Tema 0.

Repaso de cálculo vectorial

1. Definiciones básicas.
2. Sistemas de referencia. Componentes de un vector.
3. Suma y diferencia de vectores.
4. Producto de un escalar por un vector. Producto escalar de vectores.
5. Producto vectorial.

Vectores.

1. Definiciones básicas.

Son magnitudes que están caracterizadas por su módulo (que indica lo grande o pequeño que es el vector) y por su **dirección**.

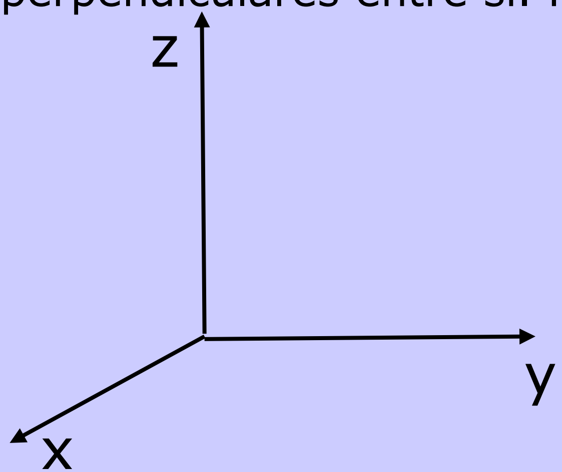
Gráficamente los representaremos por medio de una flecha que indica su dirección y sentido, se representa más grande cuanto mayor sea su módulo:

A efectos de notación, se representan con una flecha encima: $\vec{F}$ o por **F**.

Representaremos el módulo de este vector, indistintamente, por $\left|\vec{F}\right|$ o F.

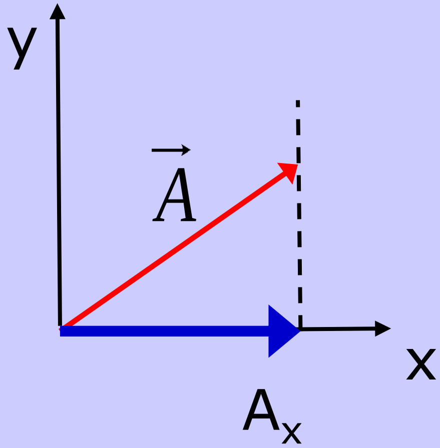
2. Sistemas de coordenadas. Componentes de un vector.

Un sistema de coordenadas es un conjunto de dos ejes (plano) o tres ejes (espacio) perpendiculares entre sí. Por convenio, los denotaremos como ejes x, y, z.



Una posición del plano (o espacio), arbitraria (o no) se tomará como **sistema de referencia** de este sistema de coordenadas.

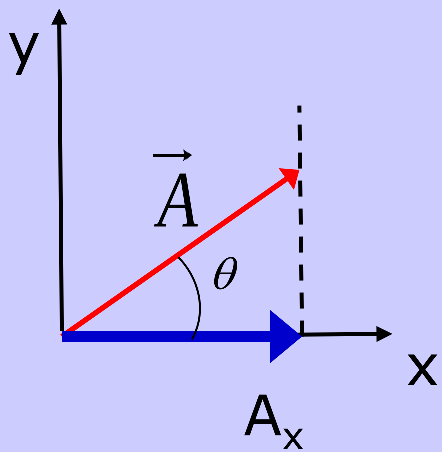
Un vector siempre puede expresarse en términos de sus componentes en dicho sistema de coordenadas.



La componente de un vector sobre un eje representa la magnitud del mismo, en dicho eje.

A efectos gráficos, se obtiene trazando una línea perpendicular al eje de interés para obtener la **proyección** sobre el mismo.

Por ejemplo, para obtener la componente x, que denotaremos por A_x, del vector $\vec{A}$:



Si sabemos que este vector forma un ángulo θ con el eje x:

$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\theta$$

$$A_y = \left|\vec{A}\right| sen\theta$$

El módulo está dado entonces por:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

En tres dimensiones: $$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Por lo tanto, el módulo de un vector SIEMPRE es una magnitud positiva.

