TEMA 1

1. Comparar la atracción gravitatoria entre dos electrones ($F_g = G m_e m_e / r^2$ with $G = 6{,}672 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2) con la fuerza eléctrica repulsiva entre ellos, si la carga del electrón es $e = 1{,}602 \times 10^{-19} C$ y su masa $m_e = 9{,}1095 \times 10^{-31}$ kg.

¿Y si son dos protones? $m_p = 1836\, m_e = 1{,}6726 \times 10^{-27}$ kg

$$F_e = K_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = K_e \frac{|(-e)(-e)|}{r^2} = K_e \frac{e^2}{r^2} \; ; \; F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{m_e^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{K_e \frac{e^2}{\cancel{r^2}}}{G \frac{m_e^2}{\cancel{r^2}}} = \frac{K_e e^2}{G m_e^2} = \frac{9 \times 10^{9} \frac{\cancel{N \cdot m^2}}{\cancel{C^2}} (1{,}6 \times 10^{-19} \cancel{C})^2}{6{,}672 \times 10^{-11} \frac{\cancel{N \cdot m^2}}{\cancel{kg^2}} (9{,}1 \times 10^{-31} \cancel{kg})^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_e}{F_g} = 4{,}17 \times 10^{42}}$$

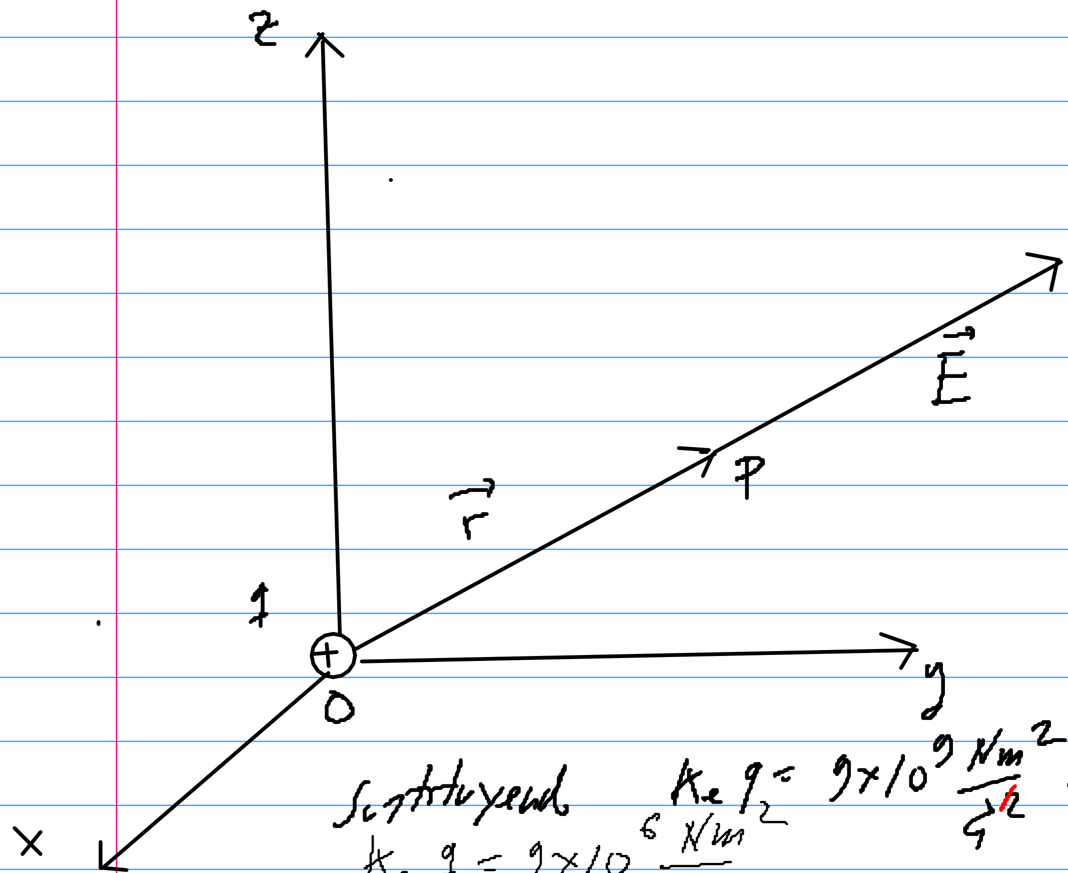
Si fuesen protones: $F_g' = G \frac{m_p^2}{r^2} = G \frac{1836^2 m_e^2}{r^2}$

y $F_e' = F_e \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{F_e'}{F_g'} = \frac{F_e}{1836^2 F_g} = \frac{1}{1836^2} \left(\frac{F_e}{F_g} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{F_e'}{F_g'} = 1{,}25 \times 10^{36}}$$

