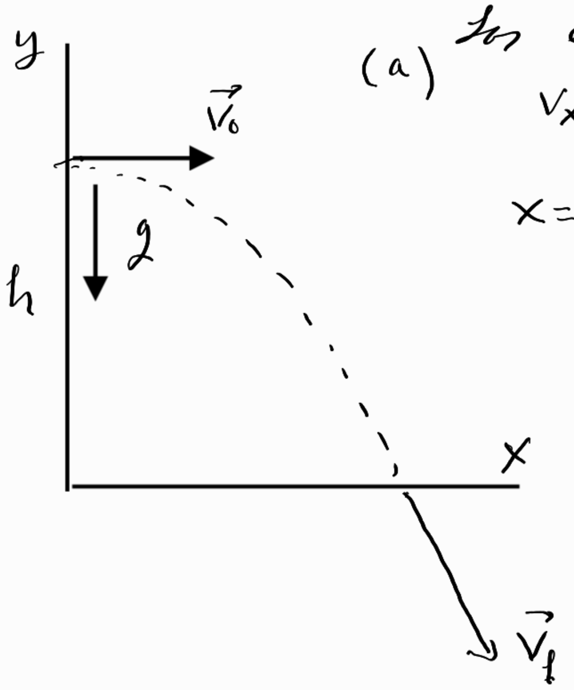
Es un movimiento uniformemente acelerado en las dos direcciones. Luego

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad x = x_0 = 0 \Rightarrow 0 = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$\Rightarrow t\left(v_0 - \frac{1}{2} a_0 t\right) = 0 \Rightarrow$ Dos soluciones $t = 0$, la inicial y $t = \frac{2v_0}{a_0}$ (1)

Además $y = 0$ e $y_0 = h \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g}$, igualando a t^2 en (1), $\frac{2h}{g} = \frac{(2v_0)^2}{a_0^2} \Rightarrow \frac{2h}{g} = \frac{4v_0^2}{a_0^2} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2v_0^2 \cdot g}{a_0^2}}$

8. Una partícula sale despedida desde un edificio de altura h con una velocidad inicial $\vec{v} = v_0\,\vec{\mathrm{i}}$. Cuando la partícula impacta en el suelo, calcule **(a)** el vector velocidad **(b)** el radio de curvatura ρ.



(a) Las ecuaciones para x, y, V_x, V_y son

$V_x = V_0$ cte (1), $V_y = V_{0y} - gt \Rightarrow V_y = -gt$ (2) ($V_{0y} = 0$)

$x = x_0 + V_x t \Rightarrow x = V_0 t$ (3); $y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$ ($y_0 = h$, $V_{0y} = 0$)

$y = h - \frac{1}{2}gt^2$ (4). Usando (4), al llegar al suelo $y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

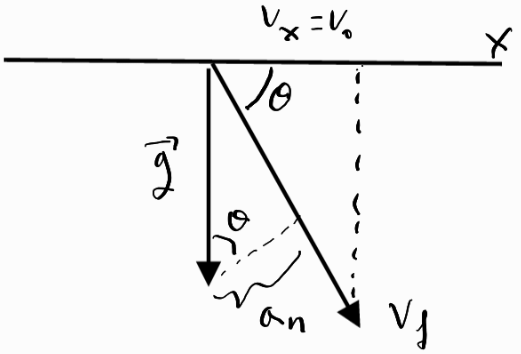
Calculamos las velocidades de (1) y (2)

$V_x = V_0$, $V_y = -gt = -\sqrt{\frac{g^2 2h}{g}} \Rightarrow V_y = -\sqrt{2gh}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{V_f} = V_0\vec{\imath} - \sqrt{2gh}\,\vec{\jmath}}$ $\quad V_f = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$

(b) La única aceleración es $\vec{g}$, su componente normal a $\vec{V_f}$, valdrá $\frac{V_f^2}{\rho}$ y nos permite obtener el radio de curvatura ρ.