Podemos representar matemáticamente el vector **A** en función de sus componentes como: $$\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$$

Un vector unitario es un vector sin dimensiones cuyo módulo es la unidad. Puede demostrarse que para obtener un vector unitario, $\mathbf{u_A}$, en la dirección del vector **A**, basta con dividir cada una de sus componentes por el módulo de **A**:

$$\vec{u}_A = \left(\frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}, \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|}, \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}\right)$$

Las direcciones de los ejes x, y, z suelen caracterizarse por medio de los correspondientes vectores unitarios, que por convenio se representan como:

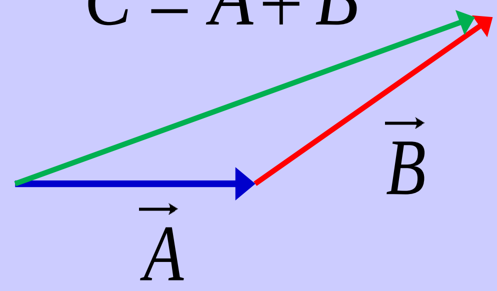
$\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ o, más frecuentemente. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

3. Suma y diferencia de vectores.

El resultado de sumar (restar) dos o más vectores es otro vector.

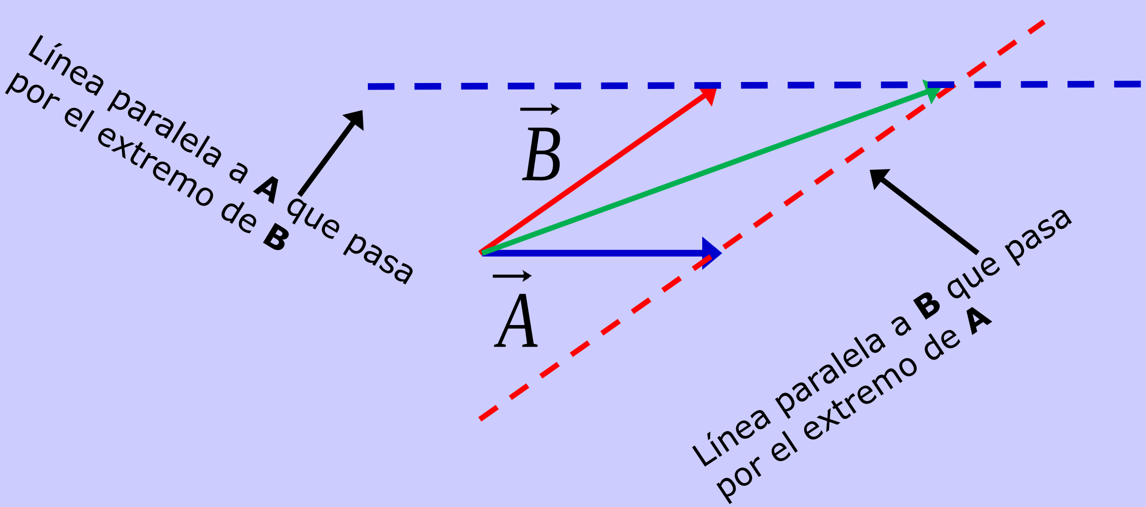
A efectos geométricos, el vector suma o resultante se obtiene situando el origen de uno en el extremo del otro.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



La resultante se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo.

Análogamente, se puede emplear la regla del paralelogramo, después de situarlos con el mismo origen:

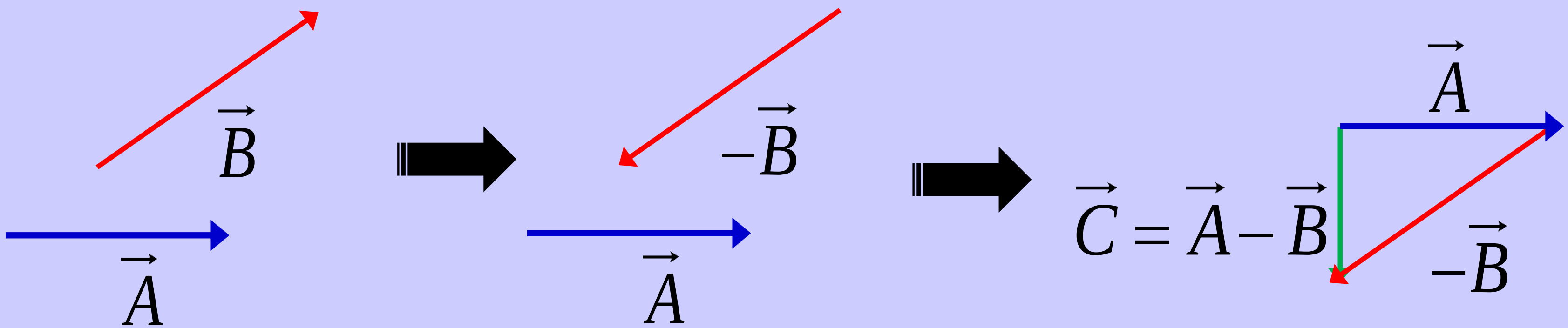


$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Las componentes del vector suma se determinan por medio de:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \left(A_x, A_y, A_z\right) + \left(B_x, B_y, B_z\right) = \left(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z\right)$$