TEMA 1

2. Considerar una carga puntual $q = +1$ mC colocada en el origen de coordenadas. (**a**) Calcular el módulo del campo eléctrico creado en un punto genérico de coordenadas P=(x, y, z); (**b**) ¿Cuál es la forma de una superficie con potencial eléctrico constante. ¿Cuál es la ecuación del la superficie si el potencial constante es $V_2 = 45$ MV; (**c**) Calcular el módulo de la fuerza ejercida por q en otra carga $Q = +1$ μC en el punto P_2 de dicha superficie; (**d**) El trabajo hecho por el campo en dos casos (d.1) si Q se mueve de P_2 a un punto P_3 en la superficie equipotencial con potencial $V_3 = 20$ MV y (d.2) si Q se mueve de P_2 al infinito ($r \to \infty$).



$\vec r_{OP} = \vec r = \vec{OP} = (x, y, z)$

$\vec E = K_e \frac{q}{r_{OP}^3}\vec r_{OP} \Longrightarrow$

$\vec E = K_e \frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z)$

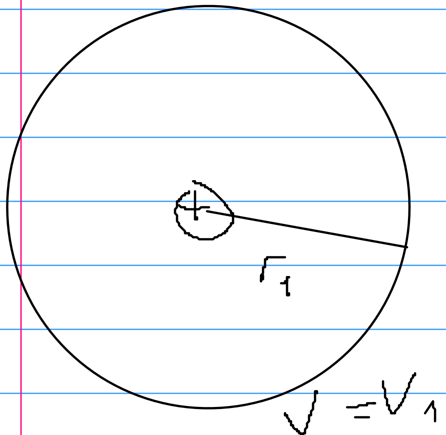
$\Rightarrow \boxed{E = K_e \frac{q}{(x^2+y^2+z^2)}}$

Sustituyendo $K_e q = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^{\cancel{2}}} 10^{-3} \cancel{C} \Rightarrow \boxed{E = \frac{9\times10^6 \, Nm^2}{(x^2+y^2+z^2)\, C}}$

$K_e q = 9\times10^6 \frac{Nm^2}{C}$

(b) ¿Forma de una superficie con V cte? ¿(b2) Para $V_2 = 45\,\mu V$?

$$V = k\frac{q}{r} = V_1 \text{ cte} \Rightarrow r = \frac{kq}{V_1} \text{ cte}$$



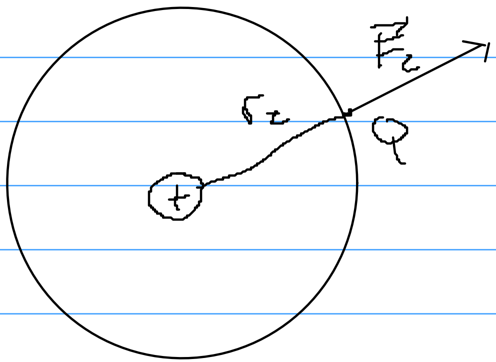
$\Rightarrow$ superficie esférica de radio $r_1 = \dfrac{kq}{V_1}$

(b2) $$r_2 = \frac{kq}{V_2} = \frac{9\times10^{6}\,\frac{Nm^2}{C}}{45\times10^{6}\,V} = 0{,}2\,\frac{(N\cdot\cancel{m})}{\cancel{V}}\,m$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Una superficie esférica de radio } r = 0{,}2\,m}$