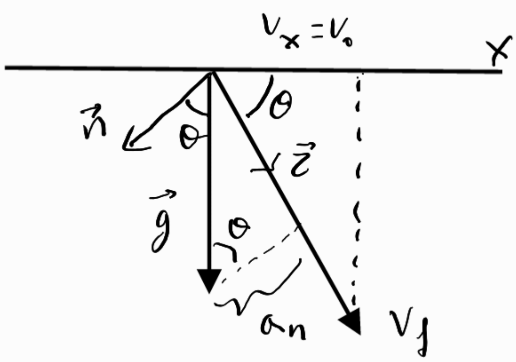
Vemos que $a_n = g\cos\theta$ y $\cos\theta = \frac{V_0}{V_f} \Rightarrow$



$a_n = g\frac{V_0}{V_f} = \frac{V_f^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V_f^3}{gV_0} \Rightarrow$

$$\boxed{\rho = \frac{(V_0^2 + 2gh)^{3/2}}{gV_0}}$$

otra forma: $a_n = \vec{g}\cdot\vec{n}$ $\quad \vec{g} = -g\vec{\jmath}$ $\quad$ Vemos que

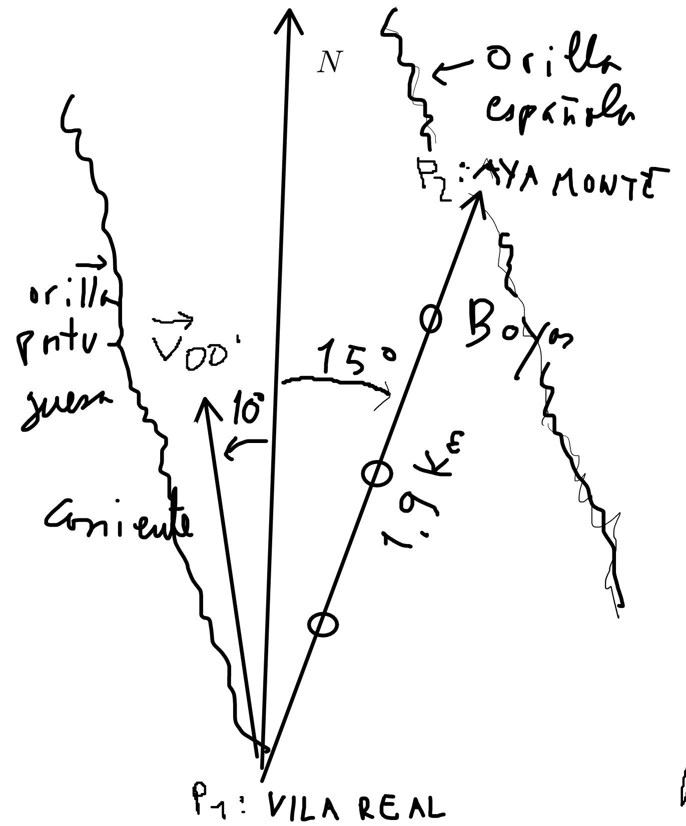


$\vec{\tau} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$, construimos $\vec{n}$ cambiando las componentes y el signo de una de ellas para que $\vec{\tau}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$

$\vec{n} = -\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath}$ (vemos el signo en el dibujo)

$a_n = \vec{g}\cdot\vec{n} = g\cos\theta$. A partir de ahí igual.

9. En la travesía a nado del Guadiana, los nadadores salen desde un muelle en Vila Real de Santo Antonio hasta la bocana del puerto de Ayamonte, que se encuentra a una distancia de 1.90 km. En línea recta un nadador debería llevar un rumbo (ángulo al este o a la derecha de la dirección norte) $R_v = 15°$, que se marca con una linea de boyas amarillas para orientar a los nadadores. El nadador 1 nada a una velocidad con respecto al agua $v_{NA} = 3.0\,\text{km/h}$ y el nadador 2 con una velocidad $v'_{NA} = 2.0\,\text{km/h}$. La travesía se hace con la marea creciente de forma que la velocidad de la corriente tiene un rumbo $R_c = -10°$ (10° al oeste o izquierda del norte) con velocidad $v_{AT} = 4.0\,\text{km/h}$. Calcular (a) el ángulo que tiene que llevar cada nadador con respecto a la línea de boyas para llegar a su destino; (b) El tiempo que tarda cada uno en llegar. (c) La velocidad mínima que tiene que tener un nadador para poder hacer la travesía y el tiempo que tarda. Nota: en ríos con poca pendiente como el Guadiana y el Guadalquivir que desembocan en mares con máreas, la corriente sube con la marea hasta más de 100 km de la desembocadura.



Sistema de referencia OXY: las orillas del río y su fondo.

Sistema de referencia OX'Y': el agua del río.

$\vec{V}_{OO'}$: velocidad del agua del río respecto al fondo = velocidad de la corriente.