Para restar dos vectores, **A**-**B**, por ejemplo, se le suma a **A** el vector opuesto (en dirección) a **B**:



Las componentes del vector diferencia se determinan por medio de:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \left(A_x, A_y, A_z\right) - \left(B_x, B_y, B_z\right) = \left(A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z\right)$$

¡OJO! $\left|\vec{A} \pm \vec{B}\right| \neq \left|\vec{A}\right| \pm \left|\vec{B}\right|$ (salvo en algunos casos concretos)

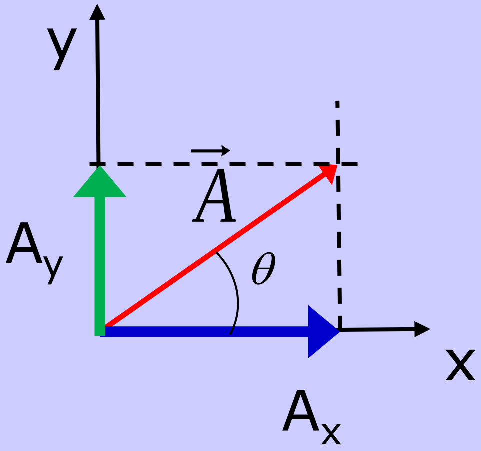
La suma de vectores cumple tanto la propiedad conmutativa:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Como la asociativa:

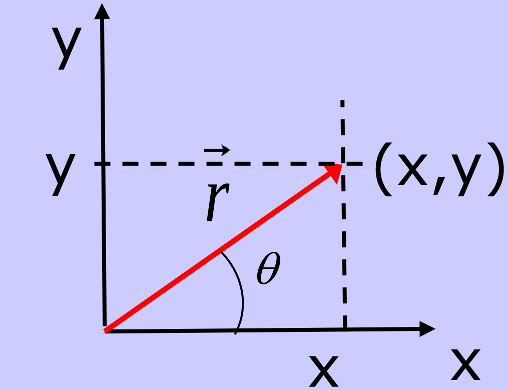
$$\vec{D} = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$

De acuerdo a lo que acabamos de ver, un vector siempre puede expresarse en términos de la suma de los vectores dados por cada una de sus componentes:



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

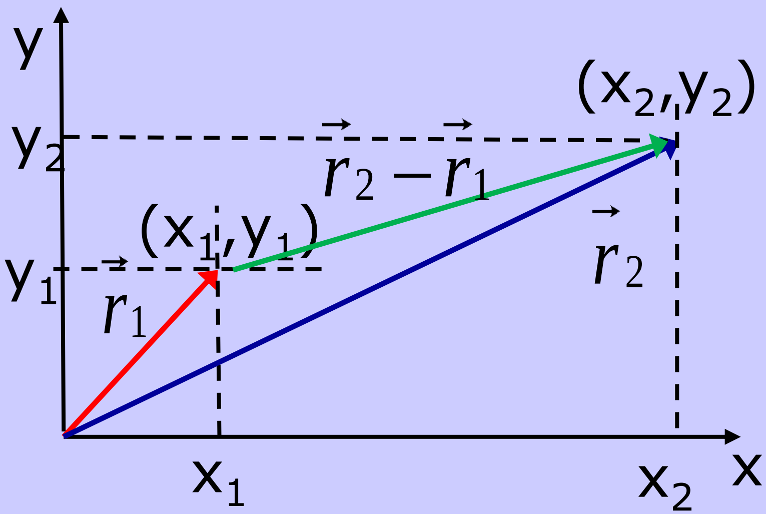
Y lo mismo en 3 dimensiones.



Nota importante:

La posición de un punto cualquiera en el espacio (en el ejemplo, en el plano) cuyas coordenadas son *x* e *y*, puede expresarse por medio del correspondiente vector de posición, **r**.

El módulo de dicho vector indica la distancia que hay entre el punto seleccionado como origen de coordenadas y dicho punto.



Cuando determinamos la diferencia entre dos vectores de posición, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, estamos determinando un vector que tiene la dirección que va a lo largo de la línea dirigida desde "el que se resta" al otro. Su módulo es la distancia entre ambos puntos.

En estas condiciones ya pueden resolverse el <u>problema 3</u> y los apartados a-c del problema 9.