$\boxed{x^2+y^2+z^2 = 0{,}2^2\,m^2}$

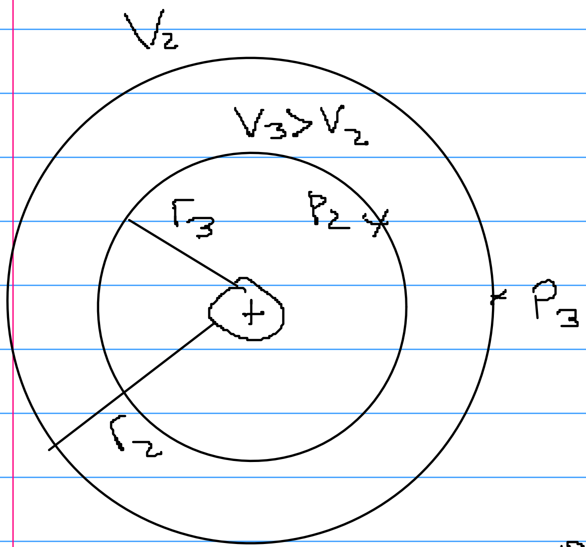
(c) $F_2 = F(P_2)$ sobre $Q = 1\,\mu C$



$$F_2 = k_e\frac{q}{r_2^2}Q \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{9\times10^{6}\,\frac{N\cancel{m^2}}{\cancel{C}} \times 1\times10^{-6}\,\cancel{C}}{0{,}2^2\,\cancel{m^2}} \Rightarrow \boxed{F_2 = 225\,N}$$

(d) (d1) Si q se mueve de P_2 a P_3, con $V_3 = 20\ MV$ calcula el trabajo hecho por el campo.



$V_2 = 55\ MV$

$V = K_e \dfrac{q}{r} \Rightarrow$ V disminuye con $r \Rightarrow$

$r_3 < r_2$

$W_{P_2P_3} = U(P_2) - U(P_3) > 0$

$W_{P_2P_3} = q\,(V(P_2) - V(P_3)) =$

$= q\,(55 - 20)\ MV = 1\,\underbrace{\mu C}_{10^{-6}} \times 25\ \underbrace{MV}_{10^{6}} = 25\ \underbrace{J} \Rightarrow$

$\boxed{W_{P_2P_3} = 25\ J}$

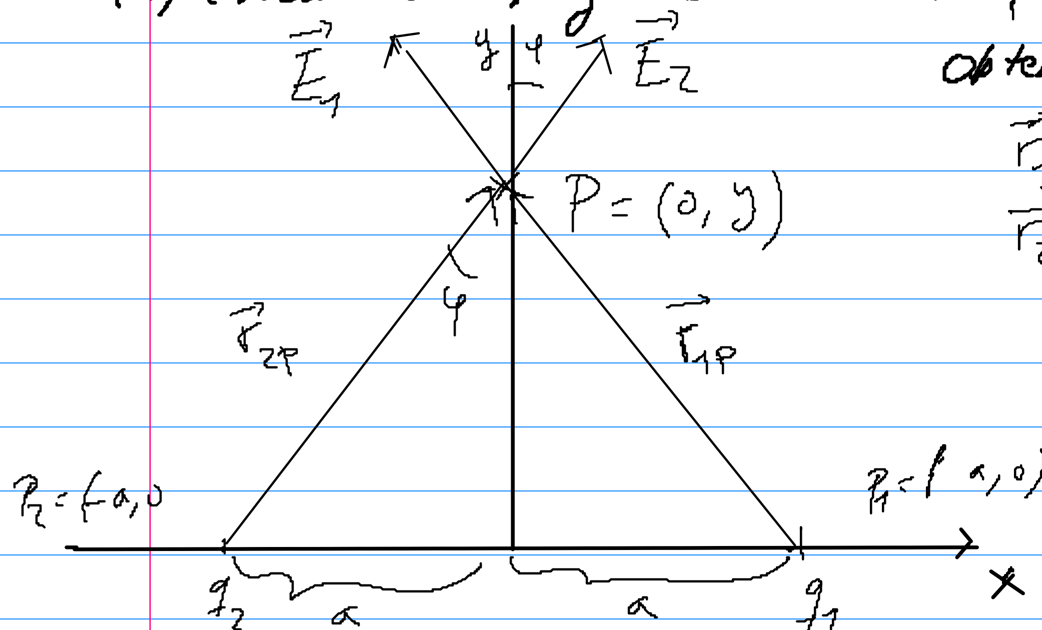
(d2) Si $P_3 = \infty \Rightarrow V_3 = 0 \Rightarrow W_{P_2\infty} = q\,V(P_2) = \cancel{10^{-6}}\,C\ 55 \times \cancel{10^{6}}\ V$

