Cinemática de la partícula en una dimensión

- Movimiento rectilíneo: *x, y, z:* $x=x(t)$
- Movimiento a lo largo de una curva: $s=s(t)$
  - Movimiento sobre una circunferencia: $s=s(t)$, $\varphi=\varphi(t)$

Movimiento rectilíneo: $x=x(t)$; $x_1=x(t_1)$; $x_2=x(t_2)$

Velocidad media:
$$v_m=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

Velocidad instantánea:
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

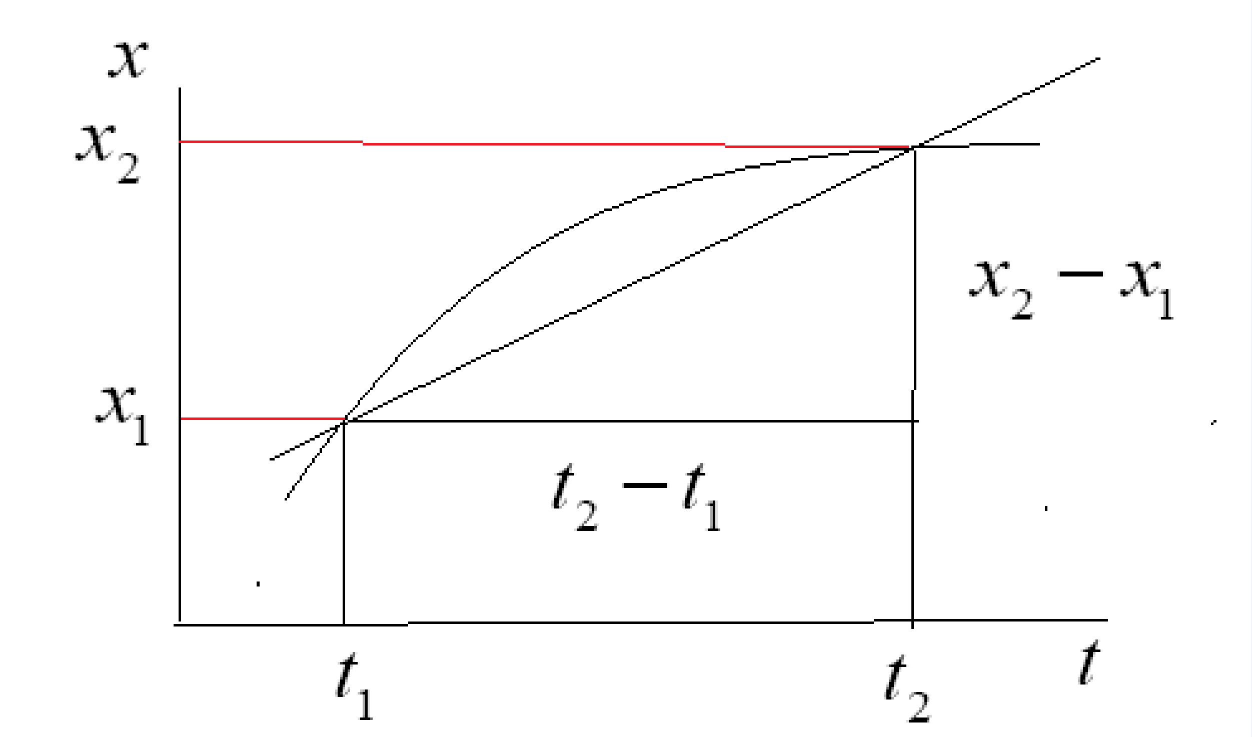
Aceleración media:
$$a_m=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

Aceleración instantánea:
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

Significado del valor medio

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad media: pendiente de la recta secante a $x = x(t)$ en los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2)



Análogamente la aceleración media respecto de la curva $v = v(t)$.

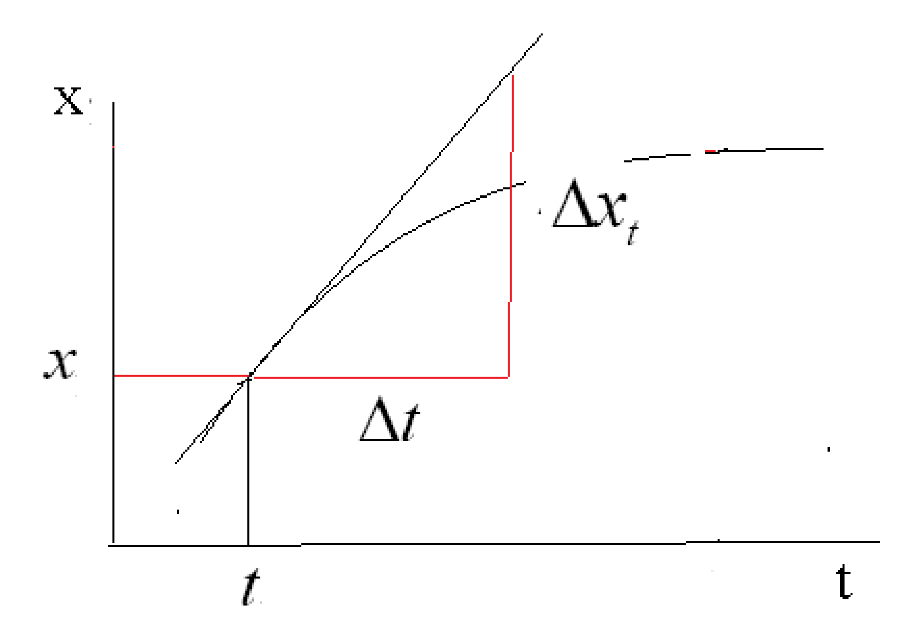
$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Significado de la derivada

Velocidad instantánea:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Pendiente de la recta tangente a x=*x(t)* en el punto (*t*,*x*)



$$v = \frac{\Delta x_t}{\Delta t}$$

Pendiente medida en la recta tangente, no en la curva

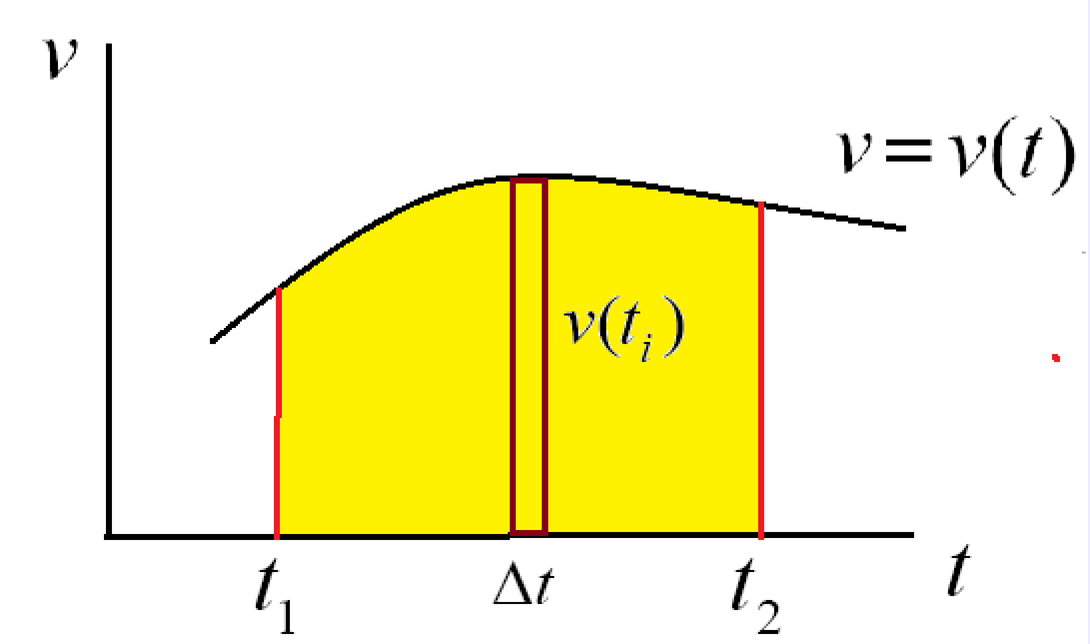
Δx_t medido en la recta tangente, no en la curva

Análogamente para otra derivadas como la aceleración instantánea: $a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$

Integrales de v(t) y a(t)

