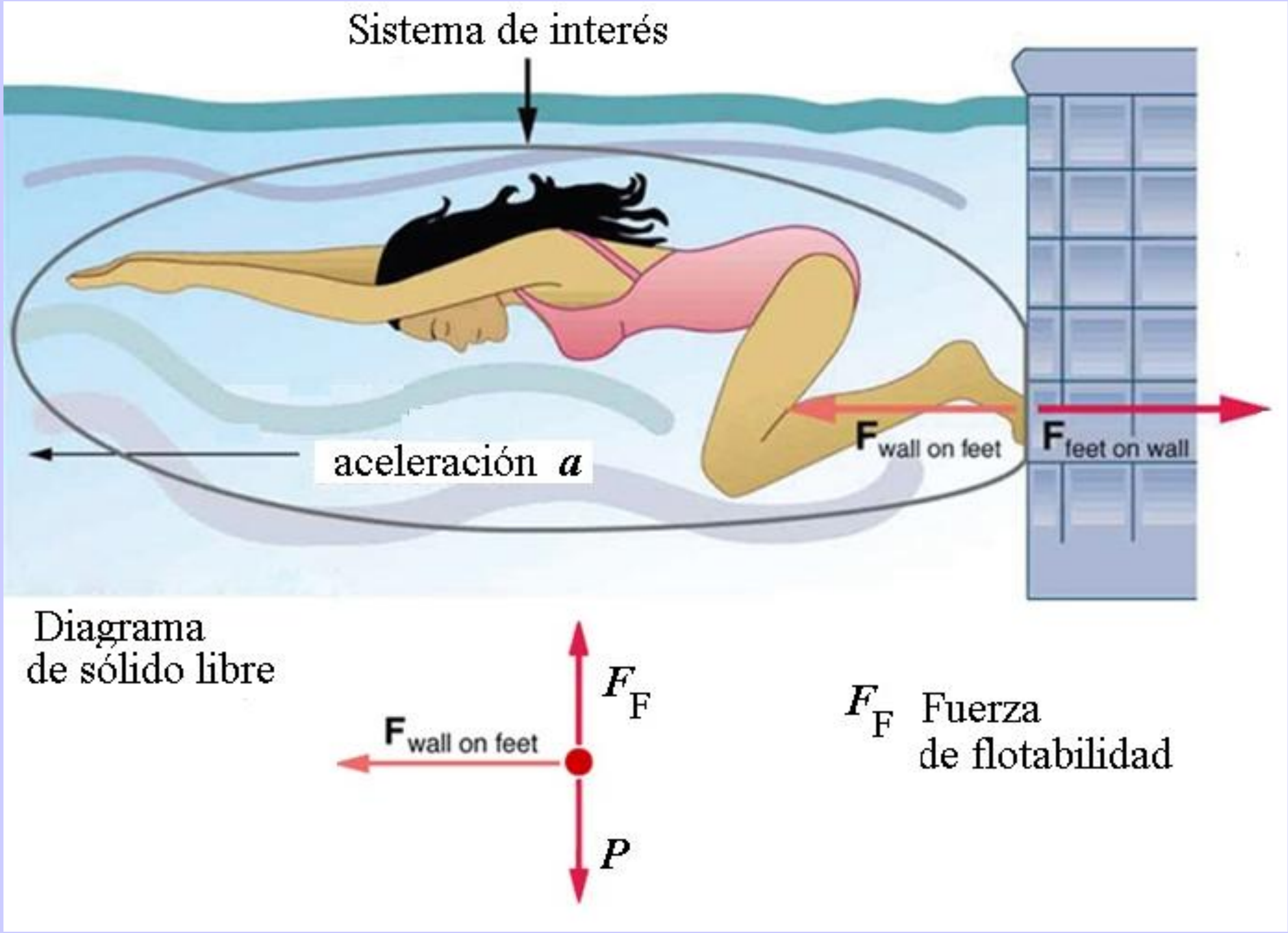
Tema 2: Dinámica de la partícula



Leyes de Newton (2)

- Primera ley de Newton o ley de inercia

$$\boxed{\text{Si } \vec{F} = 0, \;\; \vec{v} = \text{cte}}$$

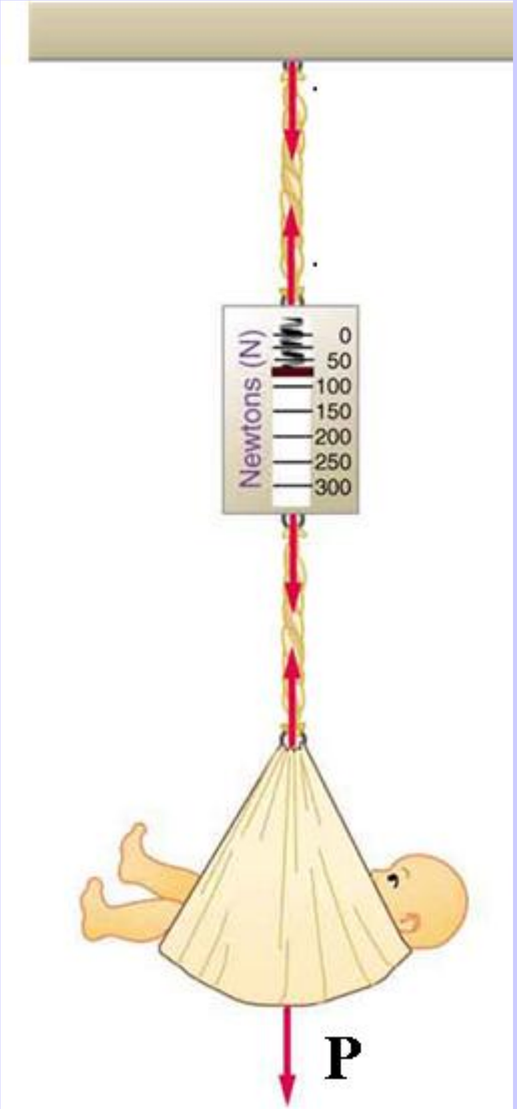
- Segunda ley de Newton

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

- Tercera ley de Newton o de acción y reacción

$$\boxed{\vec{F}_{AB} \Rightarrow \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$$

El peso



Peso: fuerza que la gravedad ejerce en la proximidad de la superficie de la tierra

- Actua sobre masas

$$\boxed{P = mg}$$

- Dirección vertical hacia abajo
- Aceleración de la gravedad: $g=9,8\ m/s^2$
- Unidad de fuerza:
    - SI: newton $N=kg\cdot m/s^2$
    - Ingeniería: kilopondio kp=kg*=9,8 N, peso de 1kg masa

Clasificaciones de tipos de fuerza

- Por su naturaleza

- Por su acción desde un punto de vista macroscópico:

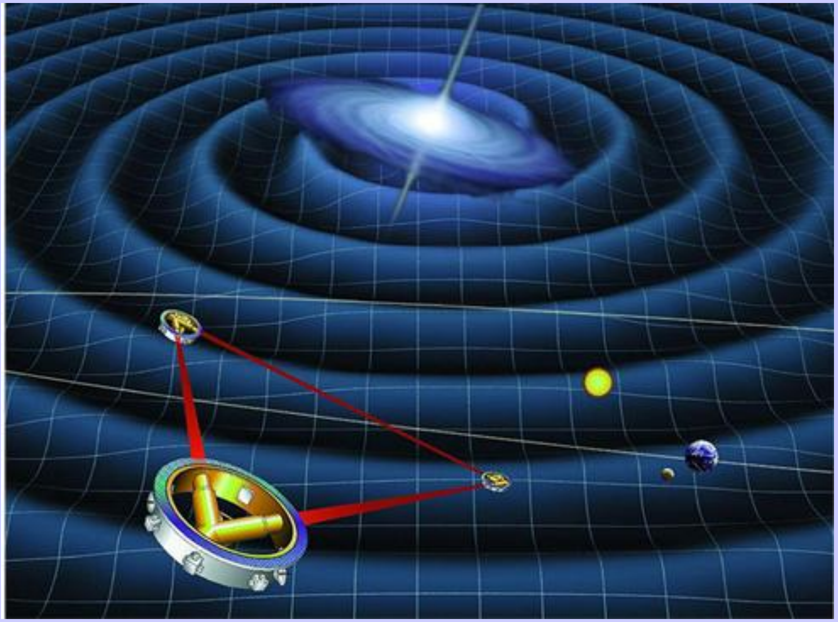
- Algunos tipos especiales de fuerzas: muelles, poleas, cables, etc…

Fuerzas en la naturaleza

- Fuerzas de alcance infinito
  - Gravitatoria
  - Electromagnética

    Electrostática

    Magnética



- Fuerzas de corto alcance
  - Nuclear fuerte

    En el núcleo atómico ~10^{-15} m

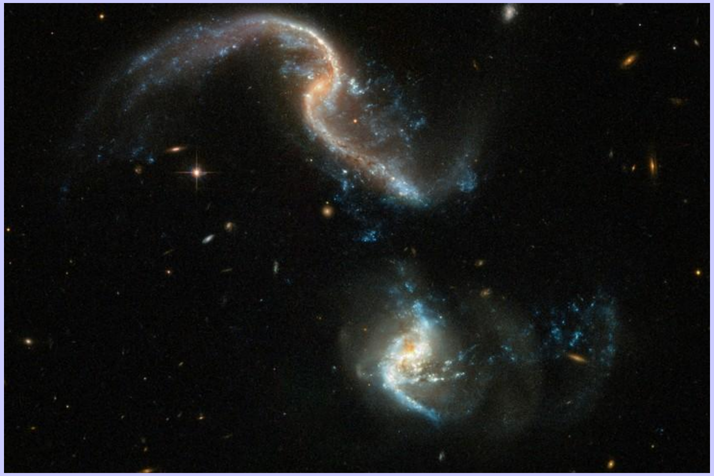
  - Nuclear débil ~10^{-17} m,

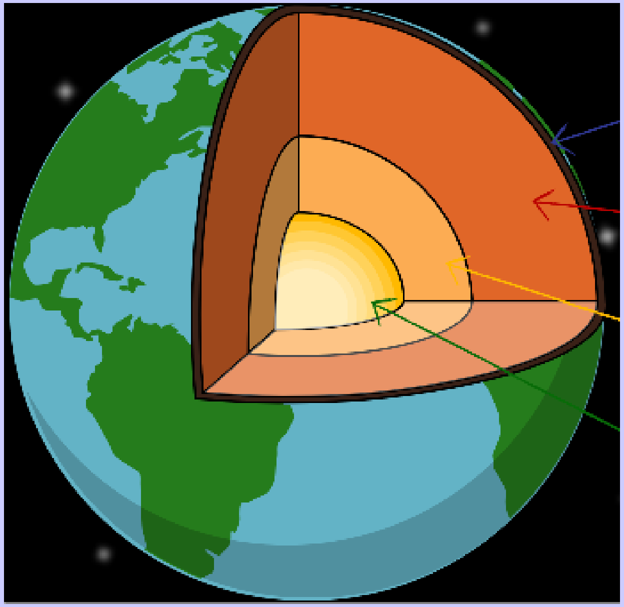
    En ciertas desintegraciones de partículas subátomicas como la beta

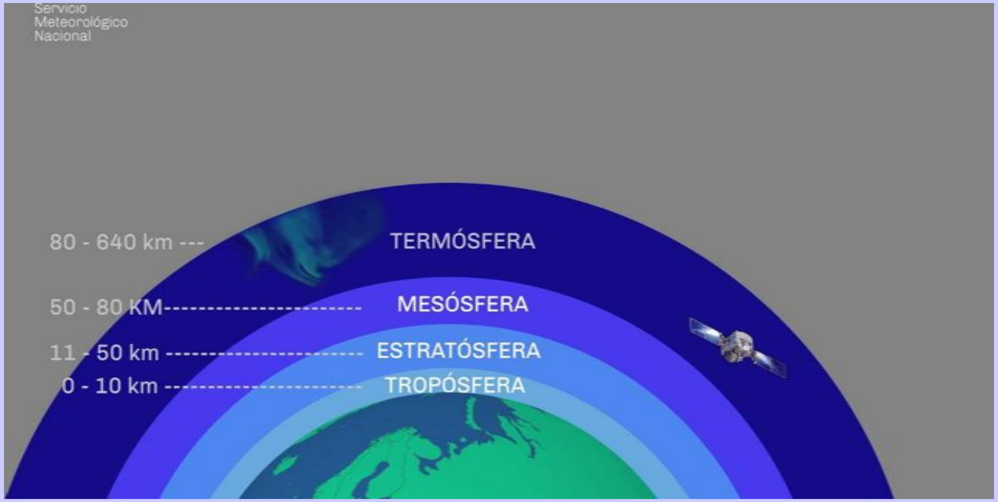
Gravedad

- Alcance infinito
- $$\boxed{F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, G = 6{,}674\times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}}$$
- Disminuye con la distancia $F_g \propto 1/r^2$
- Actúa entre masas
- Es proporcional a las masas $F_g \propto m_1, m_2$
- Es siempre atractiva
- Es responsable de la estructura del cosmos