Ejemplo: Encontrar el vector unitario en la dirección dada por los puntos de coordenadas (3, 2, 0) y (6, 8, 2).

Los puntos indicados definen una dirección en el espacio, la que va del uno al otro. Dado que no se indica si hay una dirección preferente (del (3,2,0) al (6,8,2) o la opuesta), tomaremos la que va del primero de los citados al segundo. De esta forma tendremos que:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (6,8,2) - (3,2,0) = (3,6,2)$$

El vector unitario en esa dirección se obtiene dividiendo el mismo por su módulo:

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

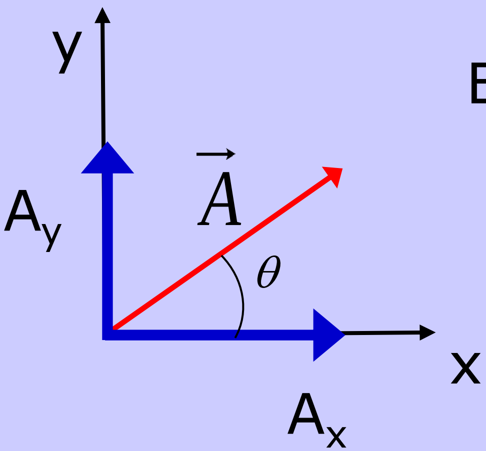
Luego:

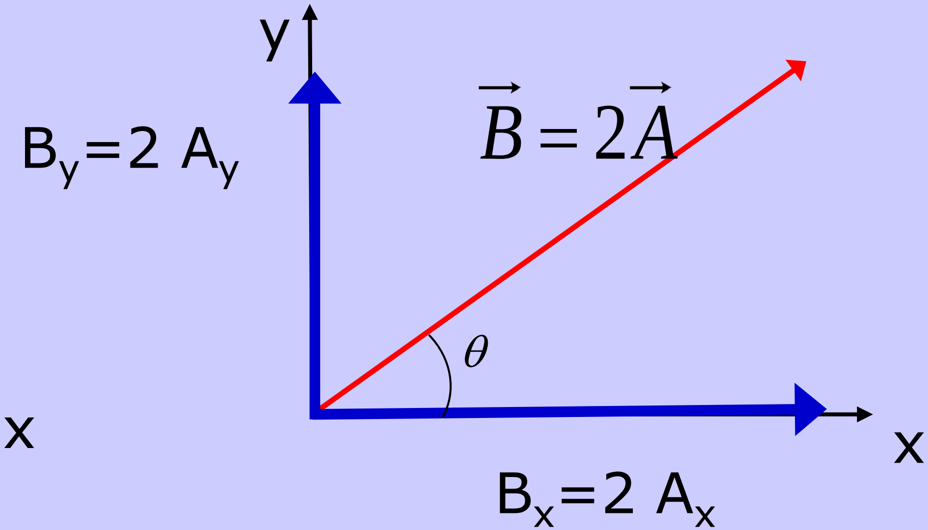
$$\hat{u} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

4. Producto de un escalar por un vector.

El resultado es un vector cuya dirección es la misma que la del vector de partida, cuyo módulo es el de dicho vector multiplicado por el escalar.

Además, cada componente del vector que resulta es igual a la componente correspondiente del vector de partida, multiplicada por el escalar.

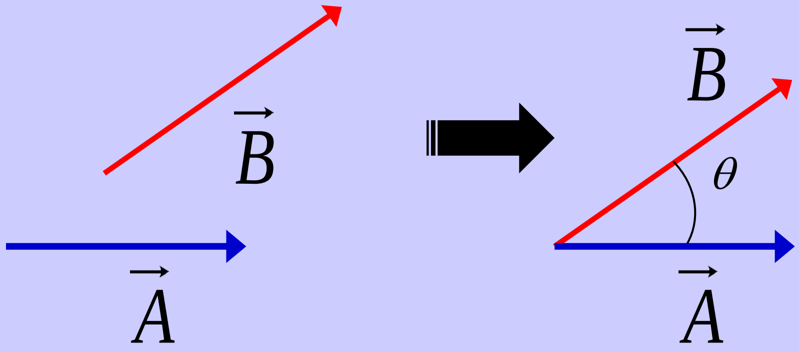




$$\vec{B} = 2\vec{A} \Rightarrow \left|\vec{B}\right| = |2|\left|\vec{A}\right|$$

4 (y 2). Producto escalar de dos vectores.