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t$$

"Area" bajo la curva *v*=*v*(t) entre t_1 y t_2



$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

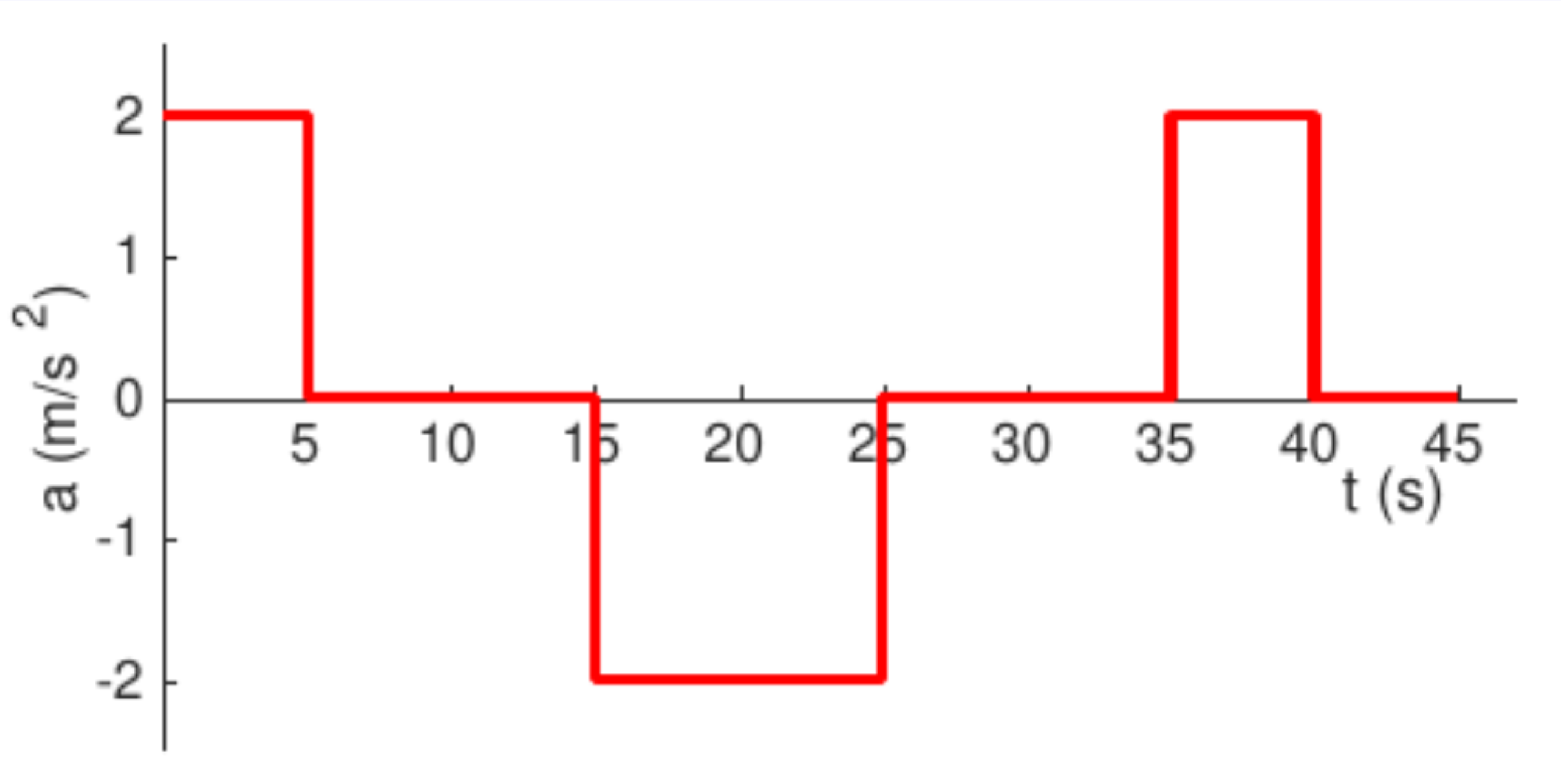
Análogamente:

$$v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t$$

"Area" bajo la curva *a*=*a*(t) entre t_1 y t_2

Aplicación de ejemplo

Sabiendo que en *t=0*, *x=0* y *v=0*. Dobujar la gráfica de v(t) y obtener x a los 45 s.

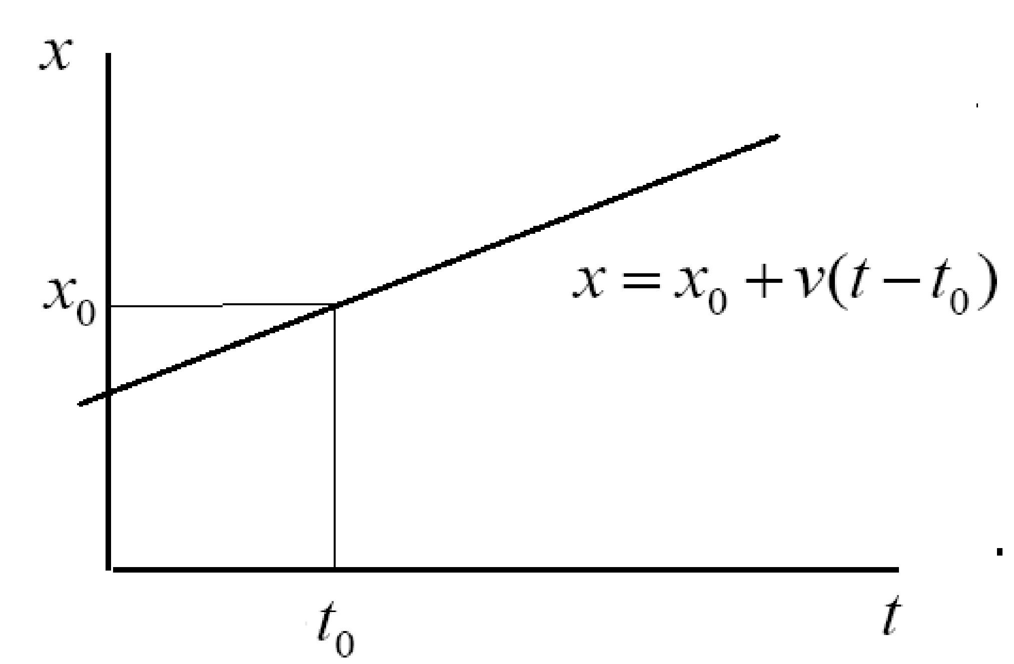


Movimiento uniforme

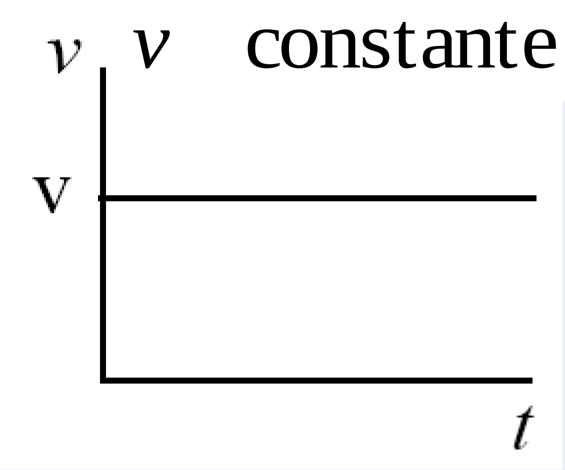
Con velocidad *v* constante $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + v(t - t_0)}$$



Recta de pendiente *v* que pasa por (t_0,x_0)



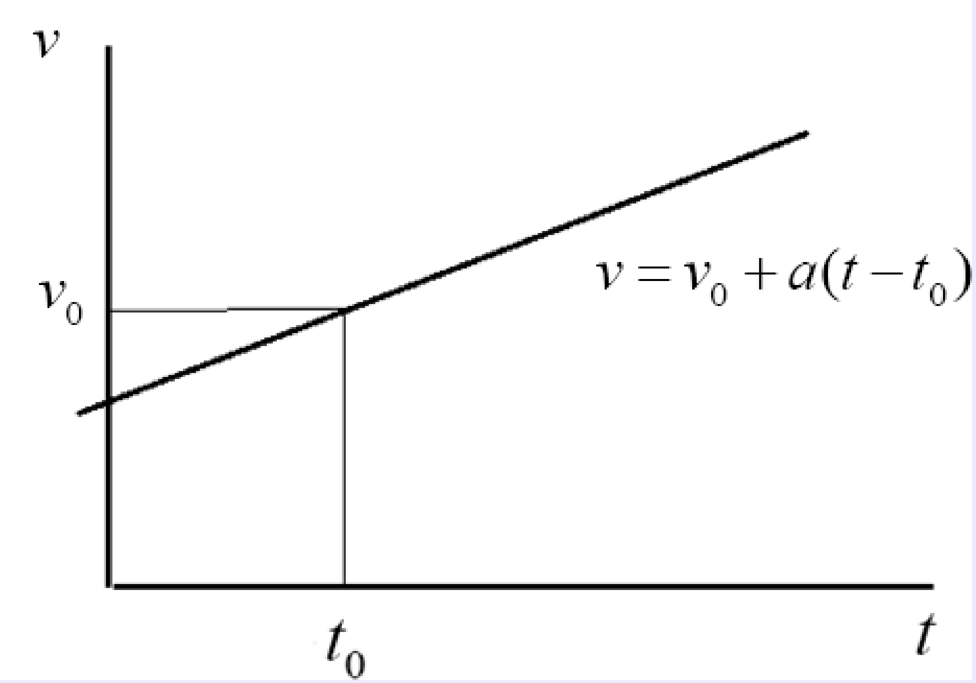
Movimiento uniformemente acelerado

Con aceleración a constante

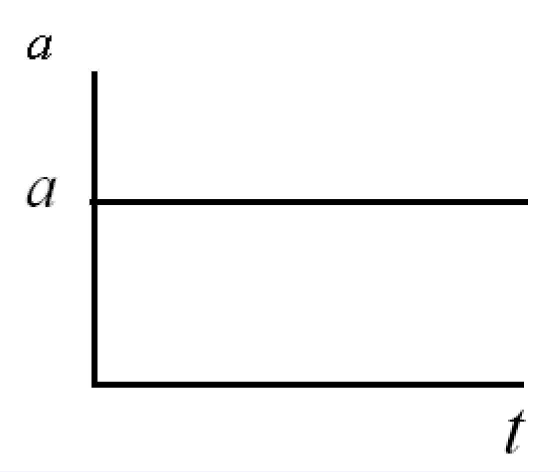
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t\Rightarrow \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}v=\int_{t_0}^{t}a\,\mathrm{d}t\Rightarrow v-v_0=a(t-t_0)\Rightarrow$$