Gravedad y estructura del cosmos



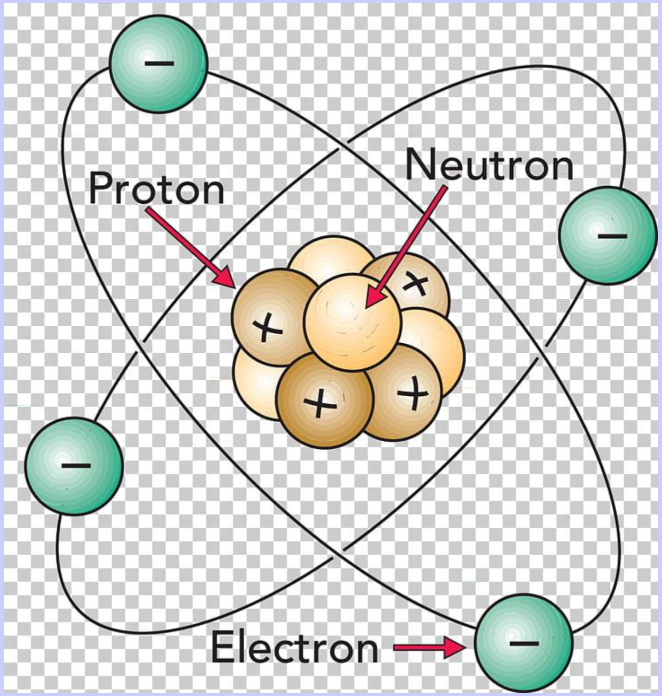


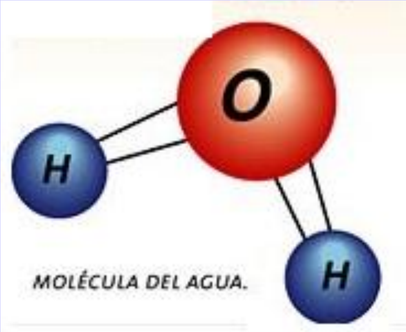


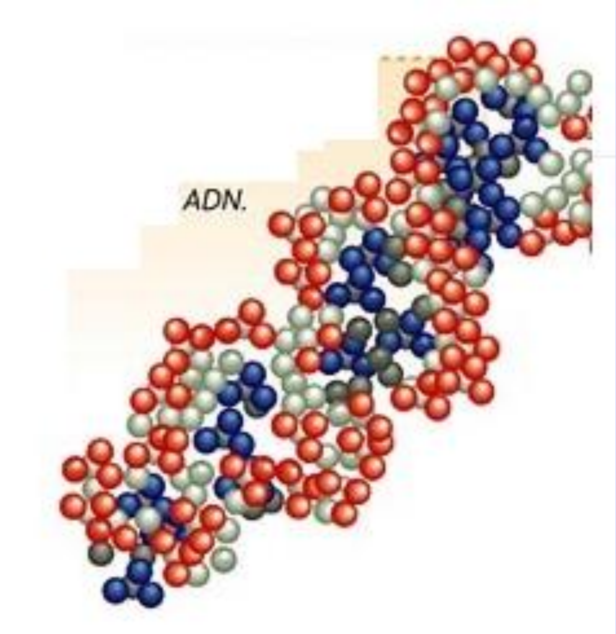
Electromagnetismo

- Alcance infinito
- Fuerza electrostática $$F_e = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2},\ k_e = 9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 / C^2}$$
- Disminuye con la distancia $F_e \propto 1/r^2$
- Actúa entre cargas eléctricas (positivas y negativas)
- Es proporcional a las cargas $F_e \propto |q_1|, |q_2|$
- Es atractiva entre cargas de diferente signo
- Es repulsiva entre cargas igual signo
- Las cargas son fundamentalmente electrones y protones
- Está compensada en su mayor parte
- Responsable de la estructura del átomo, química, biología, ondas electromagnéticas

Electromagnetismo, átomos y moléculas



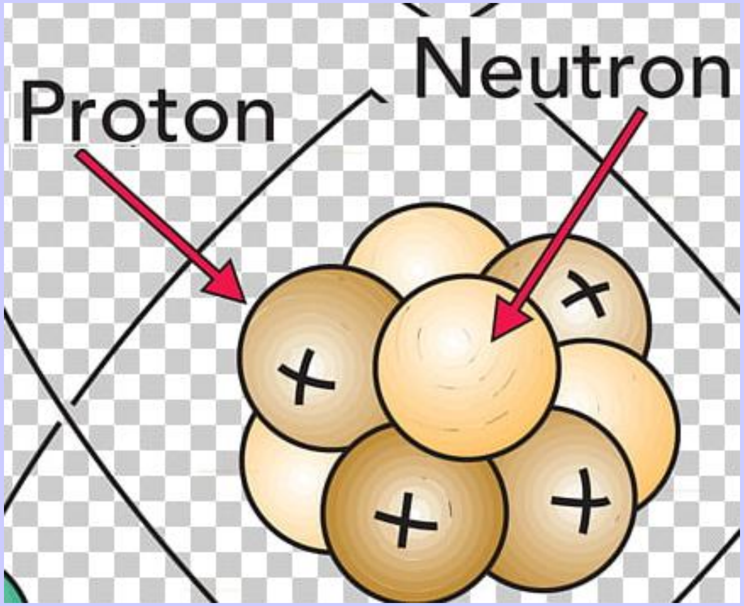


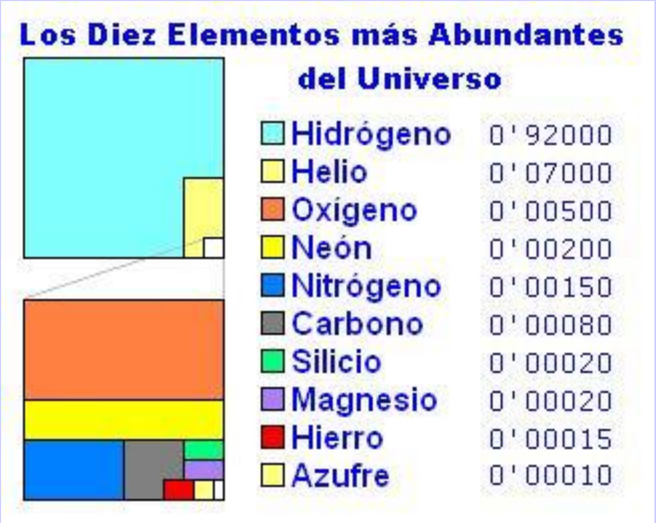


- Átomos
  - **Z: número atómico: número de protones o electrones**
  - A: número másico: Z+N, (N: número de neutrones)
- Moléculas
- Biología

Interacción nuclear fuerte

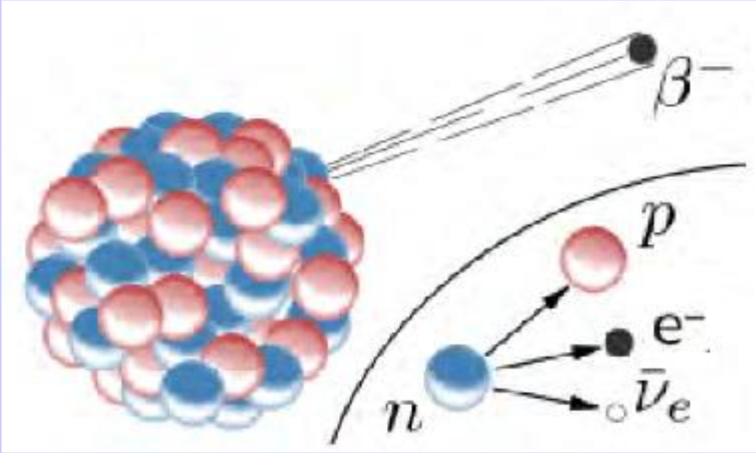
- Corto alcance (núcleo atómico) ~fermi=10^{-15} m (átomo ~ 10^{-10} m)
- Actúa entre nucleones: protones y neutrones
- Atractiva
- Compensa la repulsión electrostática entre protones
- Responsable de la estructura del núcleo y su estabilidad





Interacción nuclear débil

- Corto alcance (núcleo atómico) ~fermi=fm=10^{-15} m (átomo ~ 10^{-10} m)
- 1/100 de la nuclear fuerte
- Responsable de algunas reacciones entre partículas. Ejemplo:
  - Beta- n→ $p^{+}+e^{-}+$ v (v: neutrino, m~0, q=0)
  - Beta+ p^{+}→ $n+e^{+}+$ v (e^{+}: positrón, $m=m_e$, q=+e)
- Por lo tanto, responsable también de la estabilidad de los núcleos y de los nucleones

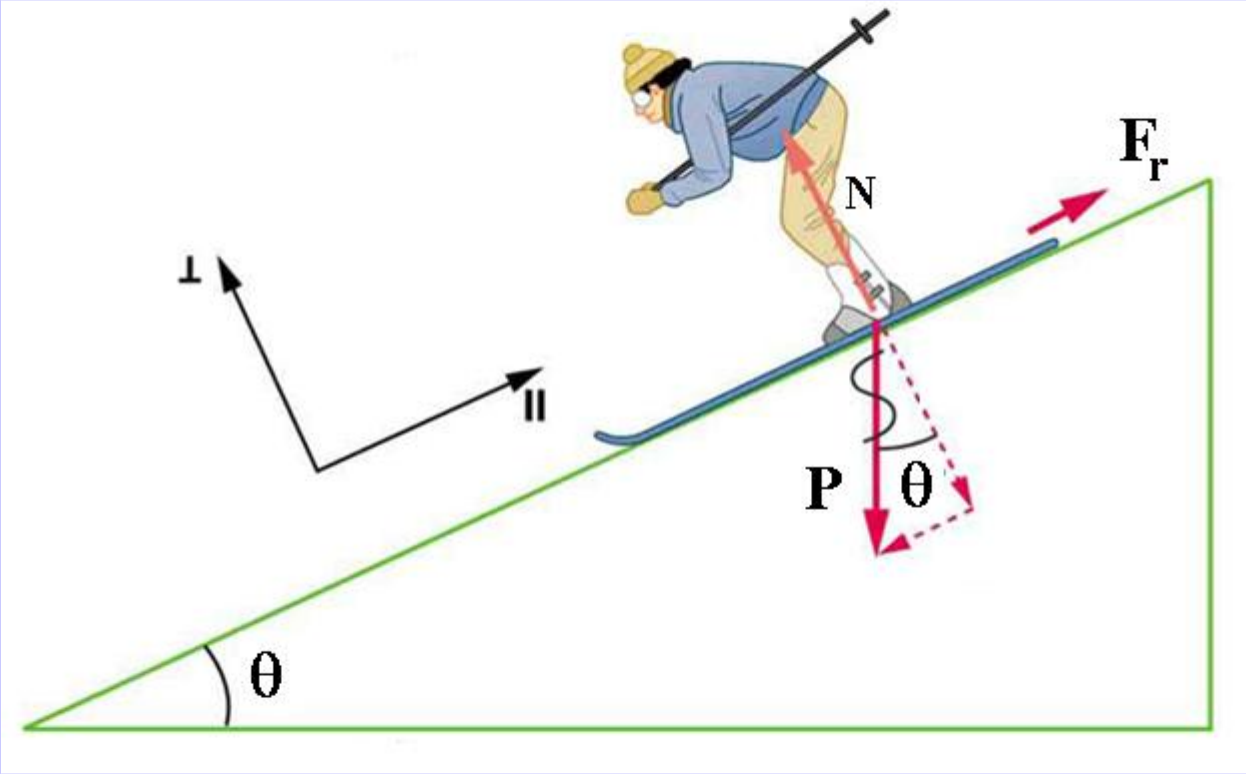


Fuerzas a distancia y de contacto

- A distancia:

  gravitatoria, electromagnética (también el peso **P)**

- De contacto (electromagnéticas a pequeña escala):

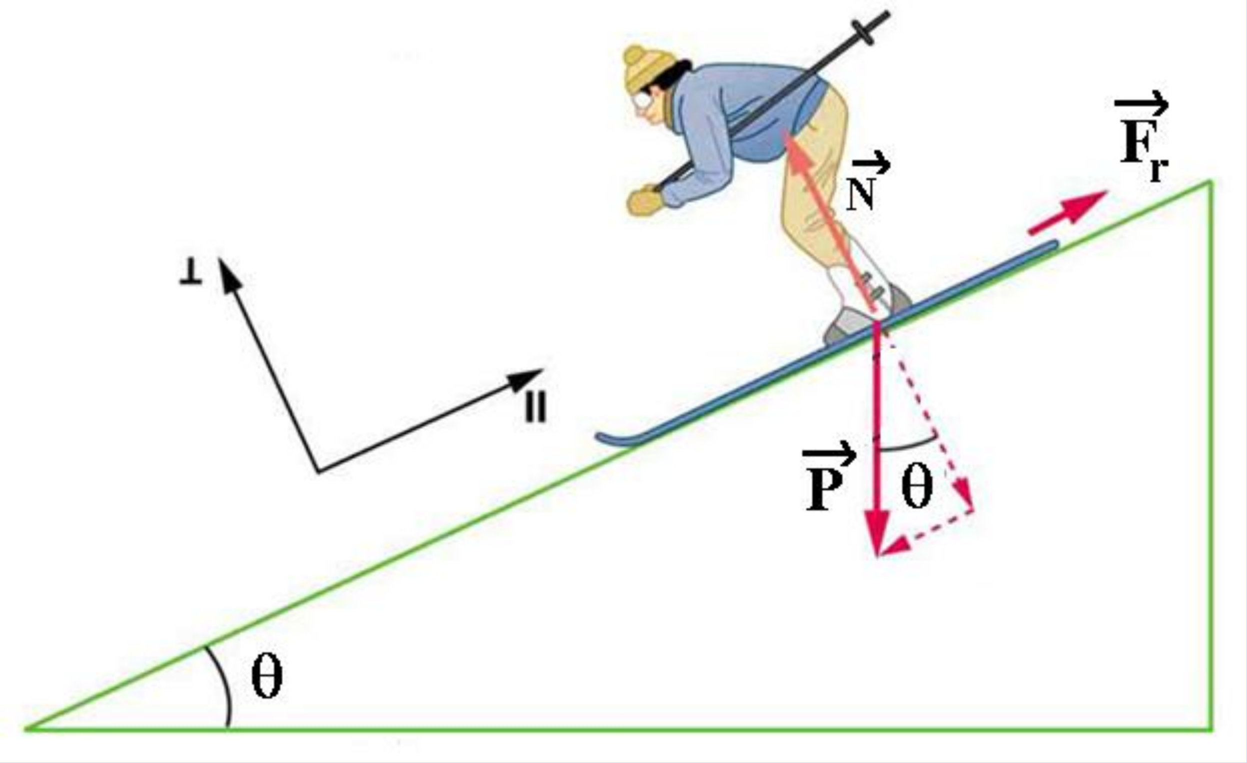


- Normales a las superficies de contacto **N**
- Tangenciales a las superficies de contacto o de rozamiento **F_r**