El resultado es un escalar. Éste puede calcularse de dos formas:



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x, A_y, A_z\right)\cdot\left(B_x, B_y, B_z\right) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Por lo tanto, si se necesita saber cuál es el ángulo que forman dos vectores:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

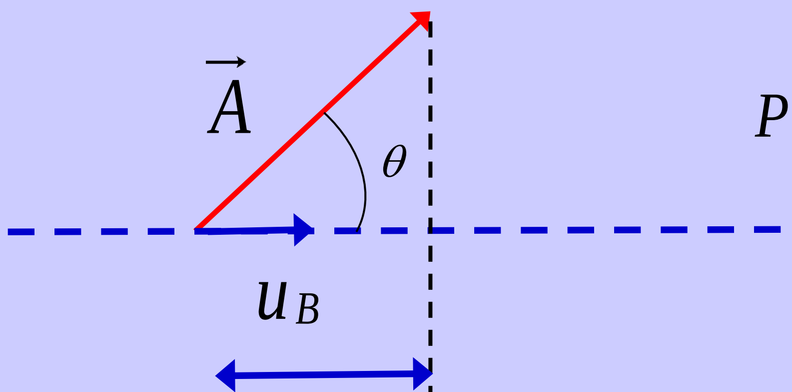
Si dos vectores son perpendiculares $\Rightarrow \theta$ = 90º ó θ = 270º:

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

Si, por el contrario, son paralelos o con direcciones opuestas (θ=0, θ=180º) :

$$\cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = \pm\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|$$

Desde el punto de vista geométrico, el producto escalar permite realizar la proyección de un vector (en el ejemplo de abajo, **A**), sobre una determinada dirección (en el ejemplo de abajo, especificada por la dirección en la que va el vector unitario $\mathbf{u_B}$).

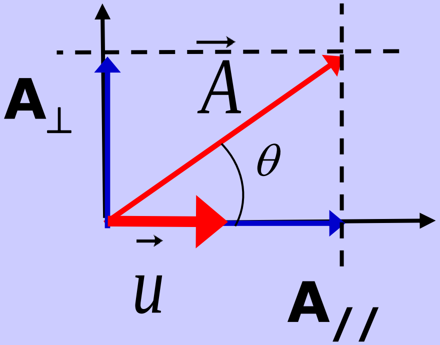


$$P = \vec{A}\cdot u_B = \left|\vec{A}\right|\left|u_B\right|\cos\theta = \left|\vec{A}\right|\cos\theta$$

Longitud de la proyección del vector **A** sobre la recta definida por la dirección de $\mathbf{u_B}$

Ejemplo: Descomponer el vector **A** = (1, 5, 5) en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección dada por el vector unitario **u** = (0, 4/5,−3/5).

Como se vio anteriormente, cualquier vector puede descomponerse en una componente paralela a una dirección dada (en este caso, la indicada por el vector **u**) y otra componente perpendicular a la misma, en el mismo plano que el vector de interés y **u**. Las denotaremos por $\mathbf{A}_{//}$ y $\mathbf{A}_{\perp}$, respectivamente.



En definitiva: $\vec{A} = \overrightarrow{A_{//}} + \overrightarrow{A_{\perp}}$

Cada uno de estos vectores puede expresarse como:

$$\overrightarrow{A_{//}} = A_{//}\overrightarrow{u_{//}};\ \overrightarrow{A_{\perp}} = A_{\perp}\overrightarrow{u_{\perp}}$$

La componente paralela a la dirección indicada es la misma que la del vector **u**, de forma que:

$$\overrightarrow{u_{//}} = \vec{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

El módulo de dicha componente, como se vio anteriormente, puede determinarse usando la proyección del vector **A** sobre la dirección de interés:

$$A_{//} = \vec{A}\cdot\vec{u} = (1,5,5)\cdot\left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = 0 + 4 - 3 = 1$$

Por lo tanto: $$\overrightarrow{A_{//}} = A_{//}\overrightarrow{u_{//}} = 1\cdot\left(0,\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right) = \left(0,\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$$

La deducción de la otra componente es inmediata:

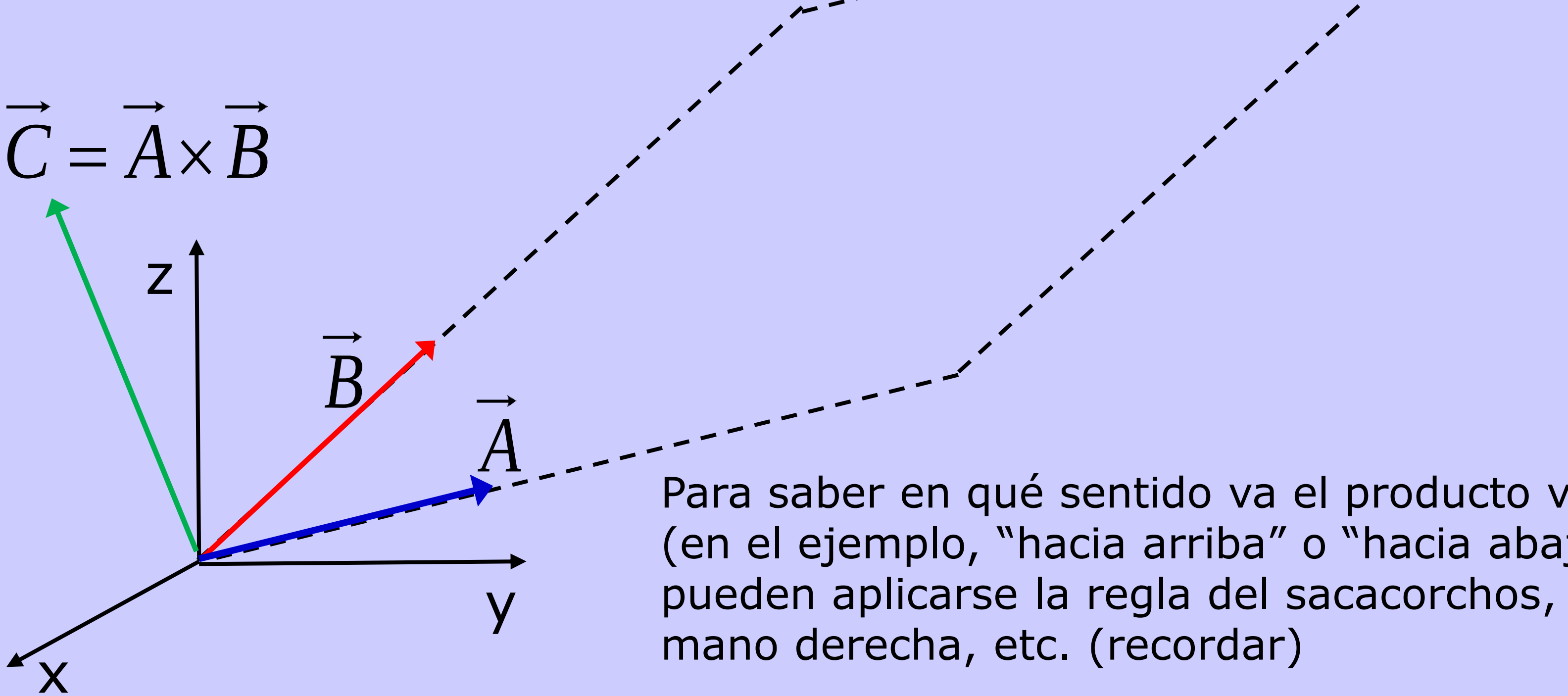
$$\vec{A} = \overrightarrow{A_{//}} + \overrightarrow{A_{\perp}} \Rightarrow \overrightarrow{A_{\perp}} = \vec{A} - \overrightarrow{A_{//}} = (1,5,5) - \left(0,\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right) = \left(1,\frac{21}{5},\frac{28}{5}\right)$$

Puede comprobarse de forma inmediata que, efectivamente, $\mathbf{A}_{//}$ y $\mathbf{A}_{\perp}$ son perpendiculares calculando su producto escalar, el cual es nulo.

5. Producto vectorial de dos vectores.

El resultado es un vector cuya dirección es perpendicular al plano que definen los dos vectores (traducir al castellano).