$$\boxed{v=v_0+a(t-t_0)}$$

Recta de pendiente a que pasa por (t_0,v_0)



a constante



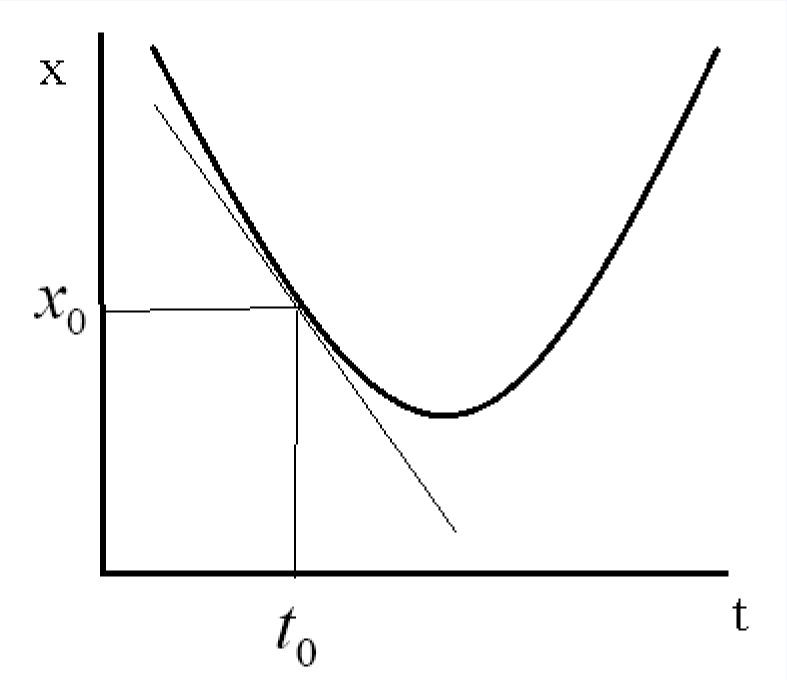
Movimiento uniformemente acelerado

Con aceleración a constante

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \Rightarrow \mathrm{d}\,x = v\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\,x = \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right] \mathrm{d}\,t \Rightarrow$$

Deducir:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}$$



Parábola que pasa pasa por (t_0,x_0).

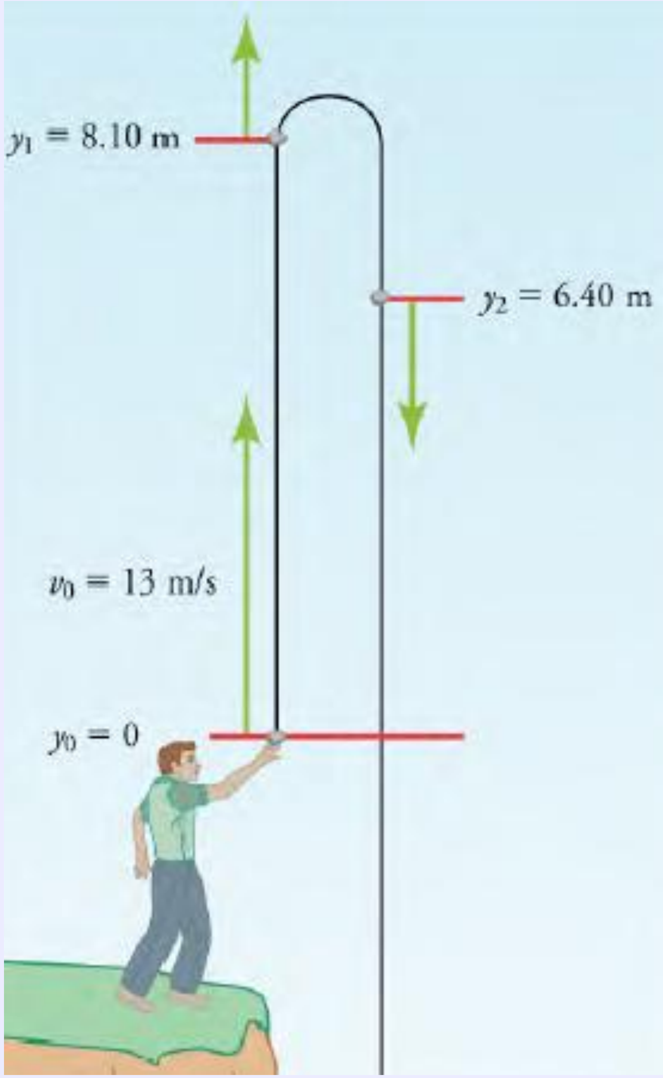
En el ejemplo v_0, pendiente de la recta tangente, es negativa y a positiva

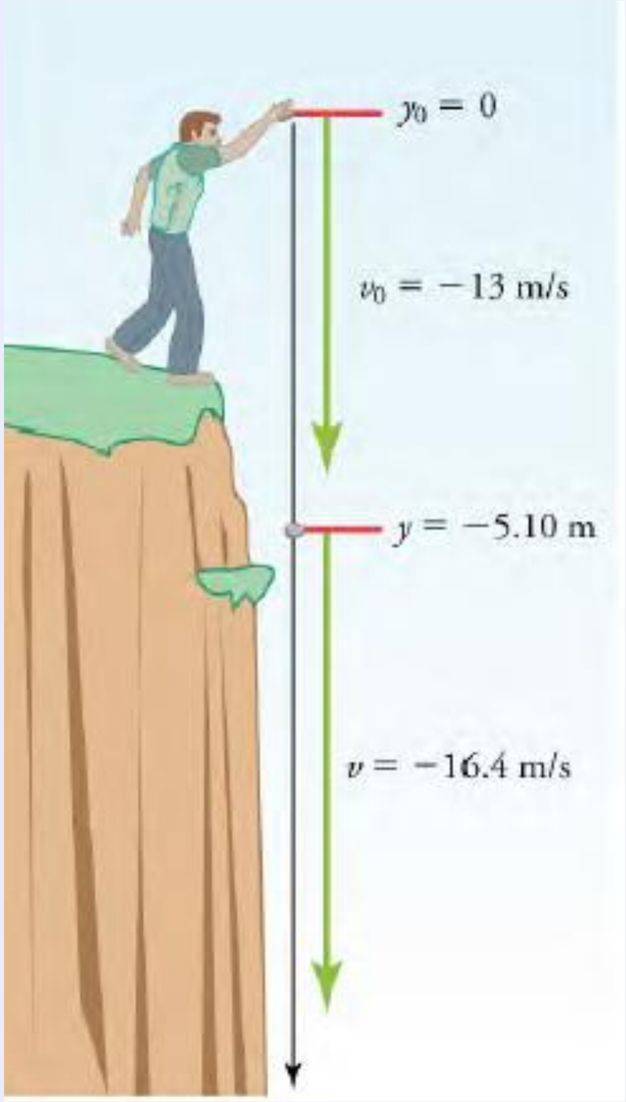
---

Deducir:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Movimiento vertical en el campo gravitatorio en la superficie de la tierra





Movimiento vertical en el campo gravitatorio en la superficie de la tierra (2)

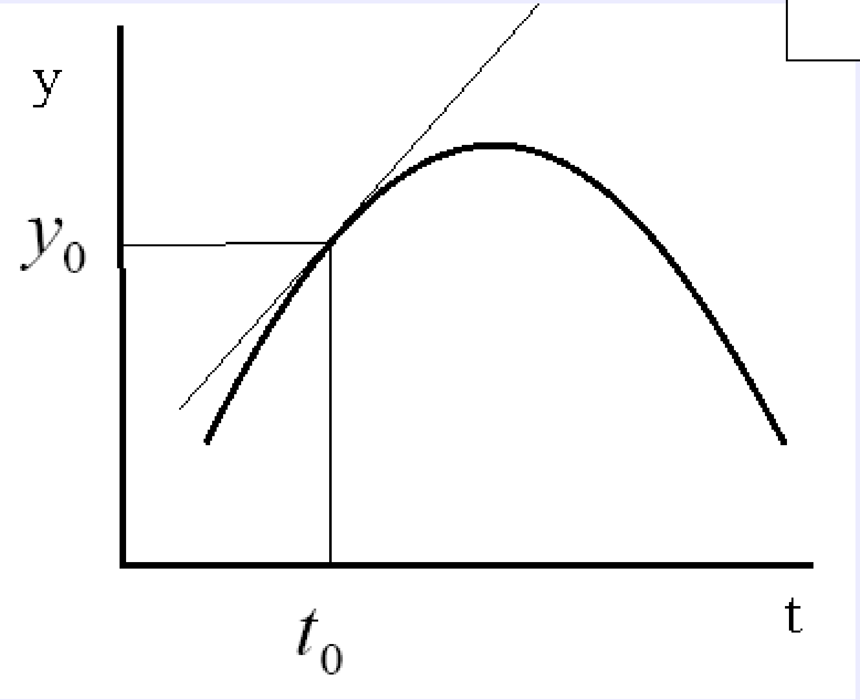
$g = 9.8 \mathrm{m/s^2}$, g aceleración de la gravedad