Fuerzas de rozamiento

Se oponen al movimiento

- Estática $\boxed{F_e \le \mu_e N, \quad \mu_e < 1}$
- Dinámica $\boxed{F_d = \mu_d N, \quad \mu_d < \mu_e < 1}$



Si μ_e=0.30 y μ_d=0.20 calcular

(a) el angulo máximo para que el esquiador esté en reposo:

$\tan(\theta_e)=\mu_e$; θ_e=16.7º

(b) El angulo para que se mueva con velocidad constante

$\tan(\theta_d)=\mu_d$; θ_e=11.3º

Algunas fuerzas especiales

- Cables y cuerdas: La tensión siempre realiza tracción en la dirección de la cuerda

  Poleas: cambian la dirección de la tensión

- Muelles: fuerza opuesta al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio

  Ley de Hooke $$\boxed{F = -kx}$$

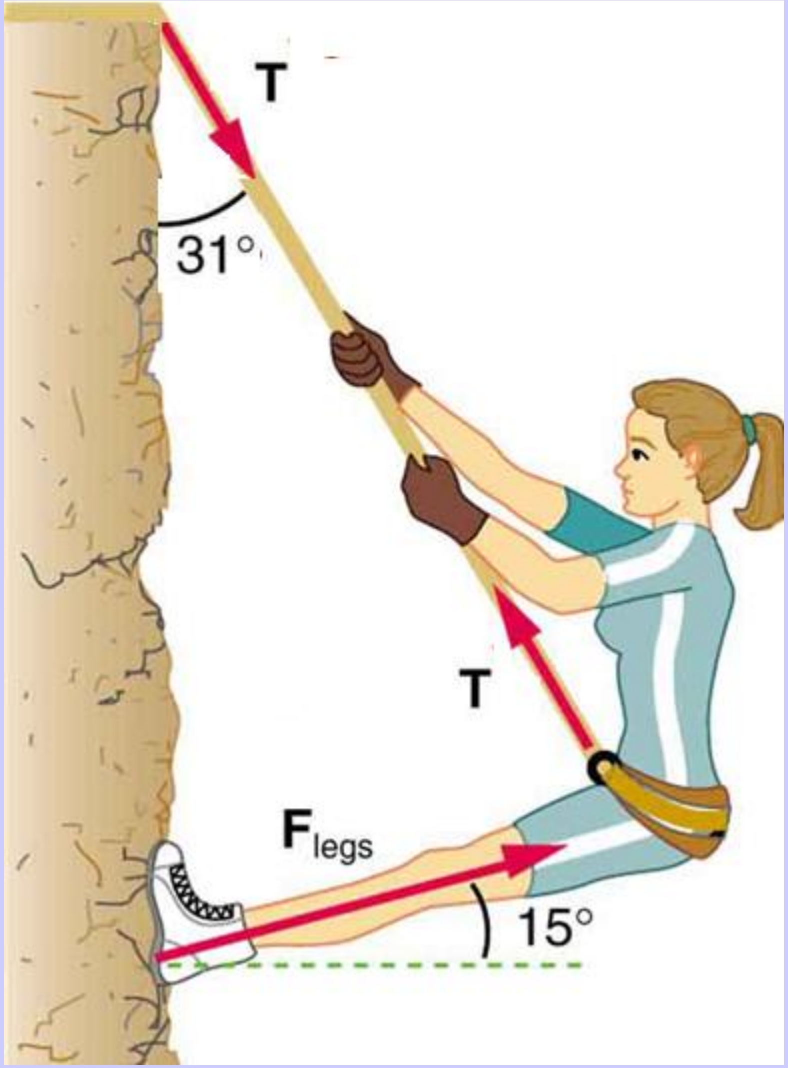
- Fuerzas de ligadura

  Imponen que el movimiento tenga unas condiciones determinadas.

  Típicamente hacen fuerzas perpendiculares a las direcciones que permiten. Ejemplo: vías del tren

Cables y cuerdas:

- La tensión **T** siempre realiza tracción en la dirección de la cuerda



Ejemplo: calcular la tension de la cuerda si la escaladora pesa 50 kg despreciando la fuerza de las manos.

Suponiendo la pared vertical, calcular la fuerza de rozamiento de las botas. ¿Por qué la escaladora pone sus piernas casi perpendiculares a la pared?

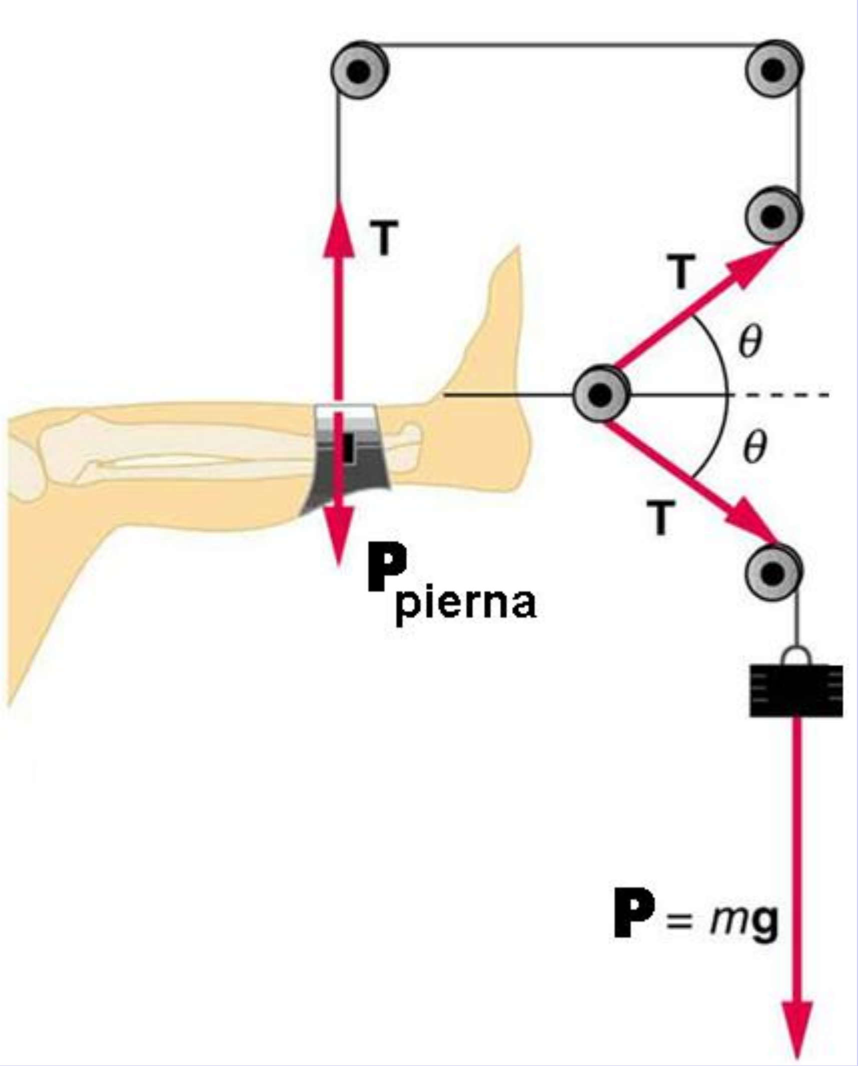
μ_e=0.45

Poleas

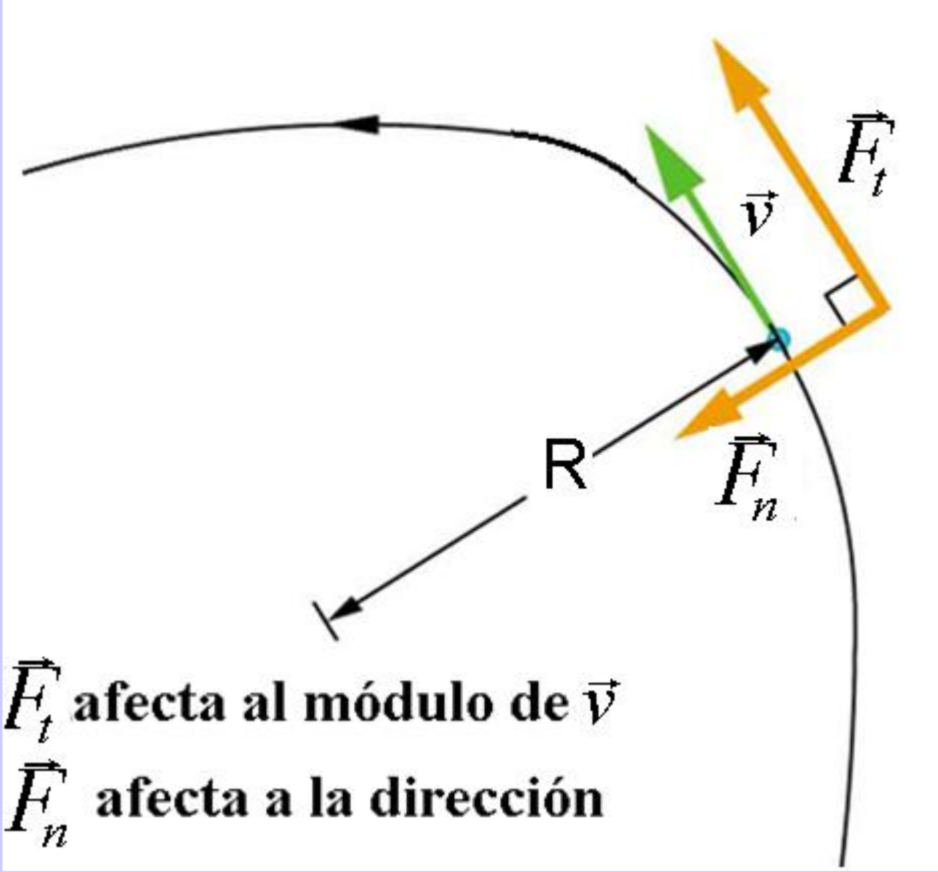
Cambian la dirección de la la tension

Ejemplo: Calcular *T* si *m*=5 kg y θ es 30º , 45º o 60º.

Si tienen rozamiento y o masa las tensiones son dirferentes



Fuerza tangencial y centrípeta



$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = F_t\vec{\tau} + F_n\vec{n}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v};$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \perp \vec{\tau}\ ; \text{unitarios}$$

$$F_t = ma_t; \qquad F_n = ma_n$$

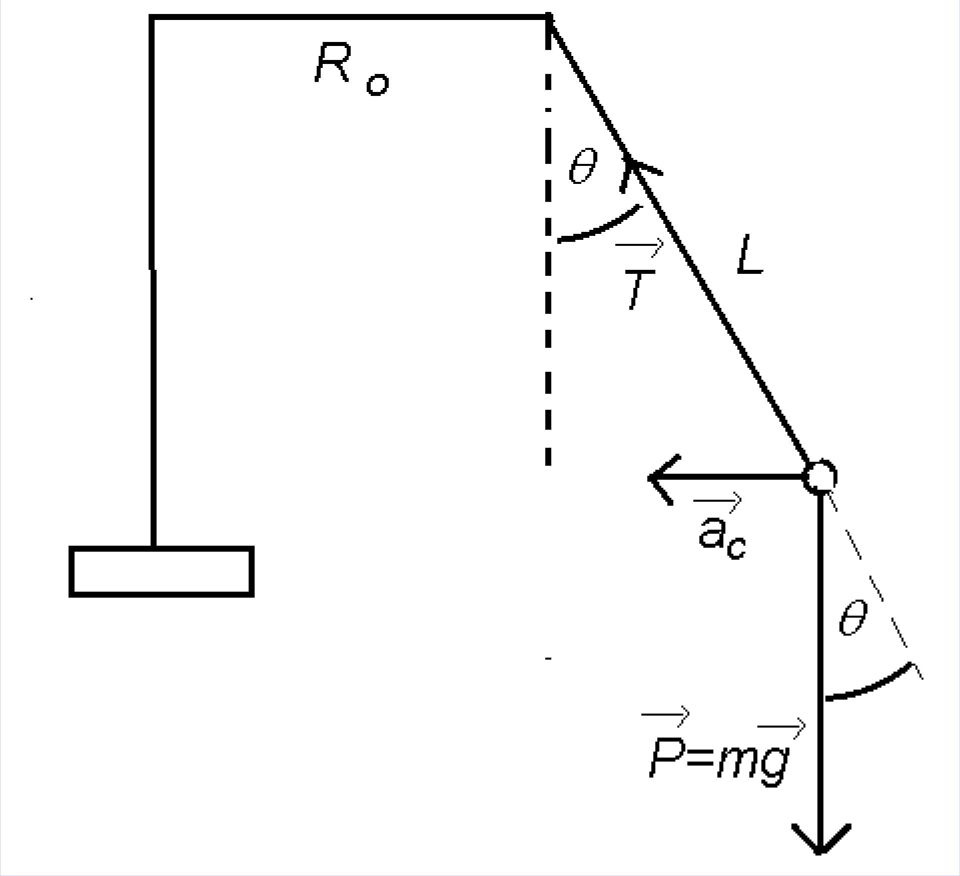
$$F_t = m\frac{dv}{dt}; \qquad F_n = m\frac{v^2}{R}$$