$\Rightarrow \boxed{W_{P_2\infty} = 55\ J}$

3. Dos cargas puntuales, q_1 y q_2 de igual valor q se colocan en los puntos de coordenadas $P_1 = (a, 0)$ y $P_2 = (-a, 0)$ (la coordenada z ha sido suprimida porque el problema está limitado al plano xy, por lo tanto z es siempre 0). Calcular: (**a**) el potencial electrotático y el módulo del campo electrostático creado por ambas cargas en cualquier punto $P_y = (0, y)$ en el eje y; ¿cuál es la dirección de $\vec{E}$ (**b**) compruebe que si P_y está lejos del origen de coordenadas, por lo que podemos despreciar a^2 con respecto a y^2, el potencial y el campo son los mismos que aquellos creados por un sola carga puntual $2q$ (carga total del sistema) en el origen de coordenadas.

. Tenemos q_1 y q_2 en $P_1=(a,0)$ y $P_2=(-a,0)$ con $q_1=q_2=q$

(a) Calcular V y E en $P=(0,y)$ ¿dirección de $\vec{E}$?



Obtenemos los vectores de posición relativos

$$\vec{r}_{1P} = \vec{OP} - \vec{OP_1} = (0,y)-(a,0) = (-a,y)$$

$$\vec{r}_{2P} = \vec{OP} - \vec{OP_2} = (0,y)-(-a,0) = (a,y)$$

$$|\vec{r}_{1P}| = |\vec{r}_{2P}| = \sqrt{a^2+y^2}$$

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{q_1}{r_{1P}^3}\vec{r}_{1P}; \quad \vec{E}_2 = k_e \frac{q_2}{r_{2P}^3}\vec{r}_{2P}$$

Sustituyendo: $\vec{E}_1 = K_e \dfrac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(-a, y)$, $\vec{E}_2 = K_e \dfrac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a, y)$

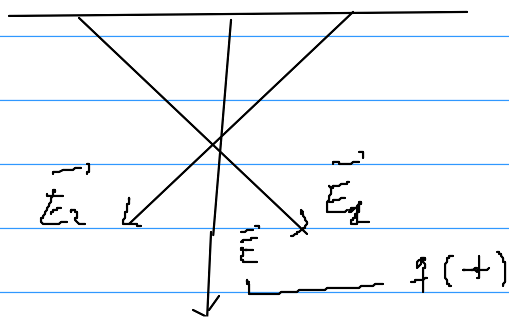
Vemos que las componentes x se cancelan, por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = K_e \frac{2qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{j}} \quad (1)$$

Hemos hecho la deducción con $y>0$ y $q>0$. $\vec{E} \nearrow\!\!\nearrow \vec{j}$

Si q fuere negativa también valdría la expresión

Si $q>0$ e $y<0$, $\vec{E} \uparrow\uparrow -\vec{j}$ también.

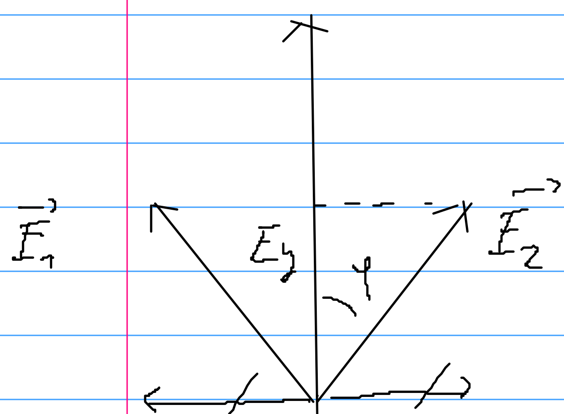


Si $q<0$ e $y<0$, también (1) sería válida. $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{j}$

Respuesta. $\boxed{E = k_e \dfrac{2q|y|}{(a^2+y^2)^{3/2}} \text{ , dirección paralela al eje } y}$

Otra forma menos matemática.