Movimiento uniformemente acelerado con a=-g

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = -g$$

$$\boxed{v = v_0 - g(t - t_0)}$$

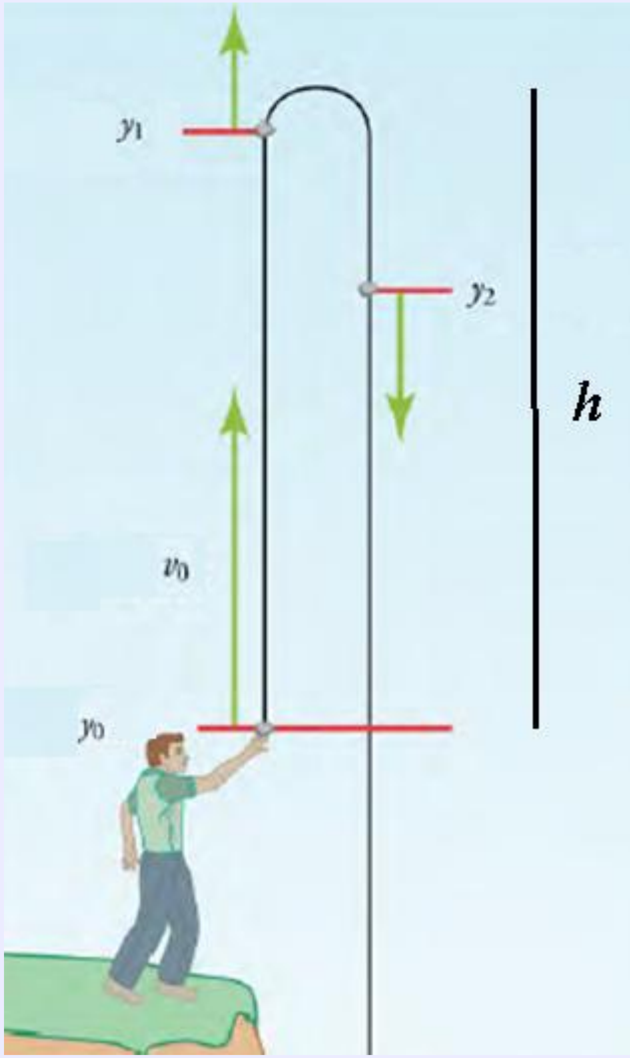
$$\boxed{y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2}$$



Parábola que pasa pasa por (t_0,y_0).

En el ejemplo v_0, pendiente de la recta tangente, es positiva y obivamente a=-g es siempre negativa

Movimiento vertical en el campo gravitatorio en la superficie de la tierra (3)



Deducir: velocidad de caída desde el reposo y una altura *h*:

$$v = -\sqrt{2gh} \qquad |v| = \sqrt{2gh}$$

¿Tiempo de caída?

Deducir: altura alcanzada si se lanza un objeto con velocidad v_0

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

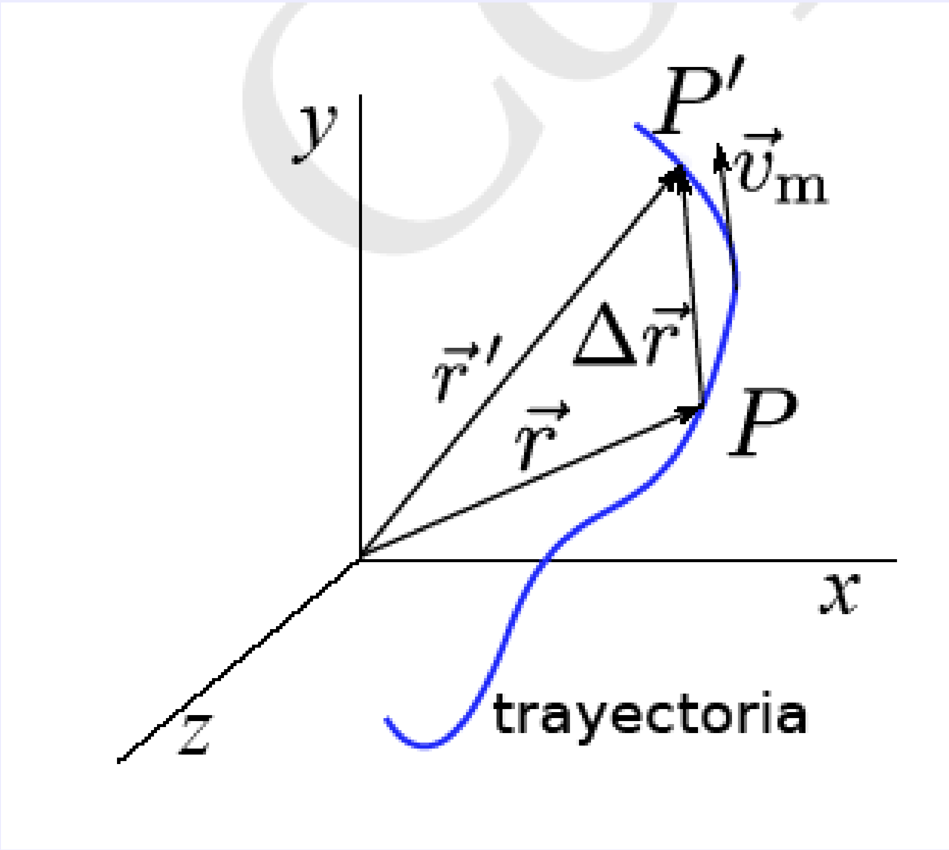
¿Tiempo de subida?

En general, deducir:

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

Cinemática de la partícula en 2 o 3 dimensiones

Cinemática de la partícula en 2 o 3 dimensiones



Vector de posición en *t*:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + x(t)\vec{k}$$

Velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

$$\vec{v}_m = v_{x,m}\vec{i} + v_{y,m}\vec{j} + v_{z,m}\vec{k}$$

$$v_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$, etc.

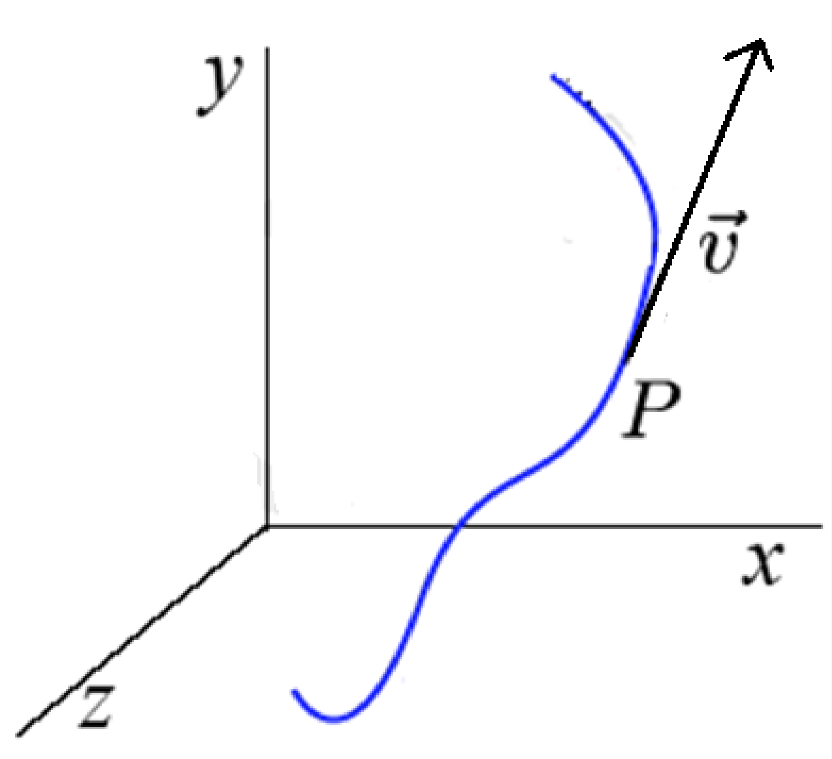
Trayectoria: curva descrita por el extremo del vector de posición