R radio de curvatura

Ejemplo de fuerza centrípeta.
Sillas giratorias (sillas voladoras)

Calcular la tensión del cable y la velocidad de la silla en función de la longitud del cable L, la masa, el ángulo con la vertical θ y el radio R_0 del punto de suspensión

Silla giratoria (2)



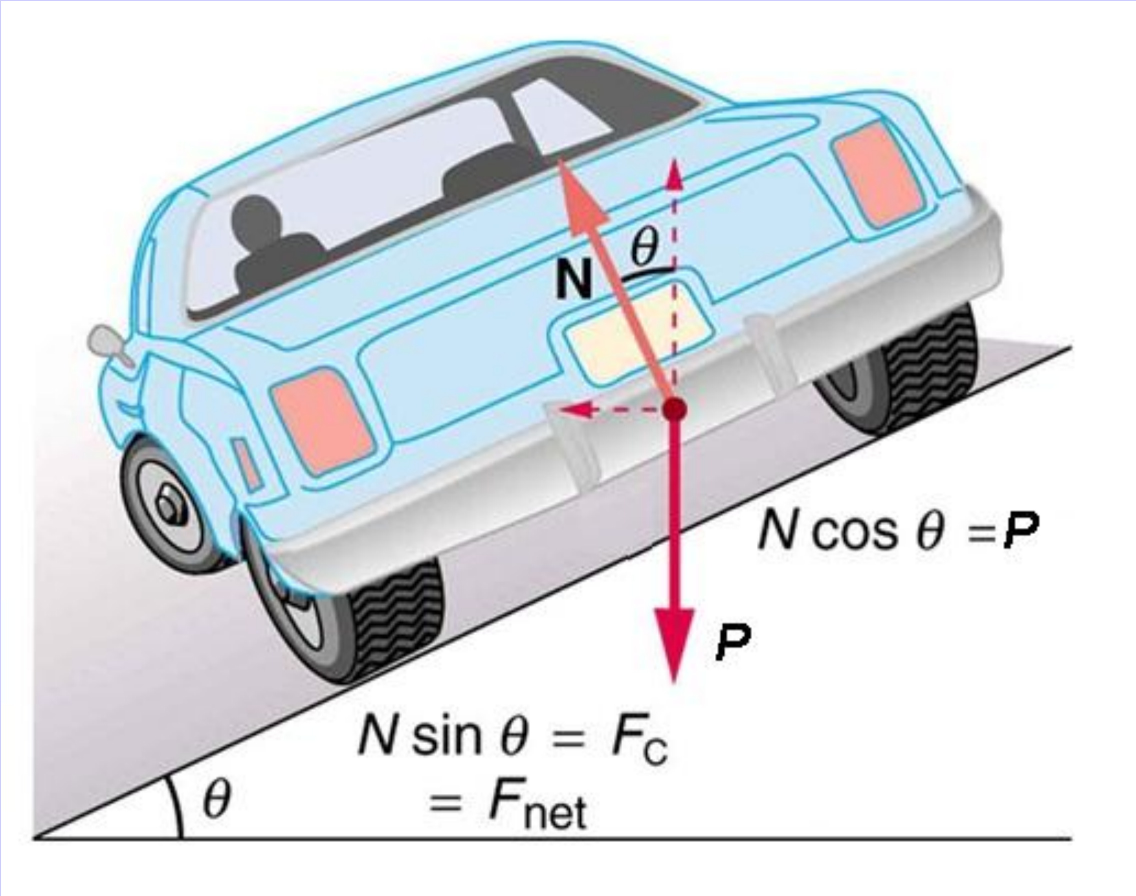
$$T\cos(\theta) - mg = 0$$

$$T\sin(\theta) = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = R_0 + L\sin(\theta)$$

$$\boxed{T = \frac{mg}{\cos(\theta)} \quad ; \quad v = \sqrt{g[R_0 + L\sin(\theta)]\tan(\theta)}}$$

Ejemplo de fuerza centrípeta. Curvas peraltadas



¿Velocidad máxima ?

a) Sin rozamiento, como en el dibujo (carretera helada)

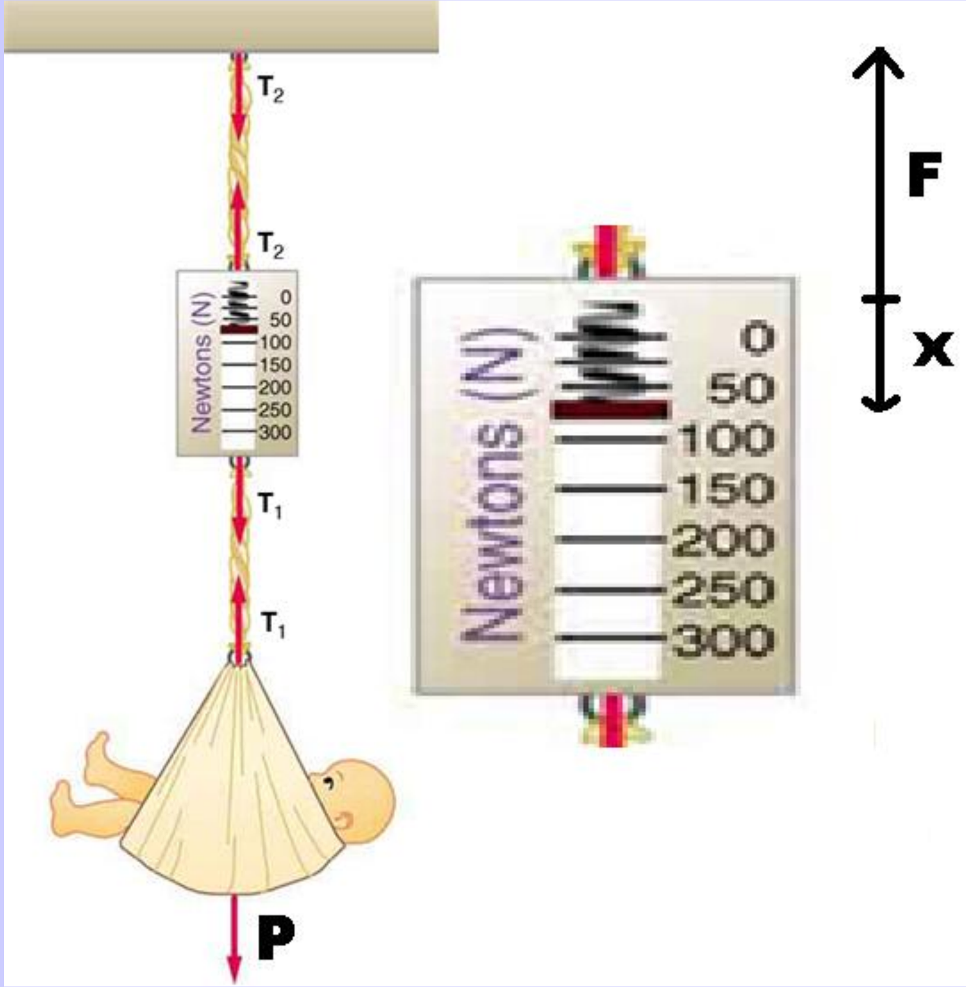
b) Con coeficiente de rozamiento estático μ_e

Muelles (1)

Realizan una fuerza opuesta al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio

Ley de Hooke

$$\boxed{F = -kx}$$



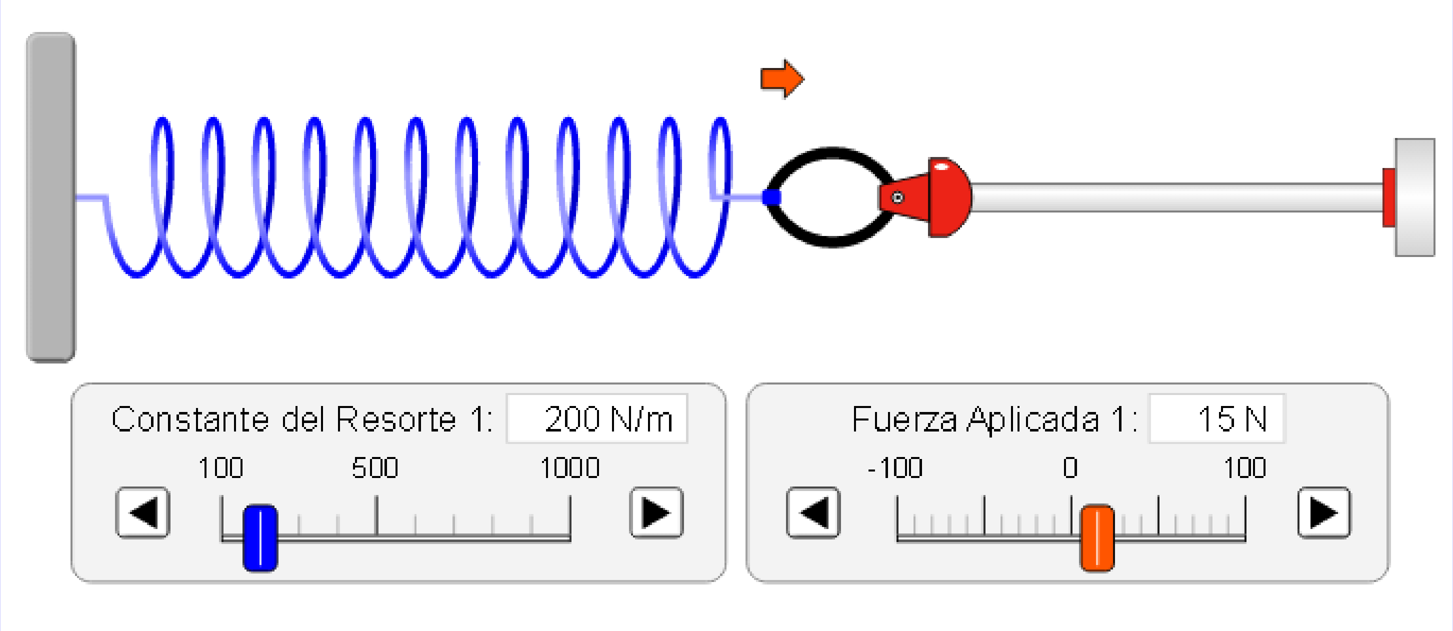
Calcular la constante *k* del muelle si el niño pesa 4.0 kg y el muelle se ha alargado 2 cm

Calcular T_1 y T_2 si el dinamómetro pesa 0.50 kg

Simulación de la ley de Hooke

http://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_es_PE.html

$$\boxed{F = -kx; \qquad U = \frac{1}{2}kx^2}$$



Muelles (2) **Movimiento armónico simple**

$$F = -kx \Rightarrow$$

$$ma = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Movimiento periódico, con amplitud *A*, periodo *T* , frecuencia *f* y fase inicial φ_0

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f; \qquad f = \frac{1}{T}$$

Columpio

Movimiento armónico simple

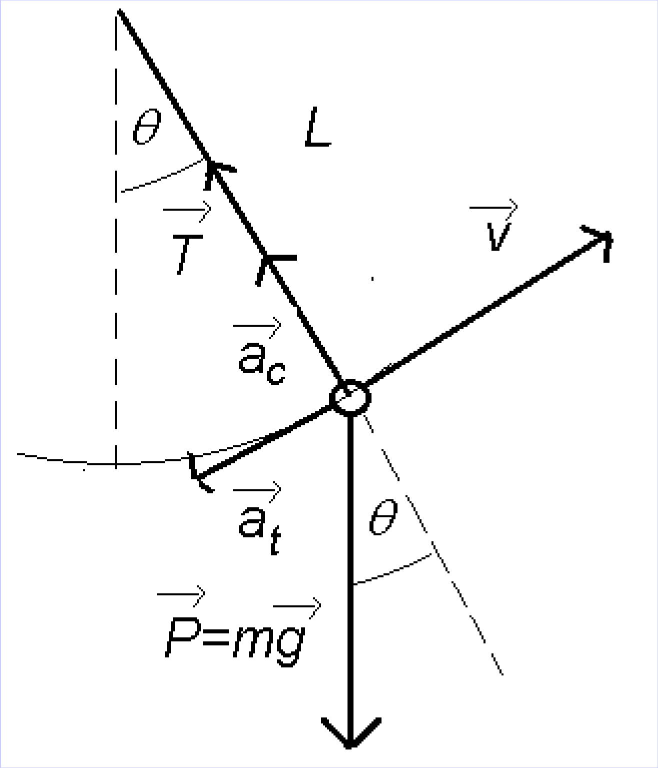
Demostrar que para ángulos pequeños tanto el ángulo θ como la coordenada x realizan un movimiento armónico simple.