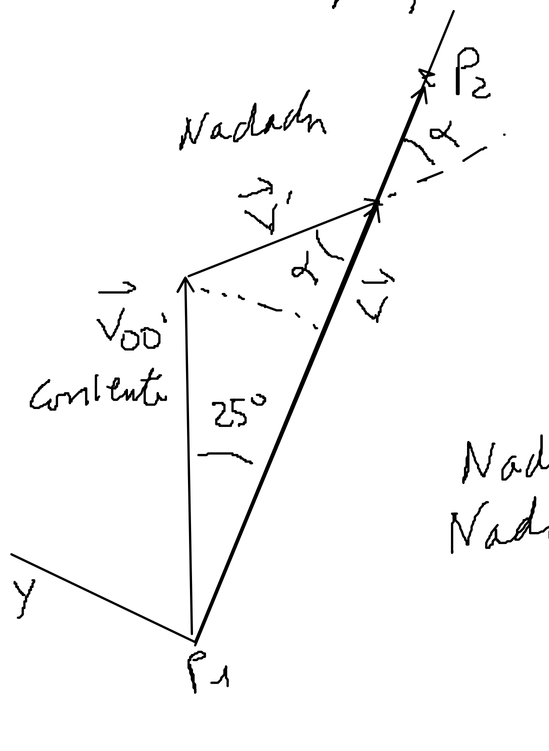
$\vec{V}'$: velocidad del nadador respecto al agua: velocidad relativa

$\vec{V}$: velocidad del nadador respecto al fondo y orillas: velocidad absoluta

$\vec{V} = \vec{V}_{OO'} + \vec{V}'$

Para que un nadador llegue de P_1 a P_2 su velocidad absoluta $\vec{V}$ tiene que ser paralela a $\overrightarrow{P_1P_2}$: $\vec{V} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P_1P_2}$

Para simplificar, tomamos el eje X en la dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$



Vemos que las componentes Y de $\vec{V}_{OO'}$ y de $\vec{V}'$ tienen que anularse. El nadador tiene que compensar lo que la corriente le arrastra en dirección perpendicular a la dirección P_1P_2. Luego:

$V_{OO'} \operatorname{sen} 25° = V' \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{V_{OO'} \operatorname{sen} 25°}{V'}$

Nadador A: $V'_A = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha_A = \dfrac{4\frac{\text{km}}{\text{h}} \operatorname{sen} 25°}{3\,\text{km/h}} \Rightarrow \boxed{\alpha_A = 34.3°}$

Nadador B: $V'_B = 2\frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha_B = \frac{4}{2} \operatorname{sen} 25° \Rightarrow \boxed{\alpha_B = 57.7°}$

(b) Tanto el nadador como la corriente son velocidades constantes. También $\vec{V} = \vec{V}_{OO'} + \vec{V}'$. Entonces $t = \frac{d}{V}$

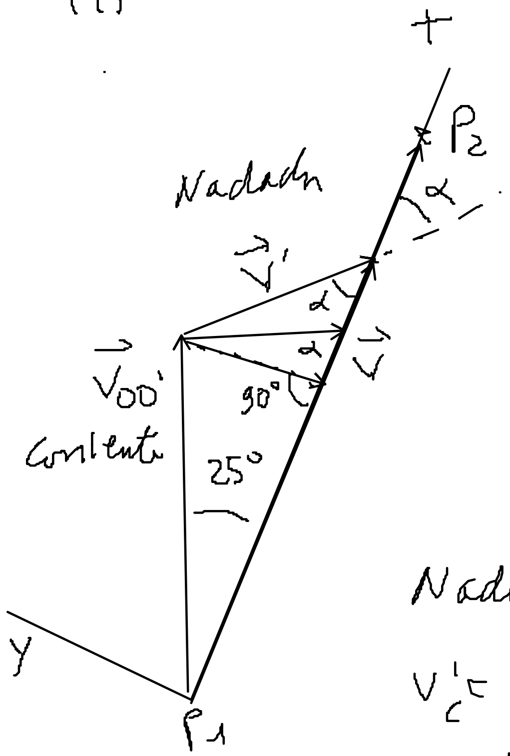
Nadador A: $V_A = V_{OO'} \cos 25° + V' \cos \alpha_A = 4 \cos 25° + 3 \cos 34.3° = 6.10 \frac{km}{h}$

$t_A = \frac{1,9\,km}{6,10\,\frac{km}{h}} = 0,311\,h \left(\frac{60\,min}{1\,h}\right) \Rightarrow \boxed{t_A = 18,7\,min = 18'42''}$

Nadador B: $V = V_{OO'} \cos 25° + V'_B \cos \alpha = 4 \cos 25° + 2 \cos 34.3° = 4,69 \frac{km}{h}$