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Velocidad instantánea

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en cada punto

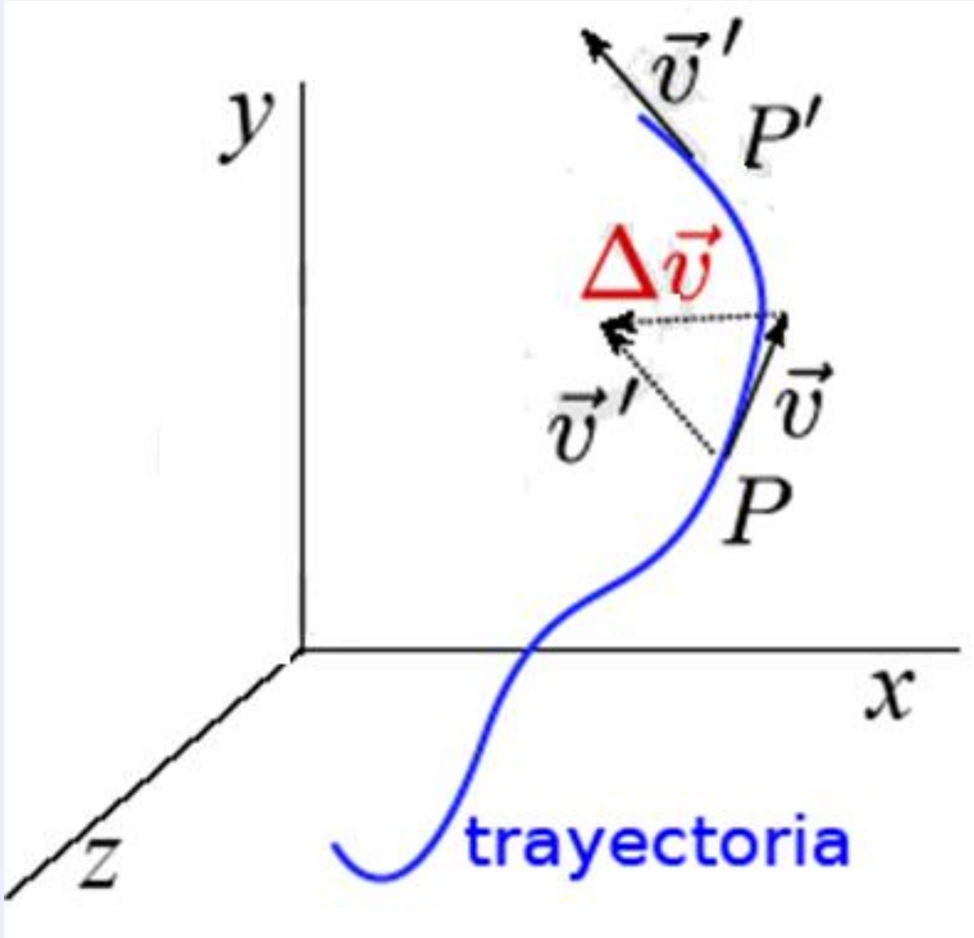
Vector unitario tangente a la trayectoria:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \quad \text{con} \quad v = |\vec{v}|}$$

v: celeridad

$$\vec{v} = v\,\vec{\tau}$$

Aceleración media



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t}$$

$$\vec{a} = a_{m,x}\vec{i} + a_{m,y}\vec{j} + a_{m,z}\vec{k}$$

$$a_{m,x} = \frac{\Delta v_{m,x}}{\Delta t} = \frac{v_{m,x}(t') - v_{m,x}(t)}{t' - t}$$

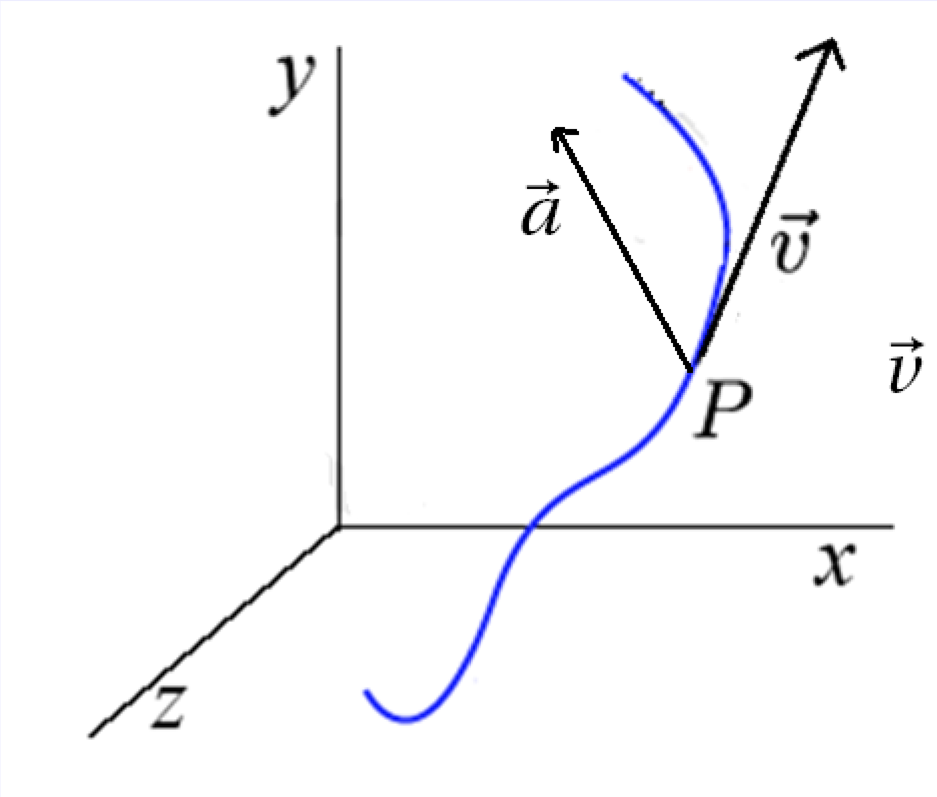
y similares en *y, z*

La aceleración media entre puntos próximos apunta hacia el interior de la curva

Aceleración instantánea

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$\vec{v}$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$$

… y similares

Apunta hacia el interior de la trayectoria

No es es tangente a la trayectoria, sino a la curva $\vec{v}(t)$ (no representada)

Movimiento uniforme

$\vec{v}$ constante

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

Equivale a tres integrales de la forma:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\,dt \Rightarrow x - x_0 = v_x(t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$\vec{r}$

$\vec{r}$

… y similares. Luego: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$

Equivale a tres ecuaciones en cada componente

$$x = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_y(t - t_0)$$

$$z = z_0 + v_z(t - t_0)$$

Movimiento uniformemente acelerado

$$\vec{a} \quad \text{constante}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

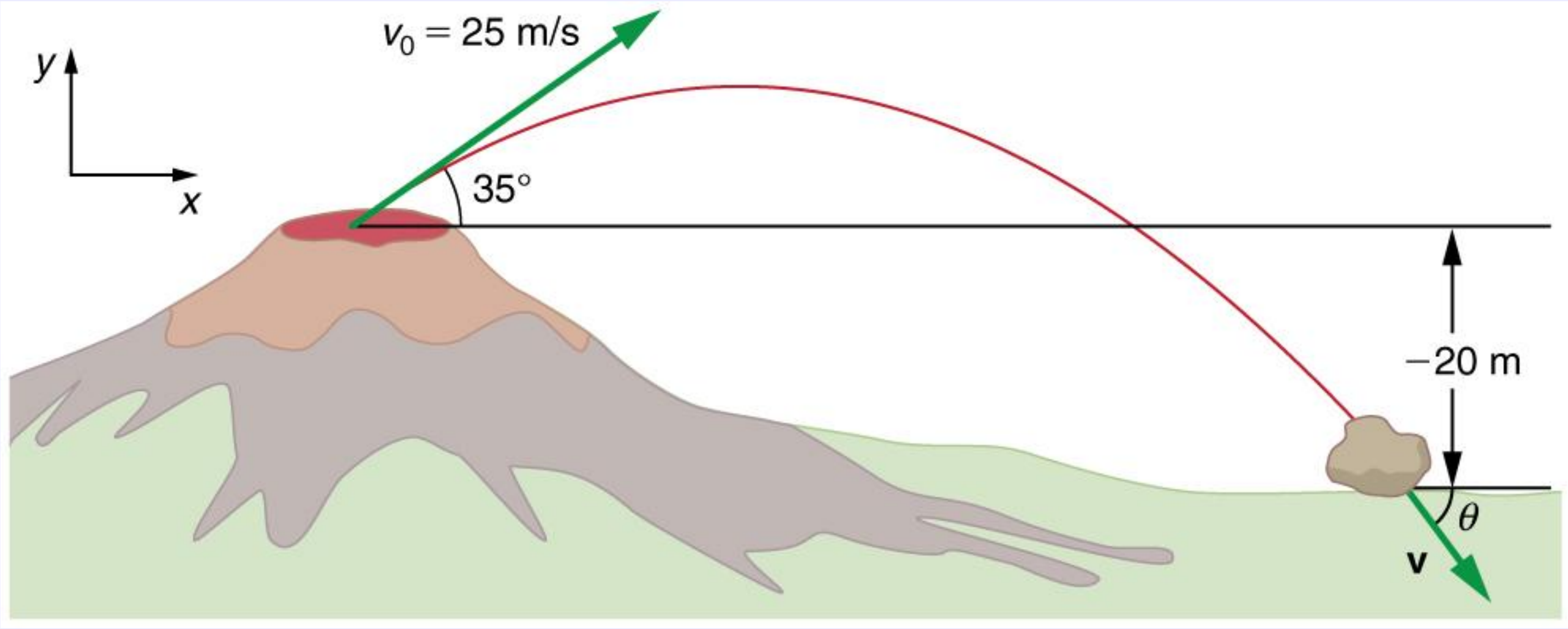
Equivale a tres ecuaciones en cada componente

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Equivale a tres ecuaciones en cada componente

Aplicación: movimiento en el campo gravitatorio cerca de la superficie de la tierra



¿A qué distancia llega la roca? ¿Cuánto tarda en caer? ¿A qué altura sube? ¿Con qué ángulo llega más lejos?