Ángulos pequeños:

$\sin(\theta) \sim \tan(\theta) \sim \theta$

Péndulo simple. Columpio (2)

Péndulo simple: masa puntual colgada de un hilo inextensible que oscila con ángulos pequeños



$$-mg\sin(\theta) = ma_t = mL\alpha = mL\ddot{\theta}$$

$$-g\theta = L\ddot{\theta}$$

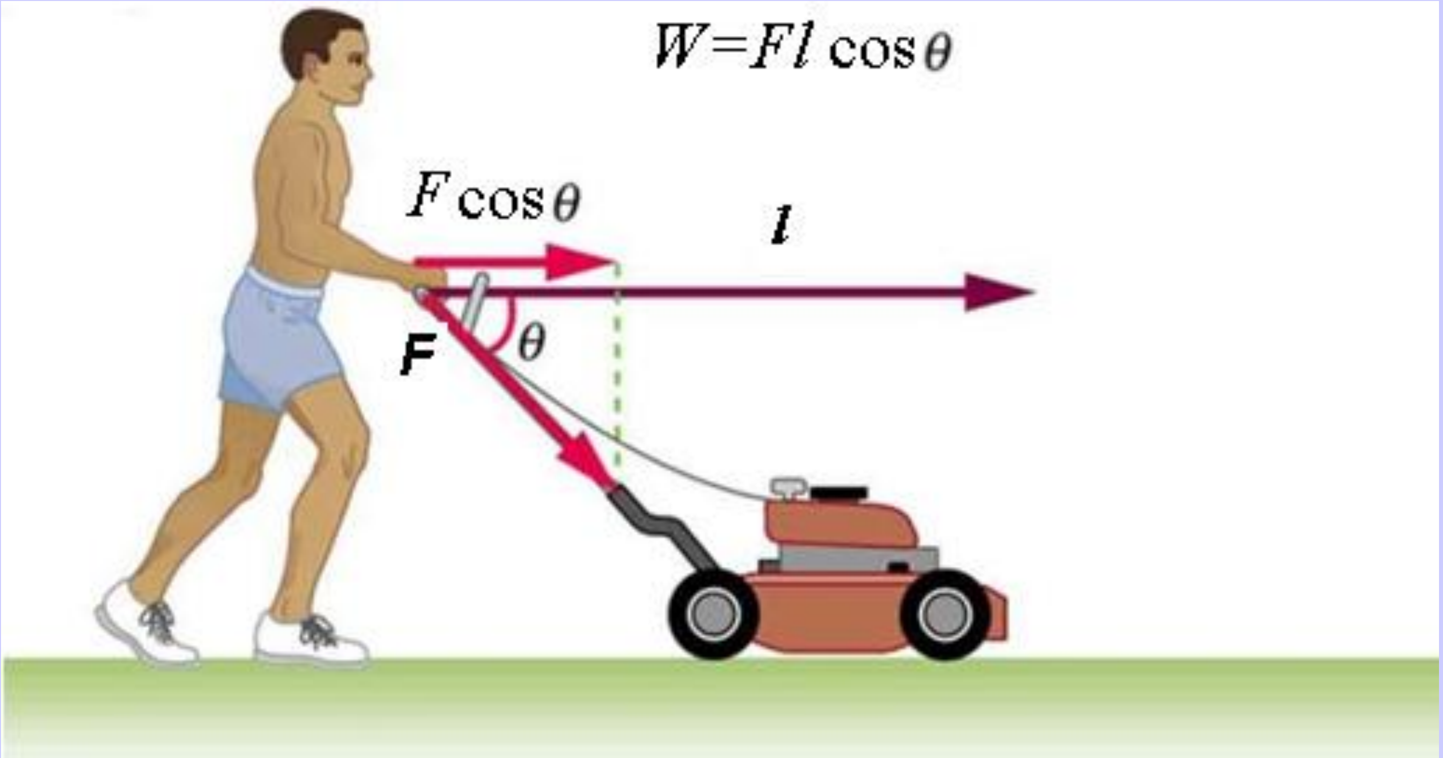
$$x = L\sin(\theta) \cong L\theta \quad ; \quad \ddot{x} = L\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \varpi^2\theta = 0 \quad ; \quad \ddot{x} + \varpi^2 x = 0 \\ \text{con } \varpi = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \qquad \varpi = \dfrac{d\varphi}{dt} \neq \omega = \dfrac{d\theta}{dt} \end{array}}$$

$$\omega: \text{ velocidad angular}; \quad \varpi: \text{frecuencia angular}$$

$$\varphi = \varpi t + \varphi_0; \quad \theta = \theta_0 \cos(\varpi t + \varphi_0)\,; \quad x = A\cos(\varpi t + \varphi_0); A = L\theta_0$$

Trabajo y energía



$$\boxed{W_{AB} = F_{\parallel} l = Fl\cos(\theta)}$$

Trabajo hecho por una fuerza constante

- Si la fuerza es paralela al desplazamiento

$$\boxed{W_{AB} = Fl}$$

- Si la fuerza no es paralela al desplazamiento

$$\boxed{W_{AB} = F_{||}l = Fl\cos(\varphi)}$$

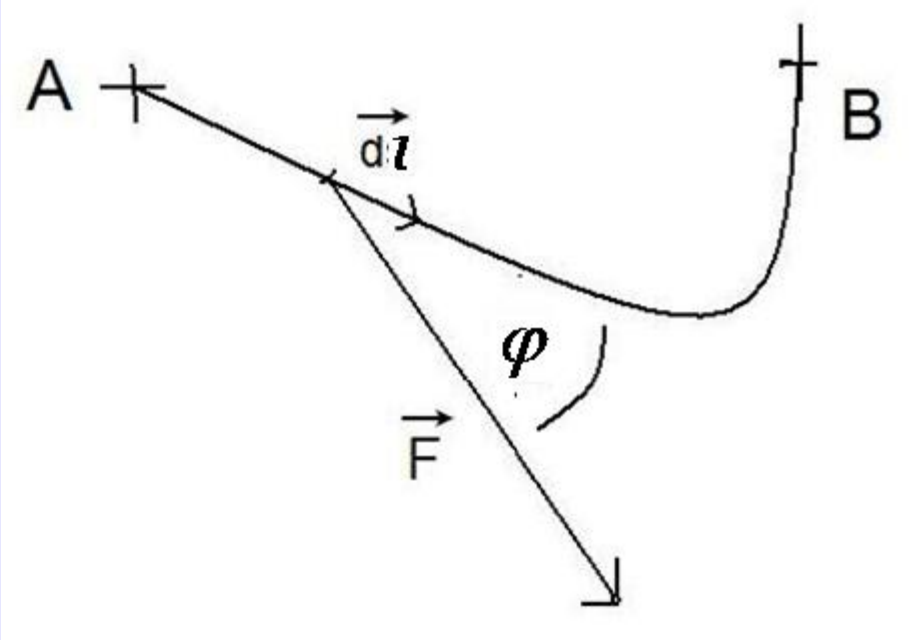
- Notación vectorial

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

Trabajo hecho por una fuerza variable

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B F \,\mathrm{d}\, l \cos(\varphi)}$$

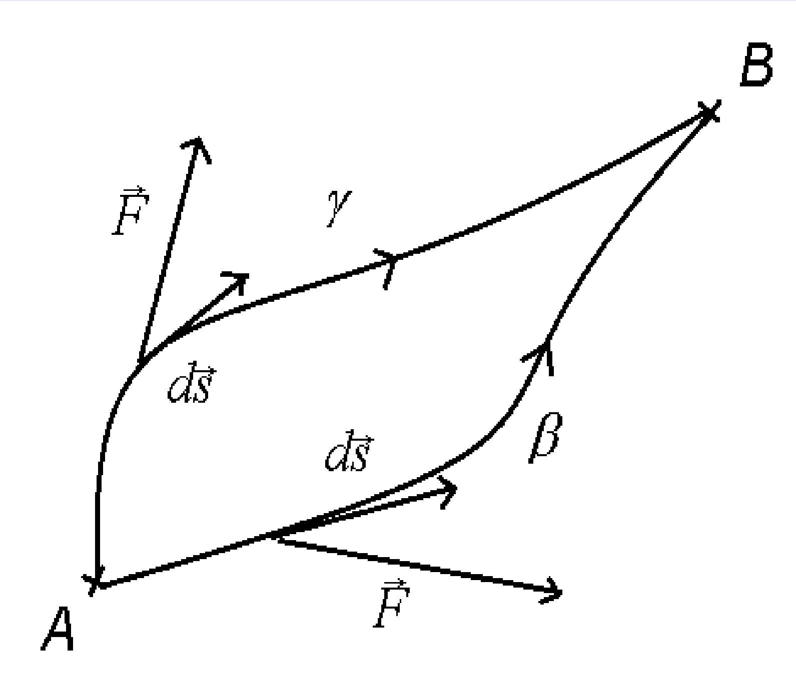
- En general el trabajo depende del camino entre A y B



Campo de fuerzas conservativo

- Un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo realizado por el campo no depende del camino sino únicamente del punto inicial o final.

$$\boxed{W_{AB} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\beta}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

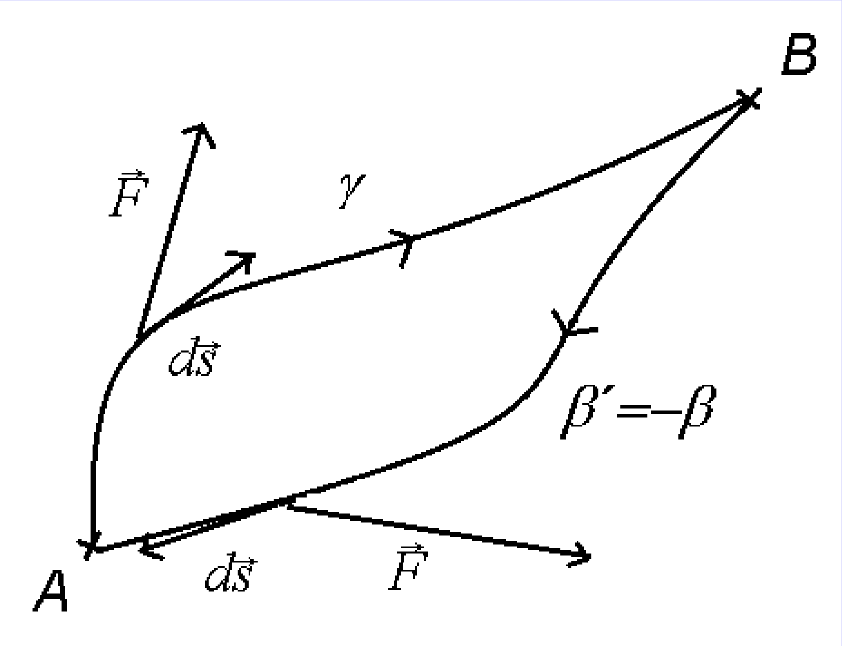


- El rozamiento y las fuerzas aplicadas no son conservativas
- La gravedad es conservativa
- La fuerza electrostática es conservativa

Campo de fuerzas conservativo (2)

- En un campo de fuerzas conservativo el trabajo realizado por el campo en cualquier camino cerrado es nulo.

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$



- Demostrarlo usando que:

$$\int_{B,\beta'=-\beta}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{A,\beta}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Pues $d\vec{s}$ cambia de sentido en β'=-β

Energía potencial

En un campo de fuerzas conservativo existe una función de punto $U_A = U(A)$ llamada energía potencial tal que su disminución entre dos puntos es igual el trabajo realizado por la fuerza entre los dos puntos

$$\boxed{U_A - U_B = W_{AB}}$$

- Disminución: U(inicial=A) –U(final=B)

  La energía del campo disminuye cuando realiza trabajo.

  La energía del campo aumenta cuando recibe trabajo.

- No depende del camino

Trabajo hecho por un campo conservativo y por una fuerza aplicada externa

- Trabajo hecho por el campo cuando *m* se mueve de A a B= “disminución” de la energía potencial (algo cae):

$$\boxed{W_{AB} = U_A - U_B}$$

- Trabajo hecho por una fuerza aplicada para mover *m* de A to B = “incremento” de energía potencial (la mano eleva algo):

$$\boxed{W_{\mathrm{ext},AB} = U_B - U_A}$$

Puede ser un incremento negativo como en el rozamiento

Construcción de la función energía potencial

- Asignamos el valor arbitrario $U_0 = U(P_0)$ al punto P_0

$$\boxed{U(P) = U_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

- Comprobar que : $U(A) - U(B) = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

- La energía potencial está indefinida en una constante aditiva, pero la diferencia entre dos puntos está bien definida

Dos ejemplos de energía potencial

Energía potencial creada por un campo de fuerzas uniforme

$$U_A - U_B = \vec{F}\cdot\int_A^B \mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \Rightarrow$$