$t_A = \frac{1,9\,km}{4,69\,\frac{km}{h}} = 24,3\,h \left(\frac{60\,min}{1\,h}\right) \Rightarrow \boxed{t_B = 24,3\,min = 24'30''}$

(c)



Vemos que al disminuir V', α aumenta hasta 90°. Luego V' vuelve a aumentar. Igualmente en la ecuación

$$V_{OO'} \operatorname{sen} 25° = V' \operatorname{sen} \alpha,$$

el término de la izda es constante. Si V' disminuye, $\operatorname{sen} \alpha$ tiene que aumentar. El valor máximo $\operatorname{sen} \alpha = 1$ corresponde a $\alpha = 90°$.

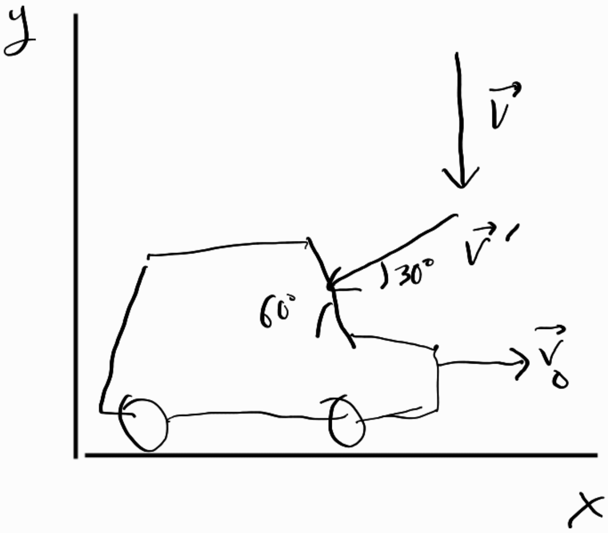
Nadador C: más lento que llega.

$V'_C = \frac{4\,\frac{km}{h} \operatorname{sen} 25°}{\operatorname{sen} 90°} \Rightarrow \boxed{V'_C = 1,69\,km/h}$

$V_C = V_{OO'} \cos 25° + V'_C \underbrace{\cos 90}_{0} \Rightarrow V_C = 3,62 \frac{km}{h} \Rightarrow$

$t_C = \frac{1,9\,km}{3,62\,\frac{km}{h}} = 0,524\,h \Rightarrow \boxed{t_C = 31,4\,min = 31'24''}$

10. En un día de verano en que no hay viento se descarga un chaparrón, de modo tal que las gotas de agua siguen trayectorias verticales. El conductor de un auto que marcha a 10 km/h ve que las gotas llegan en dirección perpendicular al parabrisas. Sabiendo que el parabrisas forma un ángulo de 60^o con la horizontal, determinar: **(a)** La velocidad con que descienden las gotas de lluvia vistas desde tierra. **(b)** La velocidad con que golpean al parabrisas.



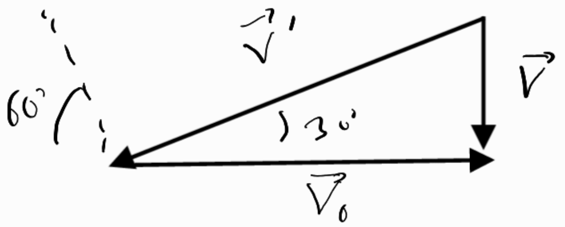
$\vec{v}$ velocidad de las gotas respecto al suelo

$\vec{v}'$ velocidad de las gotas respecto al coche

$\vec{v}_0$: velocidad del coche respecto al suelo

Sabemos que $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$

Dibujamos la suma de los tres vectores. Conocemos $v_0 = 10$ km/h



(a) Es decir $v = |\vec{v}|$. Vemos que

$$\frac{v}{v_0} = tg\,30^\circ \Rightarrow v = v_0\, tg\,30^\circ = v_0 \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

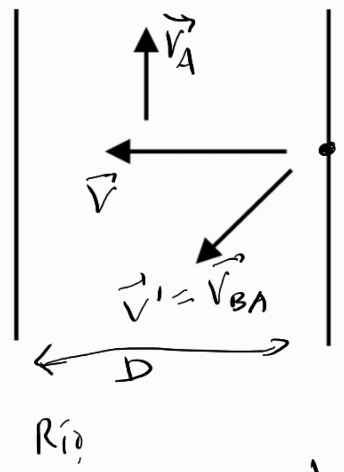
$$v = \frac{\sqrt{3}}{3}\, 10\, \frac{km}{h} \Rightarrow \boxed{v = 5.77\ km/h}$$