Ecuaciones básicas: movimiento en el campo gravitatorio cerca de la superficie de la tierra

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j} \quad \text{constante}, g = 9.8\,\text{m/s}^2$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g \quad \text{constante},$$

Deducir con t_0=0

$$v_x = v_{0,x}, \quad x = x_{0,x} + v_x t$$

$$v_y = v_{0,y} - gt, \quad y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

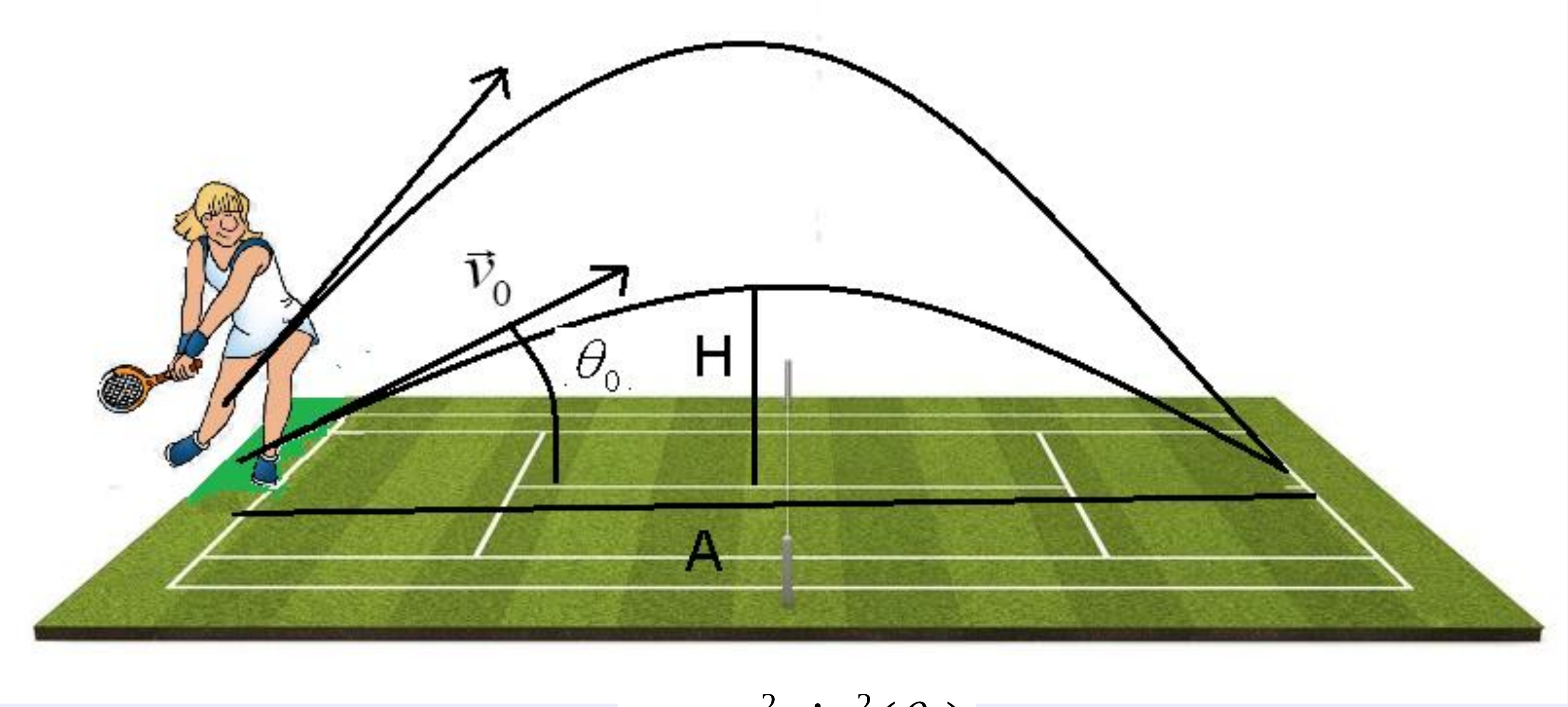
Equivale a la superposición de un movimiento uniforme en el eje *x* y un movimiento uniformemente acelerado en el eje *y*

En función del módulo y del ángulo de salida

$$v_{0,x} = v_0 \cos(\theta_0), \quad v_{0,y} = v_0 \sin(\theta_0)$$

Altura máxima H y alcance A:

Suponemos $t_0=0$, $x_0=0$, $y_0=0$.

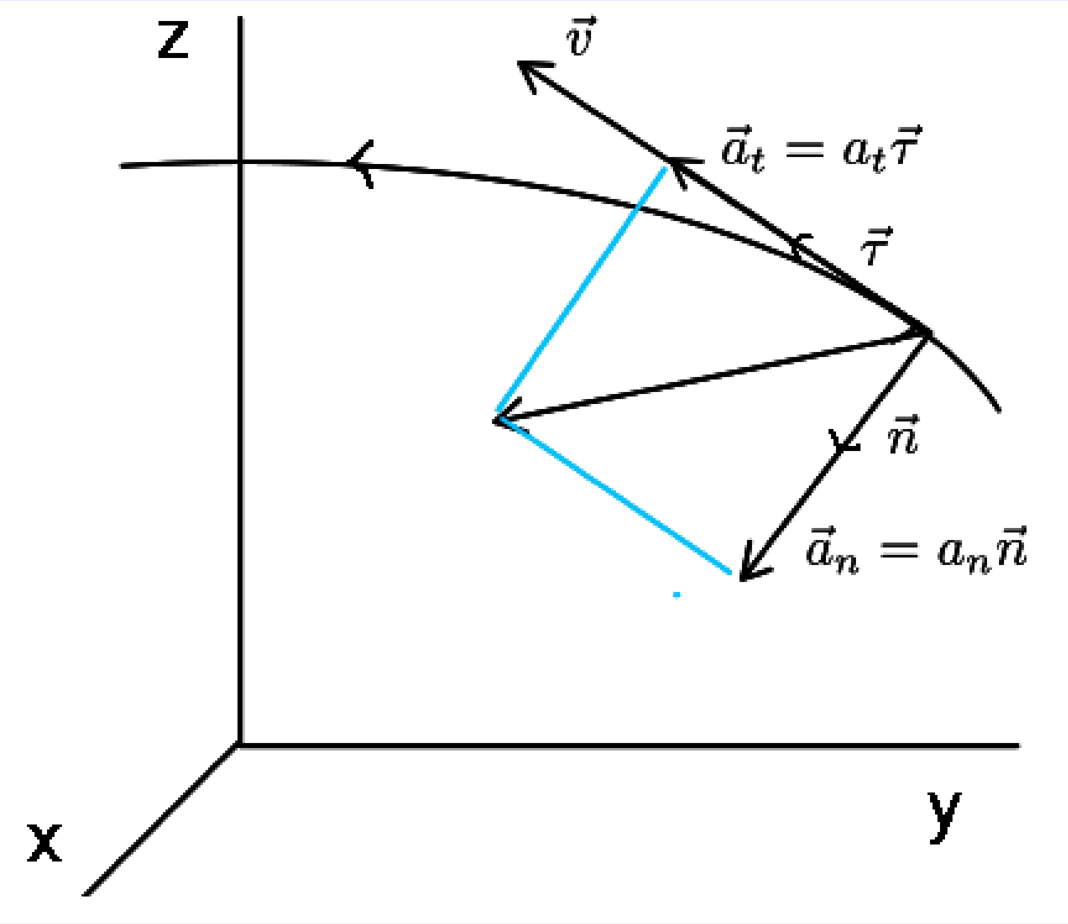


Altura máxima, $v_y=0$ → $$H = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

Alcance, $y=0$ → $$A = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

Hay dos ángulos con el mismo alcance pero distinta altura uno θ_0 menor que 45º (tiro tenso o bajo) y otro θ'_0=90º- θ_0 mayor que 45º (globo o tiro alto)

Componentes intrínsecas de la aceleración



Aceleración tangencial: componente paralela a la velocidad

$$\vec{a}_t = a_t\vec{\tau}$$

Aceleración normal componente perpendicular a la velocidad

$$\vec{a}_n = a_n\vec{n}$$

Matemáticamente:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

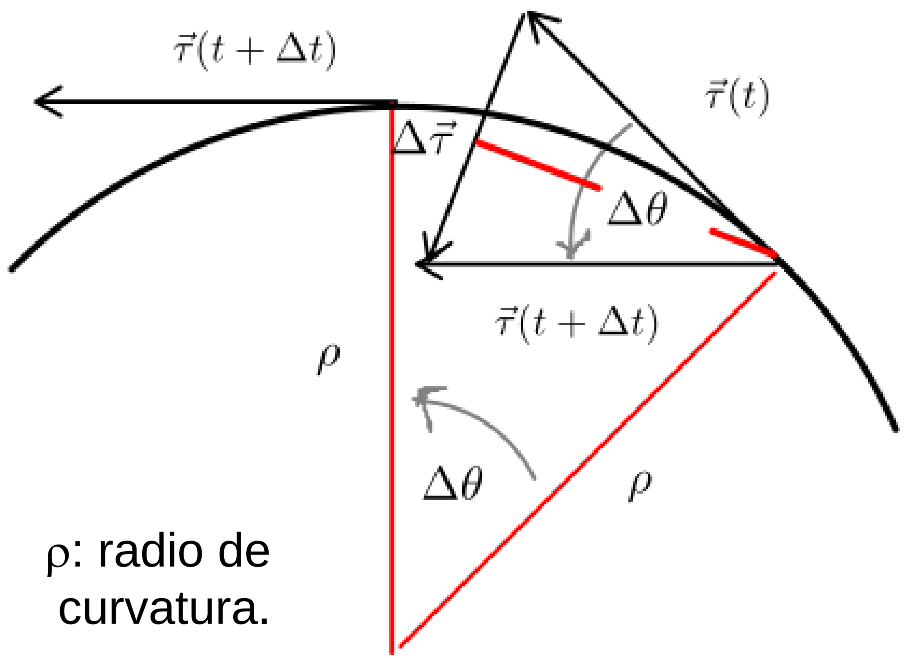
1-La derivada de un vector unitario es perpendicular al mismo

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = \left|\vec{\tau}\right|^2 = 1 \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}}{dt} = 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}; \quad \text{c.q.d}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \quad \boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

La aceleración tangencial cambia el módulo de la velocidad. Positiva o negativa



ρ: radio de curvatura.