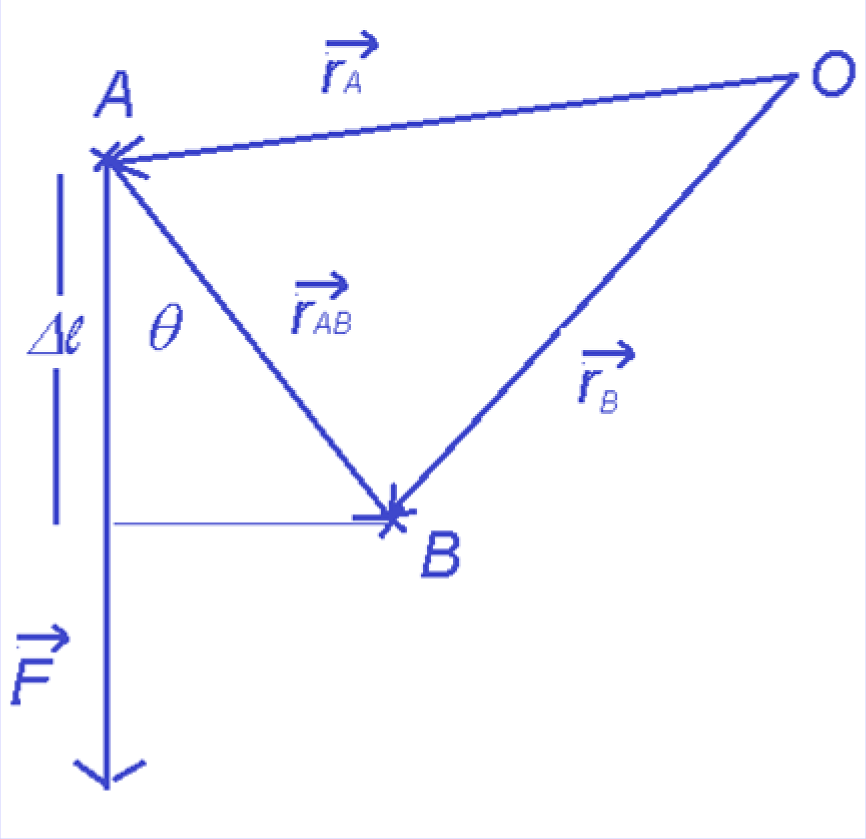
$$\boxed{U_A - U_B = \vec{F}\cdot\vec{r}_{AB}}$$

$$\boxed{U = -\vec{F}\cdot\vec{r} + C}$$

$$\Rightarrow U_A - U_B = F r_{AB}\cos(\theta) = F\Delta l$$

Expresión simplificada:

$$\boxed{U_A - U_B = F\Delta l}$$

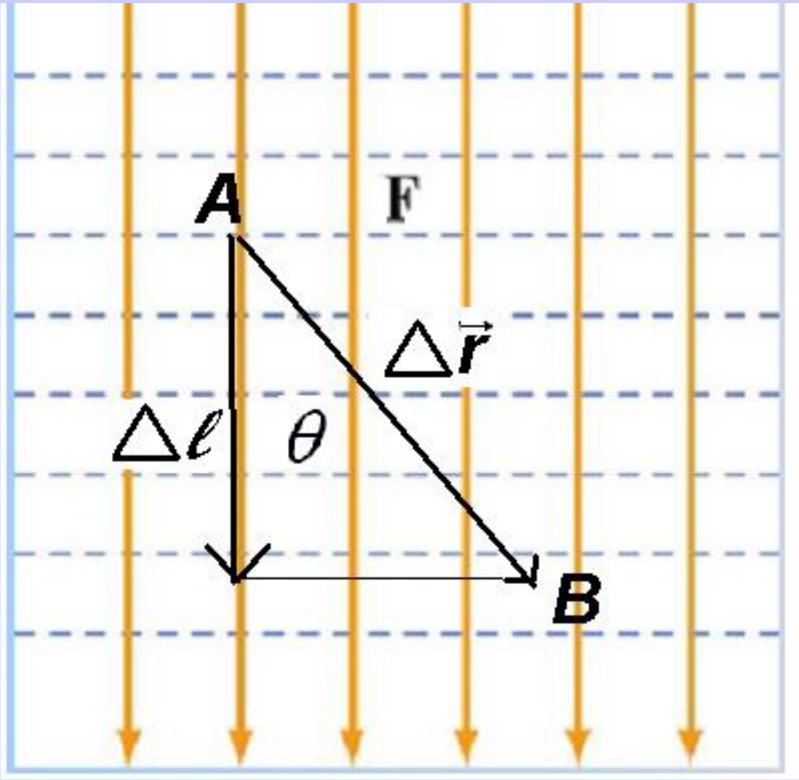


- Δl : desplazamiento en la dirección y sentido del campo
- *U* decrece en la dirección de la fuerza

Aplicación: gravedad sobre la superficie terrestre

Por ejemplo el campo gravitatorio en la superficie terrestre

$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$



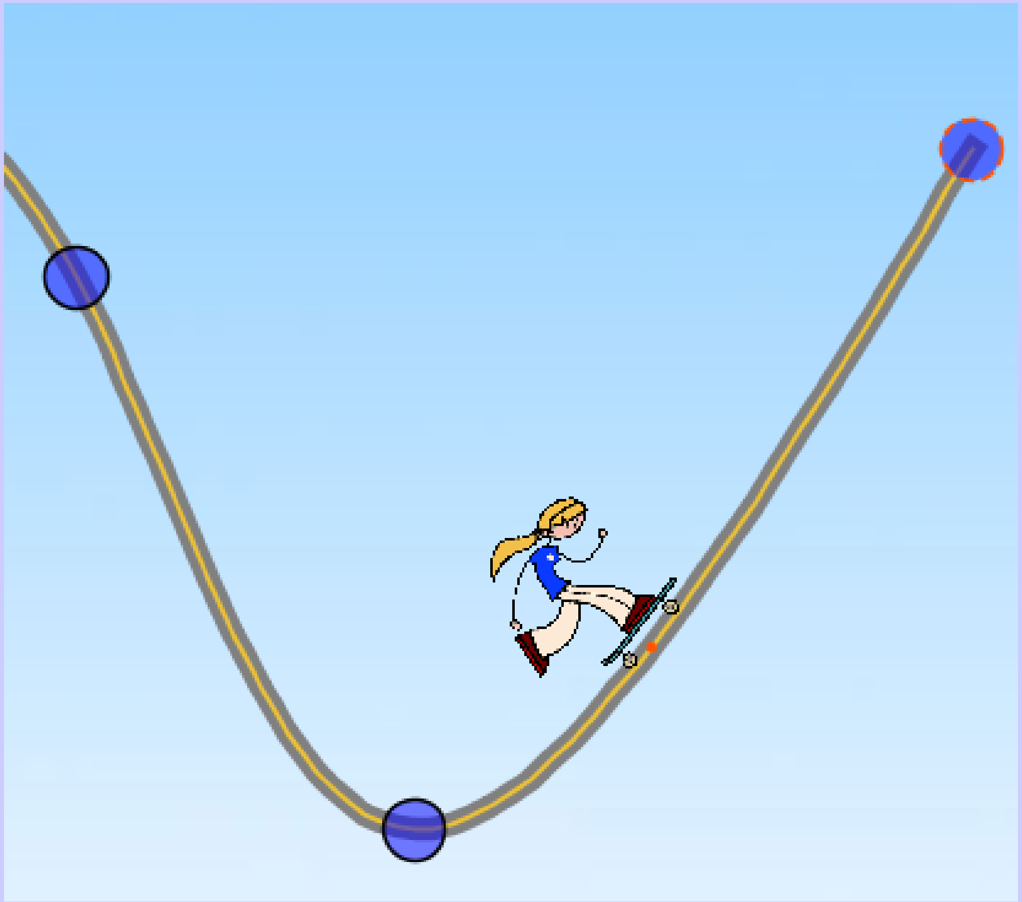
$$\Delta l = -\Delta z = -h$$

Δl : desplazamiento en la dirección y sentido de la fuerza

$$U_g = mgh = mgz$$

Simulación: skaters

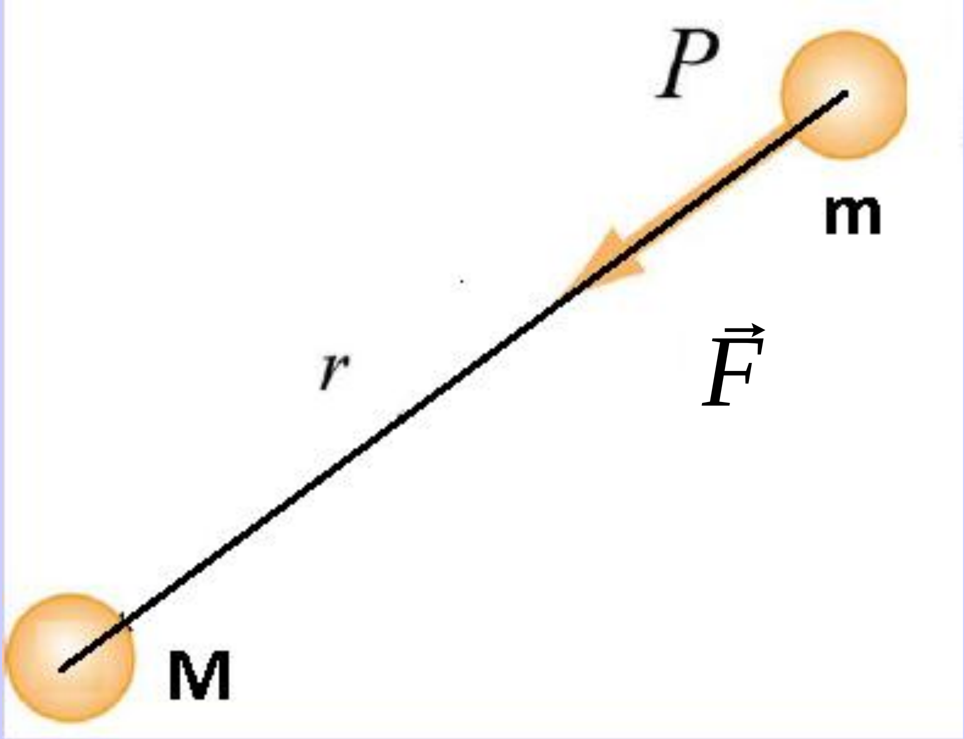
http://phet.colorado.edu/sims/energy-skate-park/energy-skate-park_es.jnlp



Ejemplo: fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales M y m

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow$$

$\vec{F}$ tiene dirección radial atractiva



$$\boxed{U_g = -G\frac{Mm}{r}}$$

Energía cinética.
Teorema de las fuerzas vivas

$\vec{F}$, conservativa o no, resultante de todas las fuerzas

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_A^B md\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$\int_A^B m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_A^B md\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Definición de energía cinética: $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$

Teorema del trabajo o de las fuerzas vivas $\boxed{W_{AB} = E_{c,B} - E_{c,A}}$

Teorema de conservación de la energía

Si $\vec{F}$ es conservativa

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{c,B} - E_{c,A} = U_A - U_B \qquad \Rightarrow$$

Teorema de conservación de la energía:

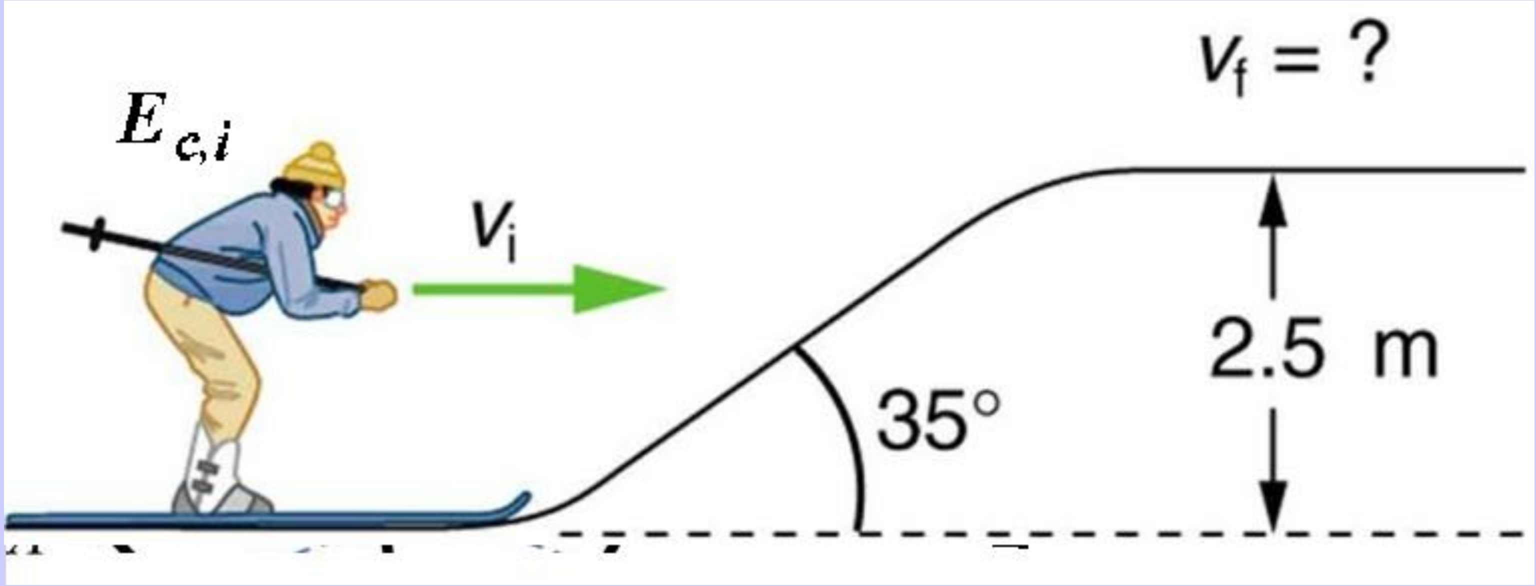
$$\boxed{E_{c,A} + U_A = E_{c,B} + U_B} \qquad E_A = E_B \qquad E = E_c + U$$

En la gravedad de la superficie terrestre $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

En la gravedad en general $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$

Ejemplo: esquiador sin rozamiento

Gravedad de la superficie terrestre $$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$



Calcular la velocidad final suponiendo que no hay rozamiento entre el esquiador y la nieve. ¿Cual es la velocidad mínima para subir la pendiente? Respuesta:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2gh}; \qquad v_{i,\min} = 7\text{m/s}$$