(b) Es decir v' pues es la velocidad relativa al parabrisas

Vemos que $v_0 = v' \cos 30^\circ \Rightarrow v' = \frac{v_0}{\cos 30^\circ} = \frac{v_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, 10\, \frac{km}{h} \Rightarrow$

$$\boxed{v' = 11{,}5\ km/h}$$

11. Un bote viaja con rapidez de v_{BA} relativa al agua en un río de anchura D . La rapidez del agua es v_A. **(a)** Demostrar que el tiempo necesario para cruzar el río a un punto exactamente opuesto al punto de partida y luego regresar es $t_a = 2D/\sqrt{v_{BA}^2 - v_A^2}$. **(b)** Demostrar que el ángulo que debe de tomar la barca respecto a la dirección de la corriente viene dado por $\tan\alpha = -\sqrt{v_{BA}^2 - v_A^2}/v_A$.



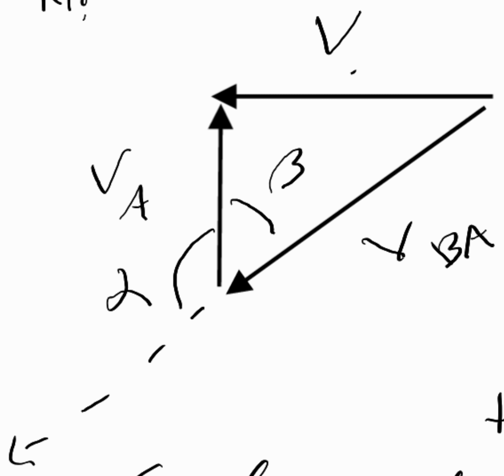
(a) $\vec{V}' = \vec{V}_{BA}$, $\vec{V}_0 = \vec{V}_A$, $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}' = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$

Queremos que $\vec{V}$ sea perpendicular al río. Tendremos que orientar V_{BA} algo hacia abajo.

Por simetría, el tiempo en ir y volver será dos veces el tiempo de ir $t_{ida} = \frac{D}{V}$ ⇒

$t_a = \frac{2D}{V}$ y como $V_{BA}^2 = V_A^2 + V^2$ ⇒

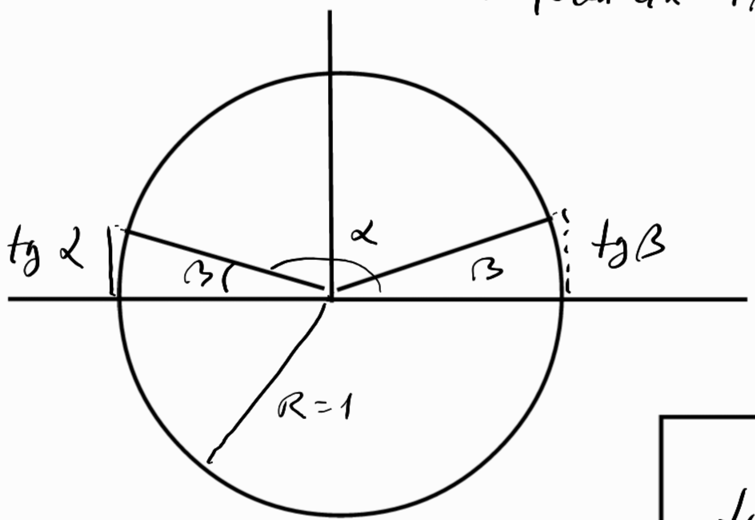
$$\boxed{t_a = \frac{2D}{\sqrt{V_{BA}^2 - V_A^2}}}$$



(b) No piden α, pero calculamos β que tenemos en el triángulo

$$tg\beta = \frac{V}{V_A} = \frac{\sqrt{V_{BA}^2 - V_A^2}}{V_A} \qquad \alpha = 180° - \beta$$

En la circunferencia trigonométrica (R=1) comparamos α y β



Vemos que tg α es igual a tg β salvo el signo que es negativo en el segundo cuadrante pues el seno es positivo y el coseno negativo. Luego

$$\boxed{tg\alpha = -\frac{\sqrt{V_{BA}^2 - V_A^2}}{V_A}}$$

Hay otro ángulo con la misma tangente −β. Al obtener α tomamos el ángulo entre 90° y 180° de los dos posibles. Con frecuencia la calculadora sólo da uno, el otro se obtiene sumando o restando 180°.