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

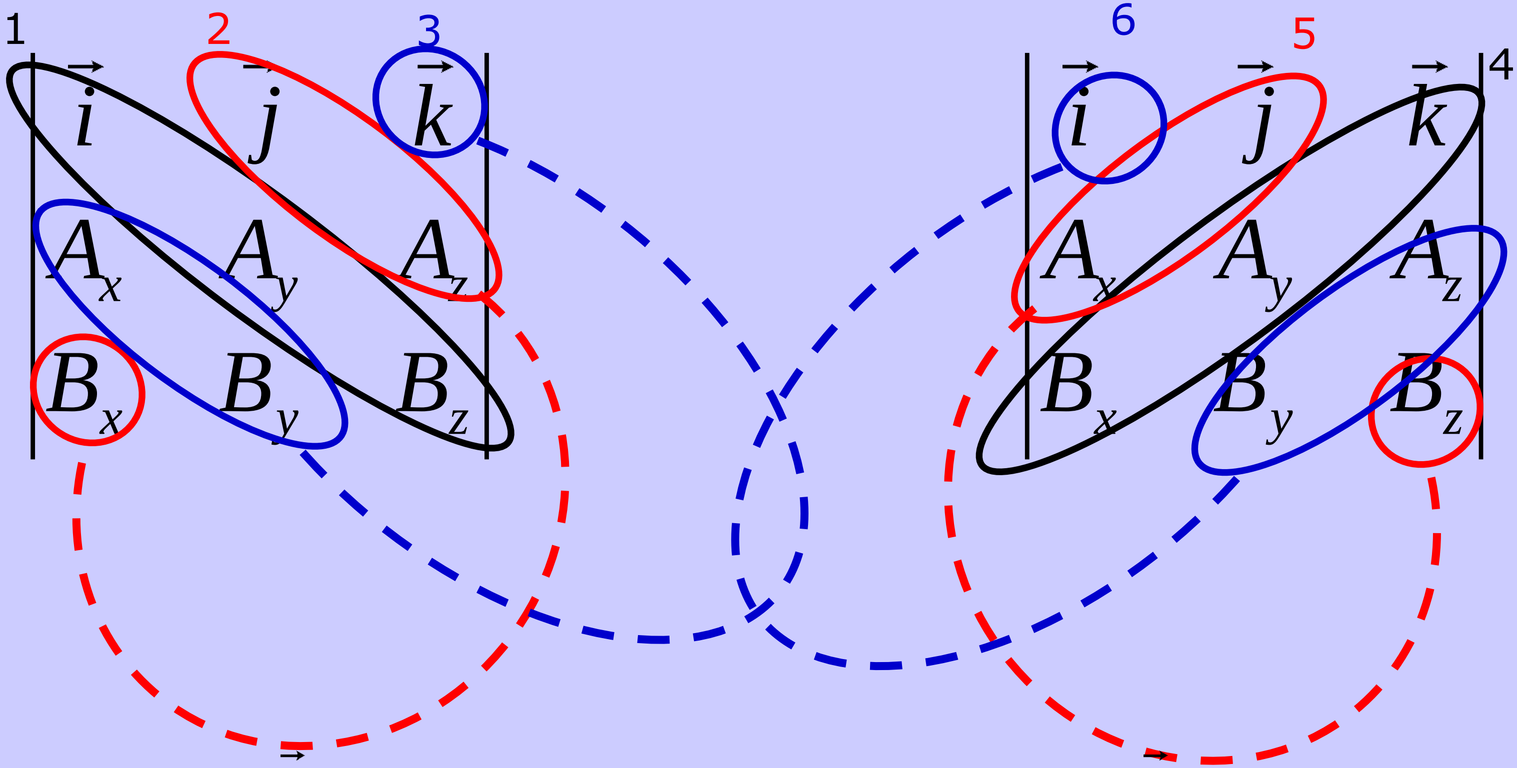


Para saber en qué sentido va el producto vectorial (en el ejemplo, "hacia arriba" o "hacia abajo") pueden aplicarse la regla del sacacorchos, la de la mano derecha, etc. (recordar)

Las componentes pueden calcularse usando un determinante (¡ojo con el orden de las filas!)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Cómo desarrollar un determinante: Se multiplican entre sí los miembros de las tres diagonales que se indican abajo. Los productos correspondientes a las diagonales 1,2, 3 llevan signo positivo. Los de las diagonales 4, 5, 6, signo negativo.



$1 \rightarrow A_y B_z \vec{i}$

$2 \rightarrow A_z B_x \vec{j}$

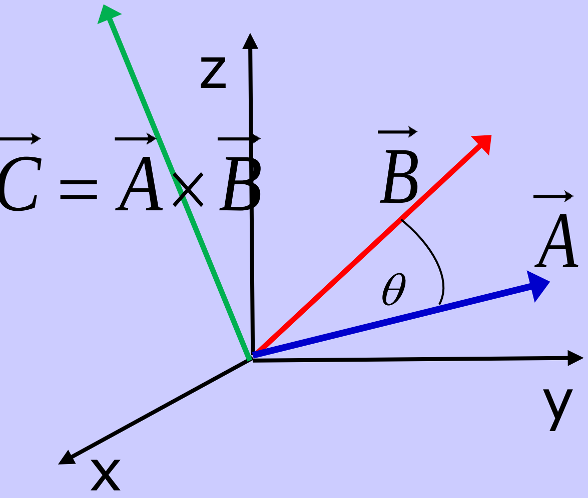
$3 \rightarrow A_x B_y \vec{k}$

$4 \rightarrow -A_y B_x \vec{k}$

$5 \rightarrow -A_x B_z \vec{j}$

$6 \rightarrow -A_z B_y \vec{i}$

Y se suma todo.