Teorema de conservación de la energía con fuerzas no conservatvas

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{c,B} - E_{c,A} = U_A - U_B + \int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

Teorema de conservación de la energía con fuerzas no conservativas:

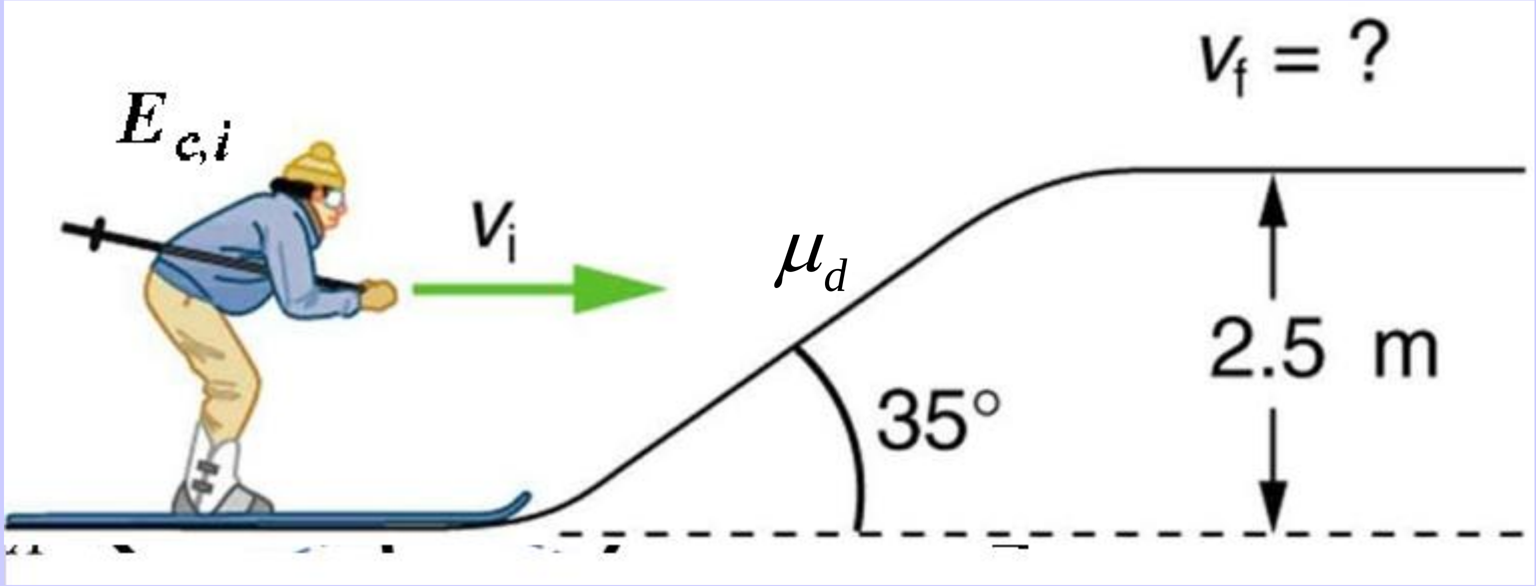
$$\boxed{E_{c,B} + U_B = E_{c,A} + U_A + W_{NC}}$$

$\text{Si } W_{NC} > 0$ Se transforma energía química o de otro tipo en energía cinética y potencial. Ejemplo: músculos, motores…

$\text{Si } W_{NC} = -Q < 0$ Se transforma energía cinética y potencial en energía térmica o de otro tipo. Por ejemplo: rozamiento

Ejemplo: esquiador con rozamiento

Gravedad de la superficie terrestre $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$



Calcular la velocidad final si μ_d=0.2 ¿Cual es la velocidad mínima para subir la pendiente? ¿Cual es la energía disipada por rozamiento en ese último caso (m=80 kg)? Respuesta:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2gh(1+\mu_d \cot(35^{\text{o}}))}; \quad v_{i,\min} = 7{,}94\,\text{m/s}; \quad Q = \frac{1}{2}mv_{i,\min}^2 - mgh = 562\,\text{J}$$

Potencia

Potencia media $$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Potencia instantánea $$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

Potencia de una fuerza que actua sobre una partícula en movimiento

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

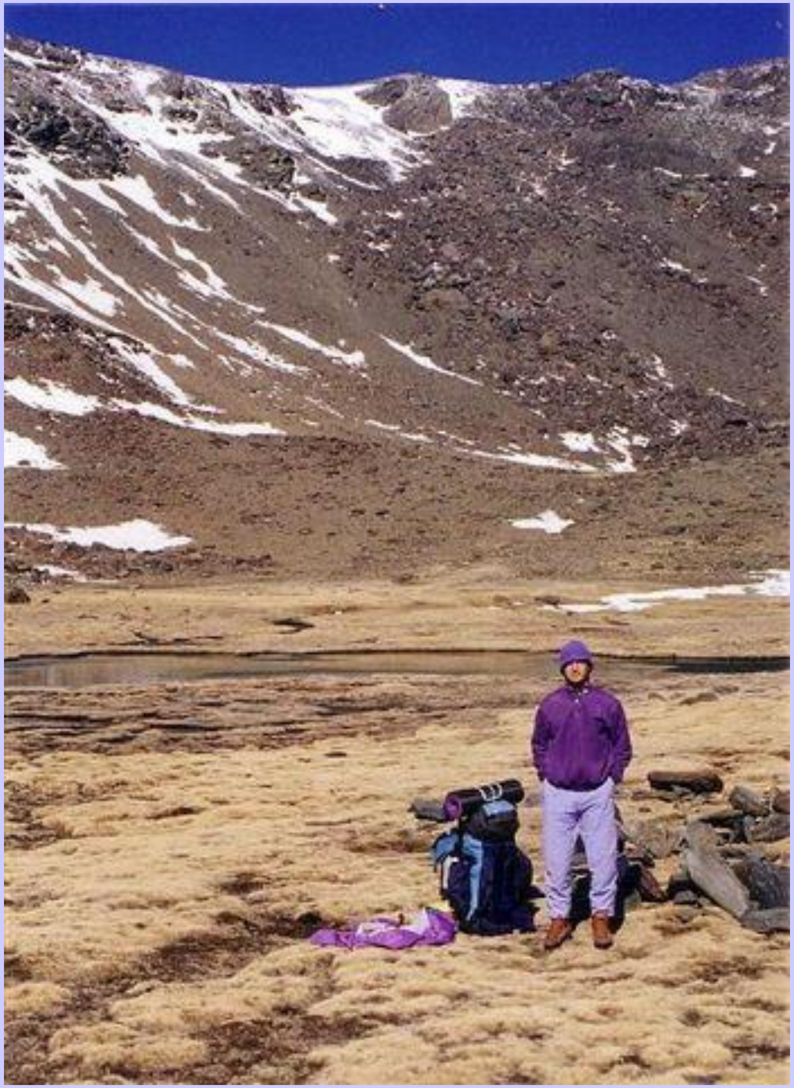
Unidades : Vatio=Watt: W=J/s, kW=10^3 W,

CV=75 kg*9.8 m/s^2*1m/s=735 W~HP=746W

Unidad de trabajo derivada: kWh=kW·h=3.6 MJ

El Mulhacen por siete lagunas desde Trevelez (1)

El Mulhacen por siete lagunas desde Trevelez (2)



Mulhacen : ~3500 m
Trevelez: ~1500 m

Tiempo: 5 h
Peso con carga: 100 kg
$g=10\ m/s^2$

¿Potencia media, Trabajo en kWh?
P=111 W; W=0.556 kWh
¿Velocidad ascensional media?
¿Se cumple $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$?

$\vec{F} = -\vec{F}_g$ es la fuerza necesaria para contrarrestar el peso

Energía en el movimiento armónico simple

$$F = F_x = -kx \quad ; \quad d\vec{r} = dx\vec{i} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = F dx$$

$$W_{AB} = \int_A^B F dx = \int_A^B -kx dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_A^B \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

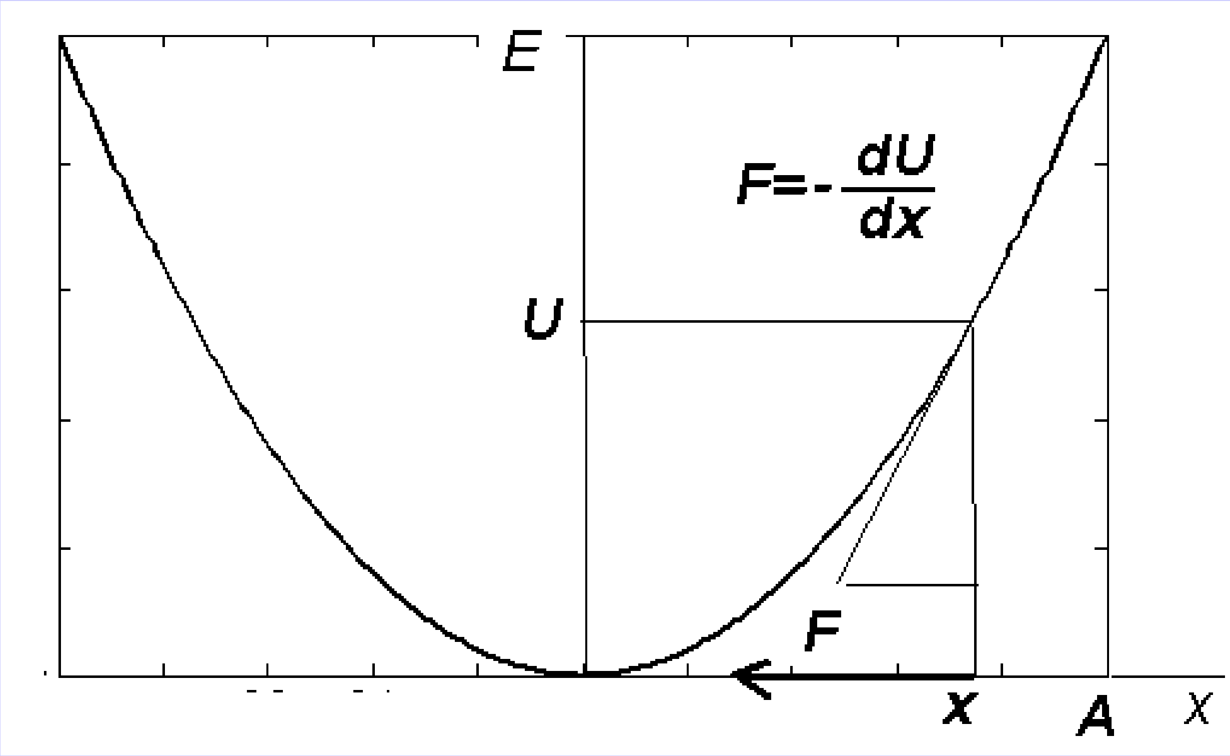
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,;\, v = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2\,;\, E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad ;(m\omega^2 = k)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2}$$

Energía en el movimiento armónico simple (2)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2} \qquad dU = -F dx \quad ; \quad F = -\frac{dU}{dx}$$



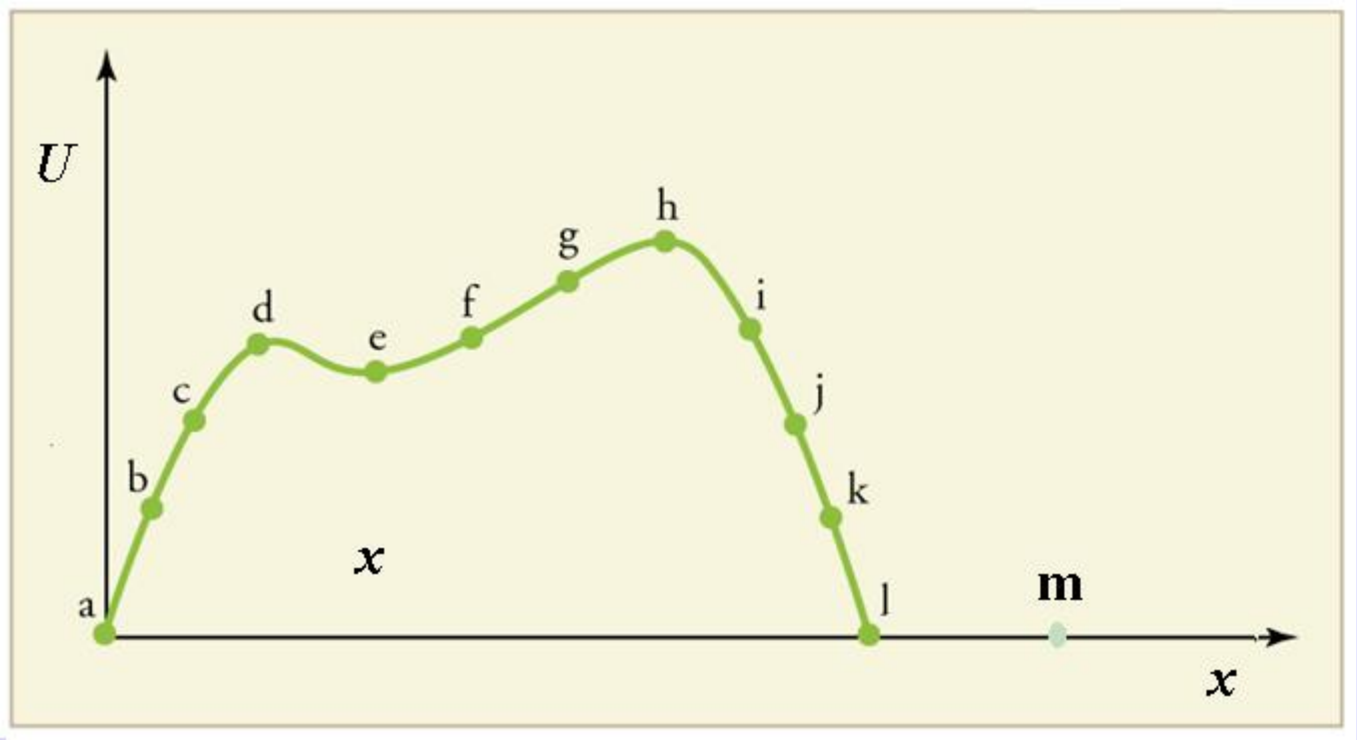
F es la pendiente de *U(x)* con signo cambiado.