Una curva se puede aproximar a un trozo pequeño a un arco de circunferencia. Vemos que para $\Delta\theta$ pequeño:

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \Delta\theta \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta t|} \approx \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \left|\frac{ds/\rho}{dt}\right| = \left|\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\right| = \frac{v}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}}$$

La aceleración normal cambia solamente la dirección.
Es siempre positiva. La dirección y sentido de $\vec{n}$, el vector unitario normal a la curva es hacia su interior.

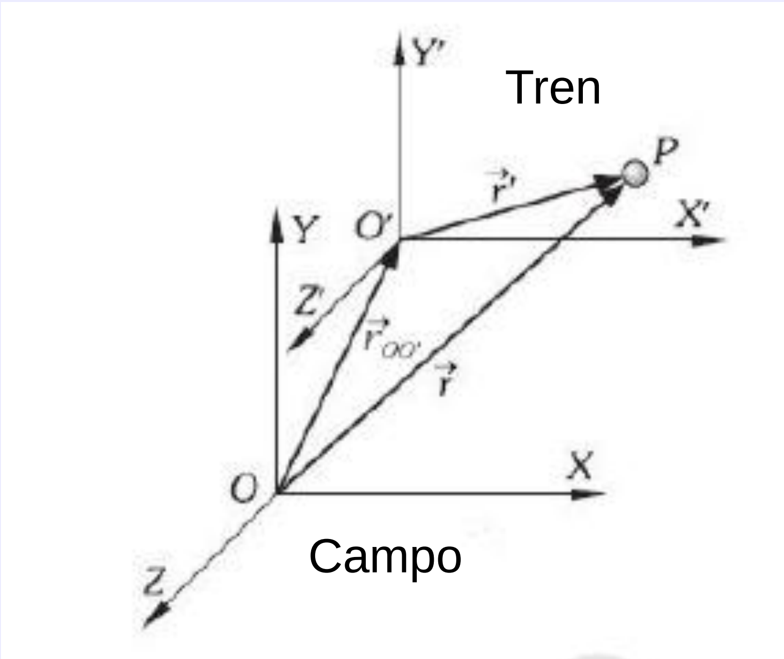
Tipos de movimiento según a_t y a_n

- $a_n=0 \rightarrow \rho=\infty$: movimiento rectilíneo
  - $a_t=a$ cte: movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
  - $a_t=0$: movimiento rectilíneo uniforme.

- $a_t=0$: v cte: Velocidad constante sobre una curva.

- ρ = R=cte: movimiento circular de radio R
  - $\boxed{v = R\omega}$ $\quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dR\omega}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \quad \boxed{a_t = R\alpha}$
  - a_t *cte* y α cte: movimiento circular uniformemente acelerado
  - $a_t=0$, α=0, v cte, ω cte. Movimiento circular uniforme

Movimiento de traslación relativo



Transformaciones de Galileo

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{oo'}$$

Derivando

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{oo'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{oo'}$$

Si O'X'Y'Z' se mueve con velocidad constante respecto a OXYZ: $\vec{a}_{oo'} = 0$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Por eso las leyes de la física son iguales en lo que se llama sistemas de referencia inerciales, que se mueven unos respecto a otros con velocidad constante

Travesía Internacional del Guadiana

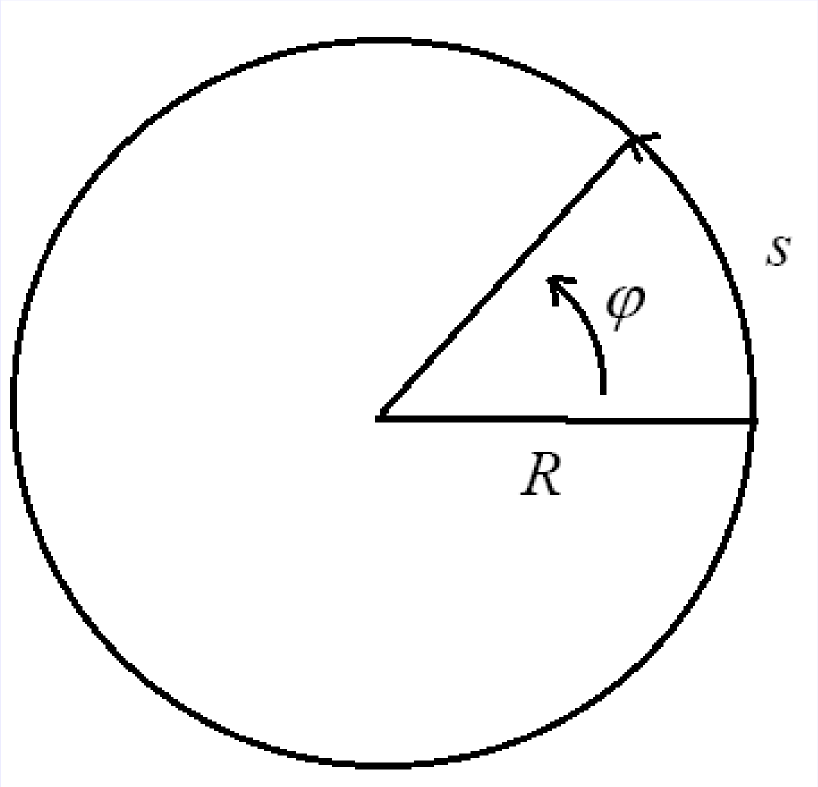
Rumbo travesia 15ºE; Distancia d=1.9 km.
Rumbo corriente 10ºW, velocidad 4 km/h.
Nadador 1: 3km/h; Nadador 2:   2km/h.
Calcular: Ángulo a nadar con la línea de boyas.
Tiempo en llegar cada uno. Velocidad mínima y tiempo máximo.

Movimiento circular: a lo largo de una circunferencia

Arco *s*: distancia medida sobre la circunferencia $s = R\varphi$

Velocidad y aceleración sobre el arco: $v_s = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ $a_s = \dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$ $|v_s| = v = |\vec{v}|$ $|a_s| = |a_t|$

Velocidad y aceleración angular: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$



Relación entre magnitudes lineales y sobre el arco:

$s = R\varphi$

$v_s = R\omega$

$a_s = R\alpha$

Unidades SI:

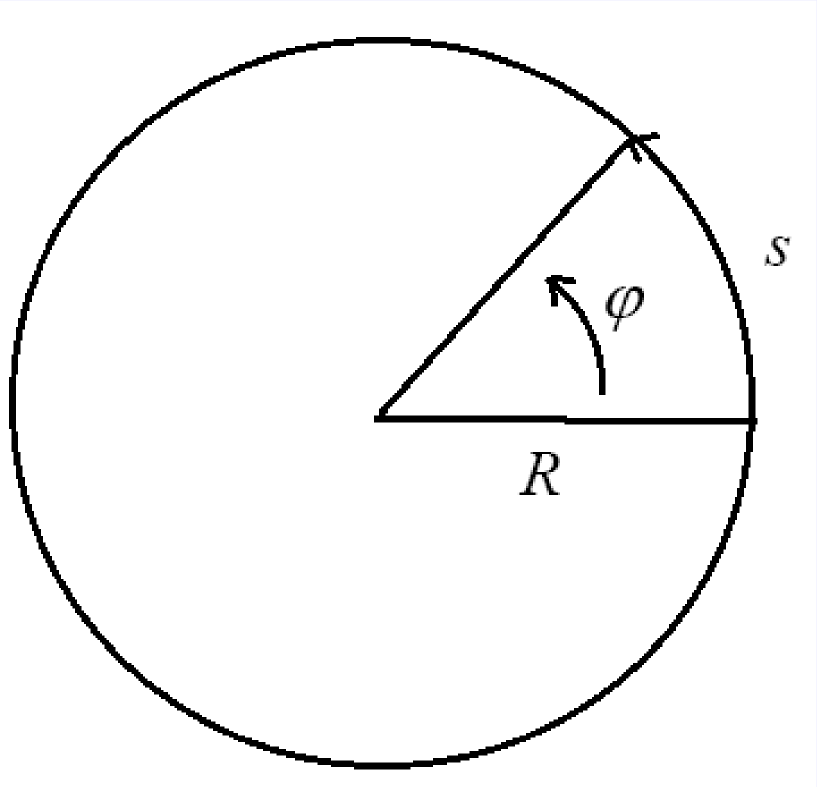
φ	ω	α
rad	rad/s	rad/s^2

Movimiento circular con velocidad angular constante

Velocidad lineal y angular constantes: $v_s = R\omega$

Periodo T: tiempo en dar una vuelta $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Frecuencia: número de vueltas por unidad de tiempo: $f = \dfrac{1}{T}$



Aceleración lineal y angular :

$a_s = a_t = 0$ $\alpha = 0$ $a_n = \dfrac{v_s^2}{R} = \omega^2 R$

Arco y ángulo:

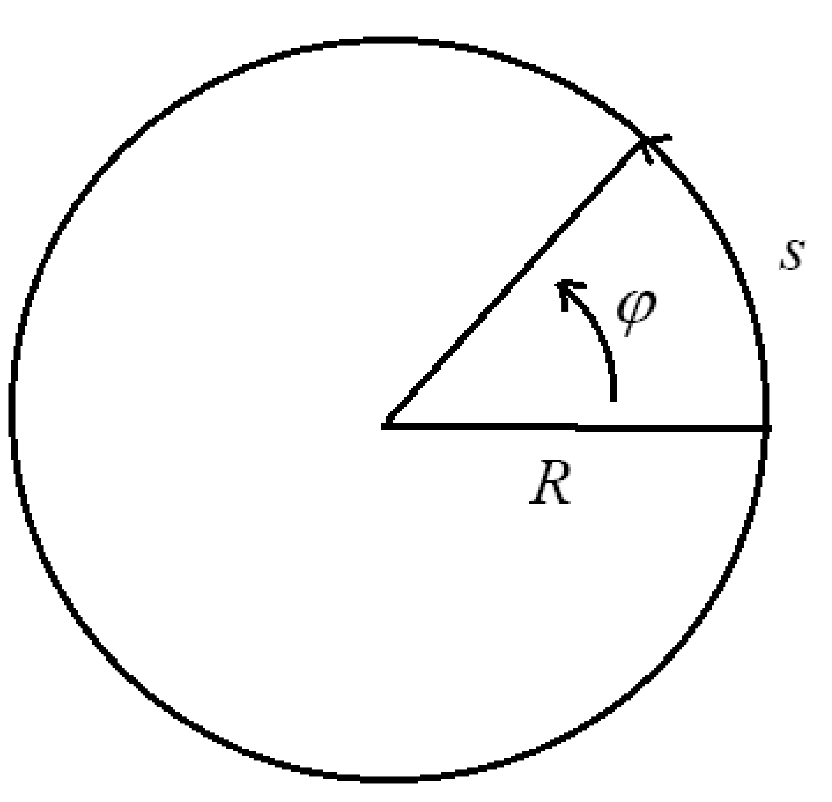
$s = s_0 + v_s(t - t_0)$ $s = R\varphi$

$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$

Movimiento circular con aceleración angular constante

Aceleración tangencia y angular constantes: $\alpha, \quad a_s \quad \text{ctes}$

$$a_s = R\alpha$$



$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \qquad v_s = R\omega$$

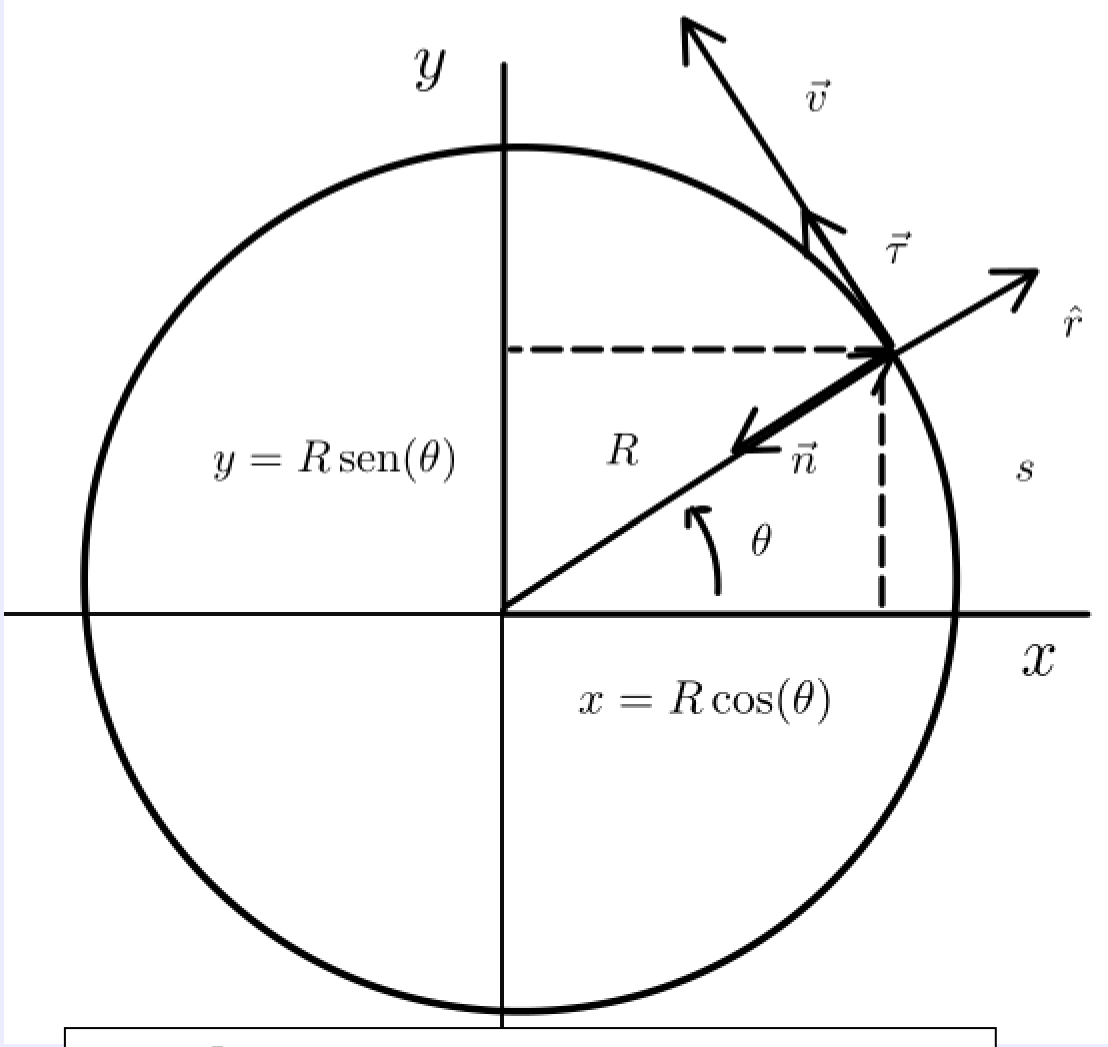
$$v = v_0 + a_s(t - t_0)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

$$s = s_0 + v_{s,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_s(t - t_0)^2$$

$$s = R\varphi$$

Descripción del movimiento circular en dos dimensiones



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} =$$
$$R\cos(\theta)\vec{i} + R\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} =$$
$$R(\cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{j}) = R\hat{r}$$

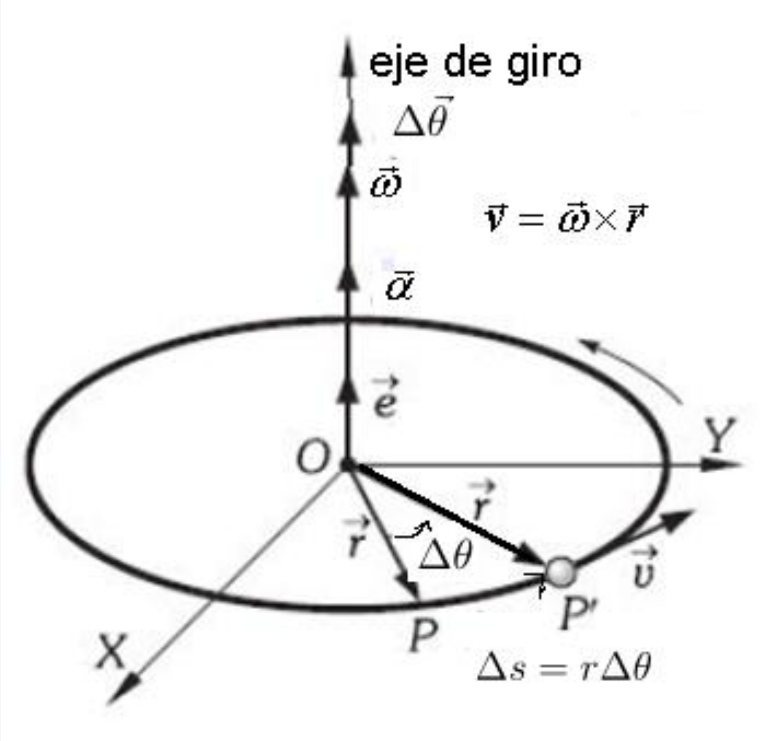
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} =$$
$$-R\omega\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + R\omega\cos(\theta)\vec{j} =$$
$$R\omega\,\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = -\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos(\theta)\vec{i} - \mathrm{sen}(\theta)\vec{j})$$
$$= -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{n} = \omega\vec{n} = \frac{v}{R}\vec{n}$$
$$\vec{n} = -\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \mathrm{sen}(\theta)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \alpha R\vec{\tau} + \omega^2 R\vec{n}}$$

Vectores angulares en el movimiento circular



$\vec{\omega}$ **Vector velocidad angular**

- Módulo: velocidad angular ω
- Dirección: perpendicular al plano del movimiento circular, igual al eje de giro
- Sentido: regla de Maxwell o de la mano derecha

$\Delta\vec{\theta}\ (d\vec{\theta})$ **Vector incremento (diferencial) de ángulo**:

- Módulo: $\Delta\theta\,(d\theta)$
- Dirección: perpendicular al plano del cambio de ángulo
- Sentido: Maxwell.
- Relación

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

Vector aceleración ángular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

En un movimiento circular es paralelo al vector velocidad angular con el mismo sentido si $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} > 0$ es positiva y viceversa

Comprobar: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$