El módulo del producto vectorial puede hallarse de dos formas:

1) Hallando las componentes del vector producto y determinando su módulo:

$$\vec{C}=C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{C}\right|=\sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}$$

2) Si se conoce el ángulo que forman ambos vectores (el menor ángulo posible sobre el plano que definen), a través de la relación:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}\Rightarrow\left|\vec{C}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|sen\theta$$

Con lo cual disponemos de una forma alternativa de determinar el ángulo entre dos vectores:

$$sen\theta=\frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

De la relación anterior se deduce que cuando dos vectores son paralelos o tienen dirección opuesta (θ = 0º, θ = 180º), su producto vectorial es nulo.
Por el contrario, dados dos vectores de módulos cualesquiera, el máximo valor posible del producto vectorial se obtiene cuando son perpendiculares entre sí (θ = 90º).

El producto vectorial cumple la propiedad anticonmutativa:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Por otra parte:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

Y además:

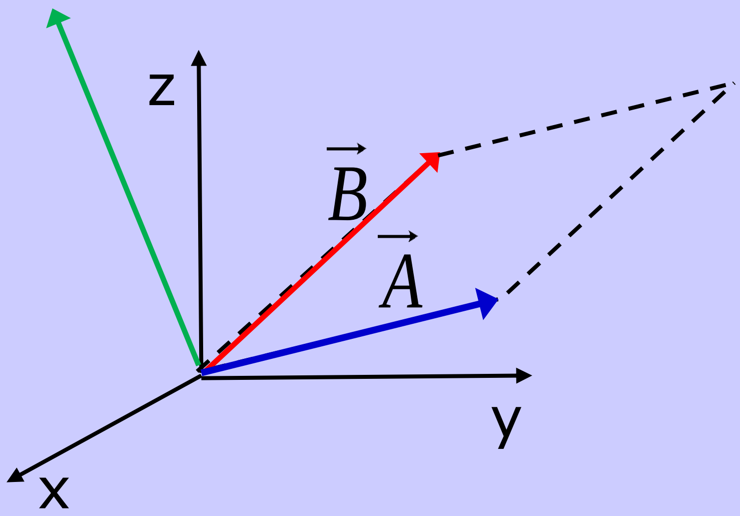
$$\vec{A} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

¿Por qué?

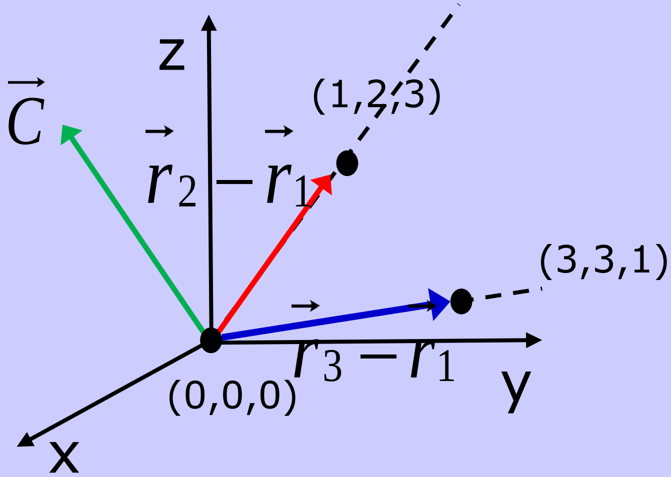
$$\vec{B} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

EL módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo definido por los mismos:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$



Ejemplo: Calcular el vector unitario perpendicular al plano determinado por los puntos (0, 0, 0), (1, 2, 3) y (3, 3, 1).



Los puntos indicados en el enunciado (a los que podemos denotar por medio de sus respectivos vectores de posición $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ definen dos vectores que, al indicar direcciones distintas, definen un plano. Por ejemplo, tomando como referencia común el punto (0,0,0,):

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (1,2,3) \qquad \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (3,3,1)$$

El producto vectorial de ambos vectores, al que denotaremos por **C**, marca la dirección perpendicular a dicho plano:

$$\vec{C} = \left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right) \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (7, -8, 3)$$

Para hallar el vector unitario correspondiente, **u**, basta con dividir **C** por su módulo:

$$\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \frac{7}{\sqrt{122}}\vec{i} - \frac{8}{\sqrt{122}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{122}}\vec{k}$$