El origen es un punto de equilibrio estable

Tipos de equilibrio en una dimensión

- Estable
- Inestable
- indiferente

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$$



¿Qué puntos son de equilibrio y de que tipo?

Ampliación de dinámica

Gradiente (No entra en el examen)

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad \Rightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Definimos el operador gradiente

$$\boxed{\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}$$

Definición alternativa de la energía potencial

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

Comprobar para las dos energías potenciales gravitatorias

Propiedades del gradiente (*F*)

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{l} = |\nabla U||d\vec{l}|\cos(\theta) = -F\,|d\vec{l}|\cos(\theta)$$

1.-Perpendicular a las superficies equipotenciales

2.- Tiene la dirección de máximo aumento (disminución) de la energía potencial

3.- Su modulo es igual a la variación de U por unidad de longitud en la dirección de máximo aumento (=disminución)

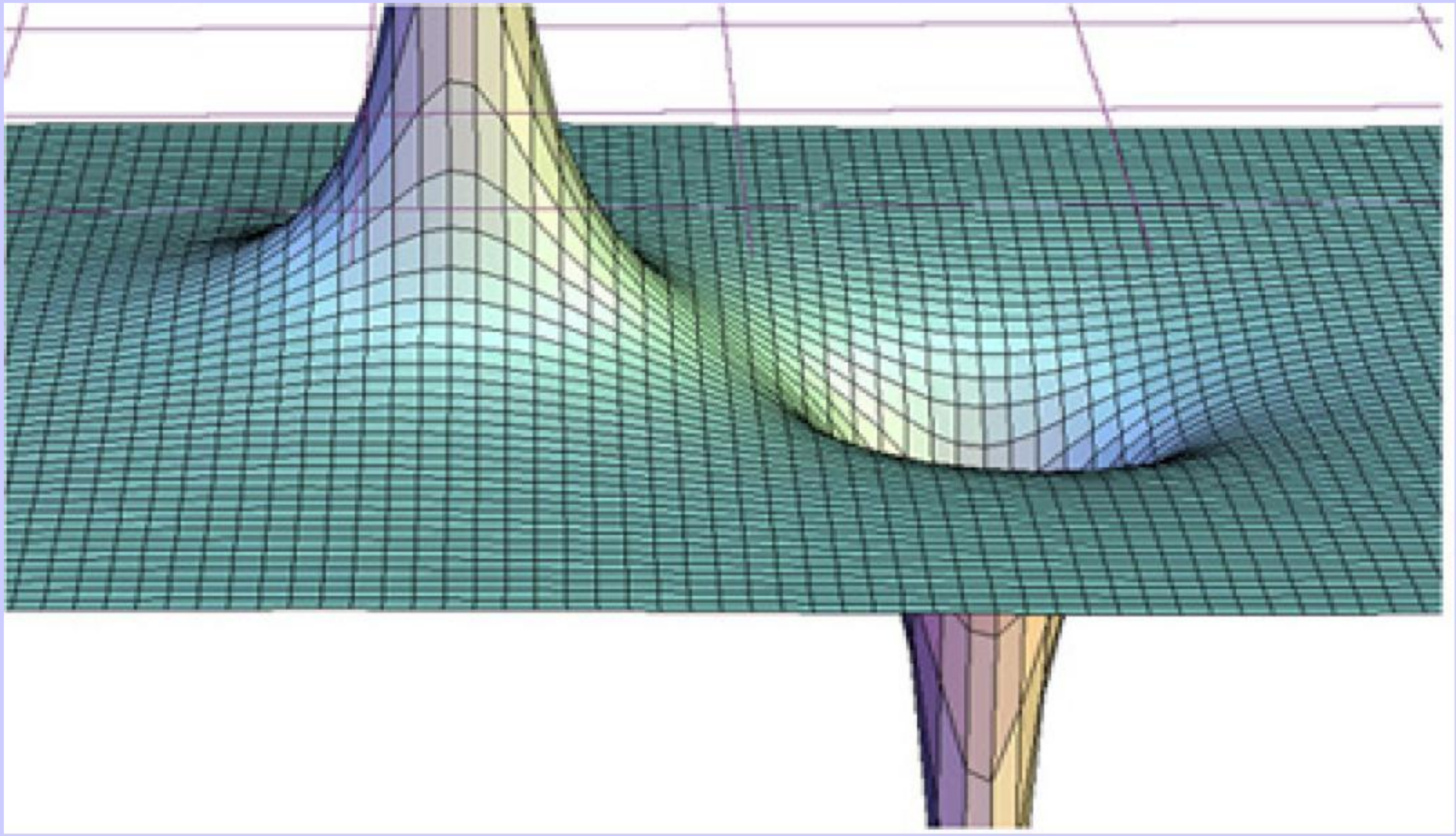
$$|\nabla U| = \left(\frac{dU}{dl}\right)_{grad}$$

4.-La variación de U en la dirección de un vector unitario viene dada por

$$\left(\frac{dU}{dl}\right)_{\lambda} = \nabla U \cdot \vec{\lambda} = -\vec{F} \cdot \vec{\lambda}$$

Paisajes de energía potencial

Máximo de U

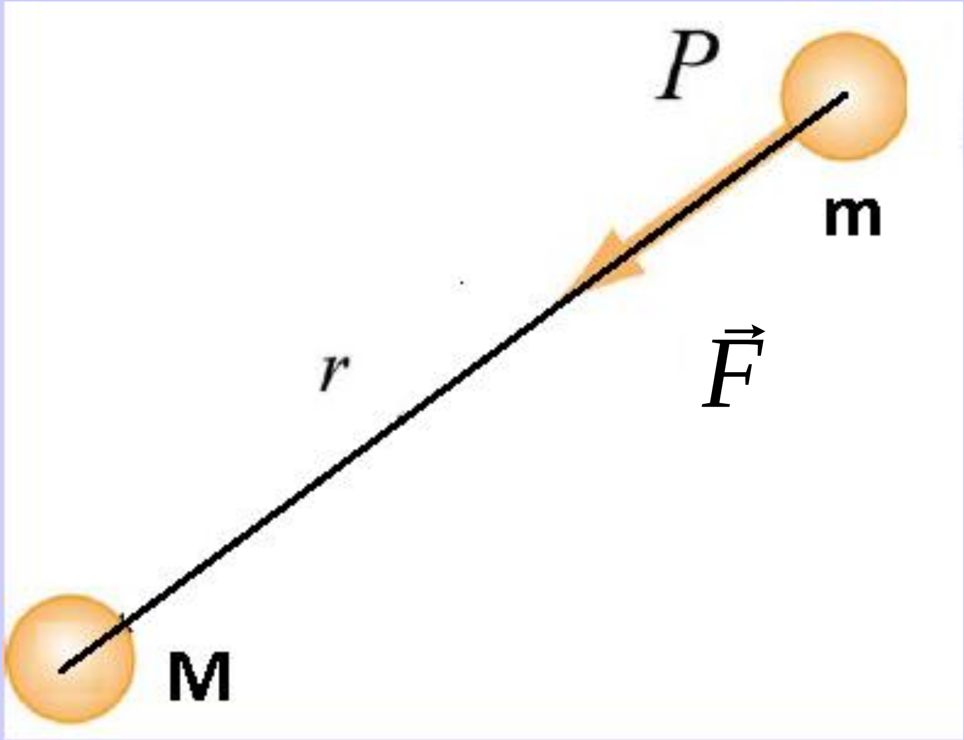


Mínimo de U

Ejemplo: fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales M y m

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow$$

$\vec{F}$ tiene dirección radial atractiva



Energía potencial en un campo de fuerzas centrales (gravitatorio)

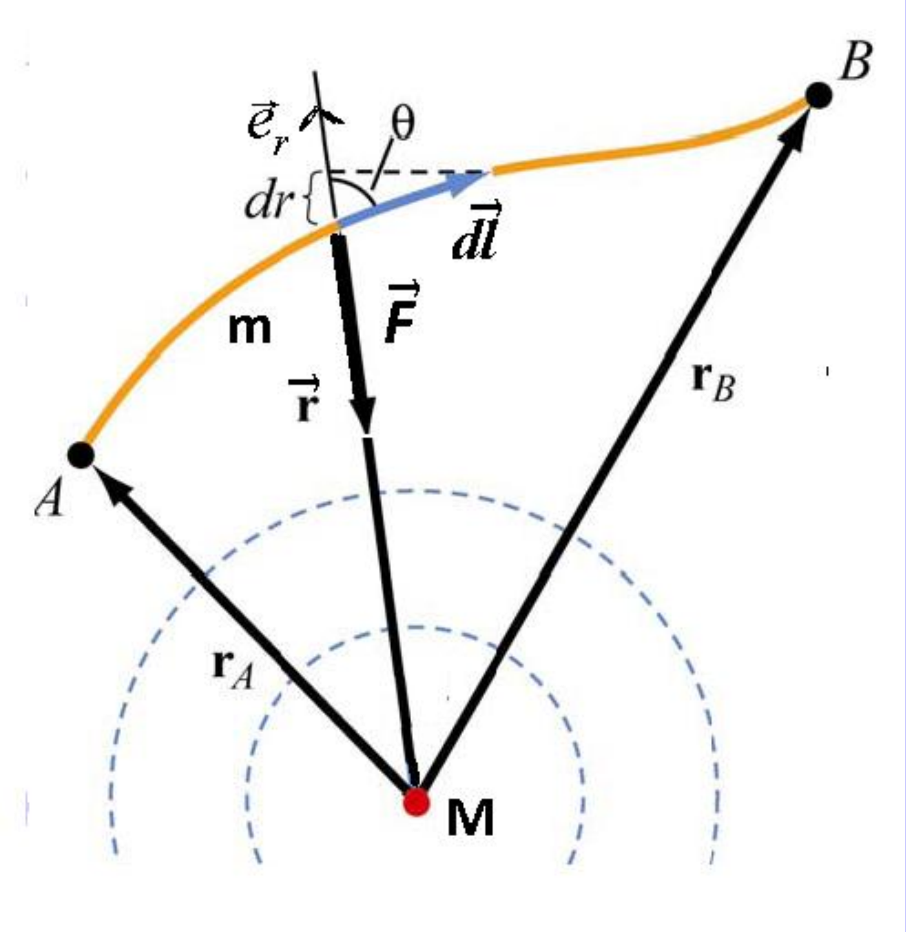
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(r)\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B -F(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B -F(r)\,\mathrm{d}\,l\cos(\theta) =$$

$$-\int_A^B F(r)\,\mathrm{d}\,r = -\int_A^B G\frac{Mm}{r^2}\,\mathrm{d}\,r =$$

$$= G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} \Rightarrow$$

Tomamos U_g=0 en r= ∞

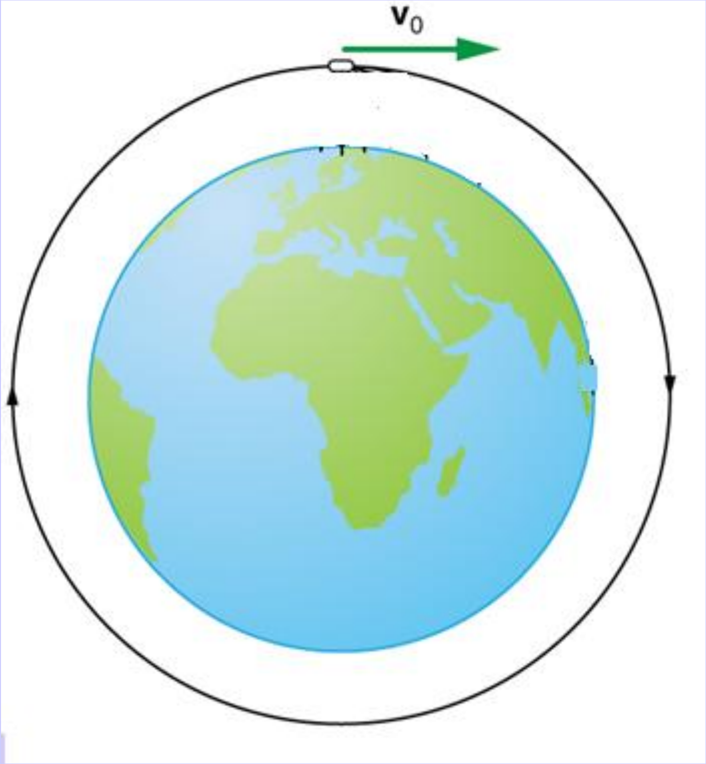
$$\boxed{U_g = -G\frac{Mm}{r}}$$



Ejemplo

Gravedad en general

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$



Demostrar que la energía de un satélite en orbita circular en función de r es

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

¿Cual es el radio de la orbita geoestacionaria si el radio de la tierra es R=6371 km

Resultado r~42000 km~6.6 R