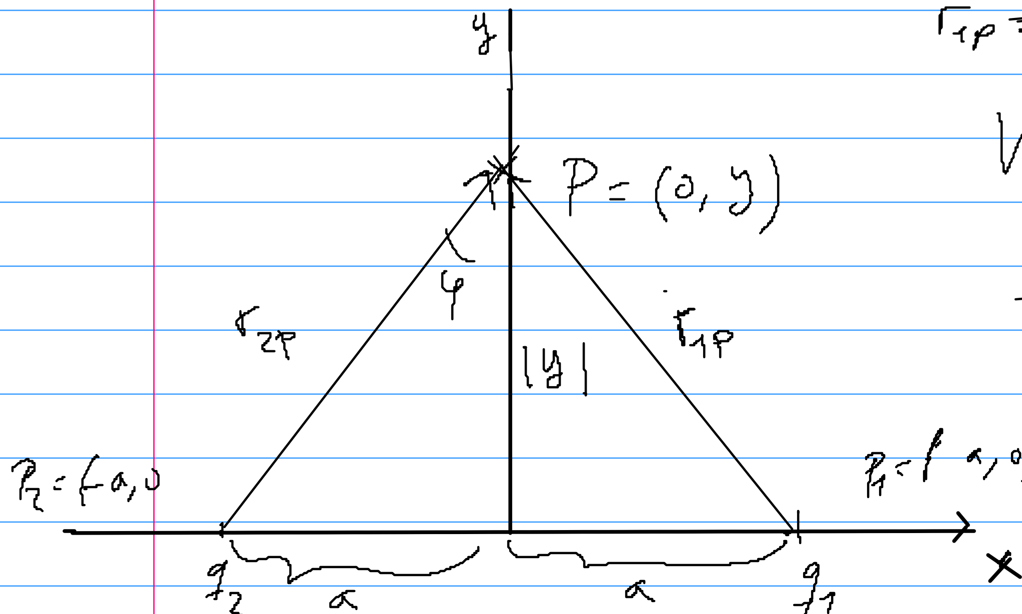
- Como las cargas y las distancias son iguales $E_1 = E_2$
- Como q_1 y q_2 están colocadas simétricamente respecto al eje y, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son simétricos resp. al eje y
- Por lo tanto se cancelan las componentes x y se suman las y



$$E = 2|E_y| = 2E_1 \cos(\varphi) = 2E_1 \frac{|y|}{r_{1P}} \Rightarrow$$

$$E = 2k\frac{q}{r_{1P}^2}\frac{|y|}{r_{1P}} = 2k\frac{q|y|}{r_{1P}^3} \Rightarrow \boxed{E = 2k\frac{q|y|}{(a^2+|y|^2)^{3/2}}}$$

a) [a2] El potencial electrostático en $P=(0,y)$



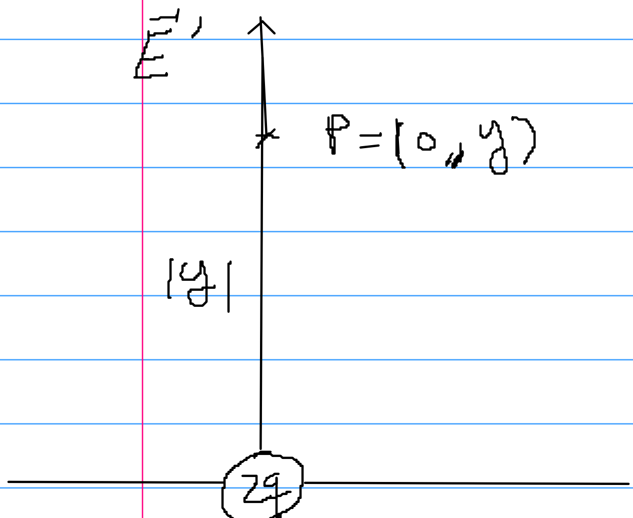
$$r_{1p}=r_{2p}=\sqrt{a^2+y^2}$$

$$V=V_1+V_2=k_e\frac{q_1}{r_{1p}}+k_e\frac{q_2}{r_{2p}}=2k_e\frac{q}{r_{1p}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V=2k_e\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}}}$$

(b) Si $y^2 >> a^2 \Rightarrow y^2+a^2 \simeq y^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+y^2} \simeq |y| \Rightarrow V = 2K_e \dfrac{q}{|y|}$

$$\Rightarrow \boxed{V = k_e \frac{2q}{|y|}}$$



$V' = K_e \dfrac{2q}{|y|}$ c.q.d.

Para el campo: $E = 2K_e \dfrac{q\,|y|}{(a^2+y^2)^{3/2}} \simeq$ $\quad a^2 << y^2$

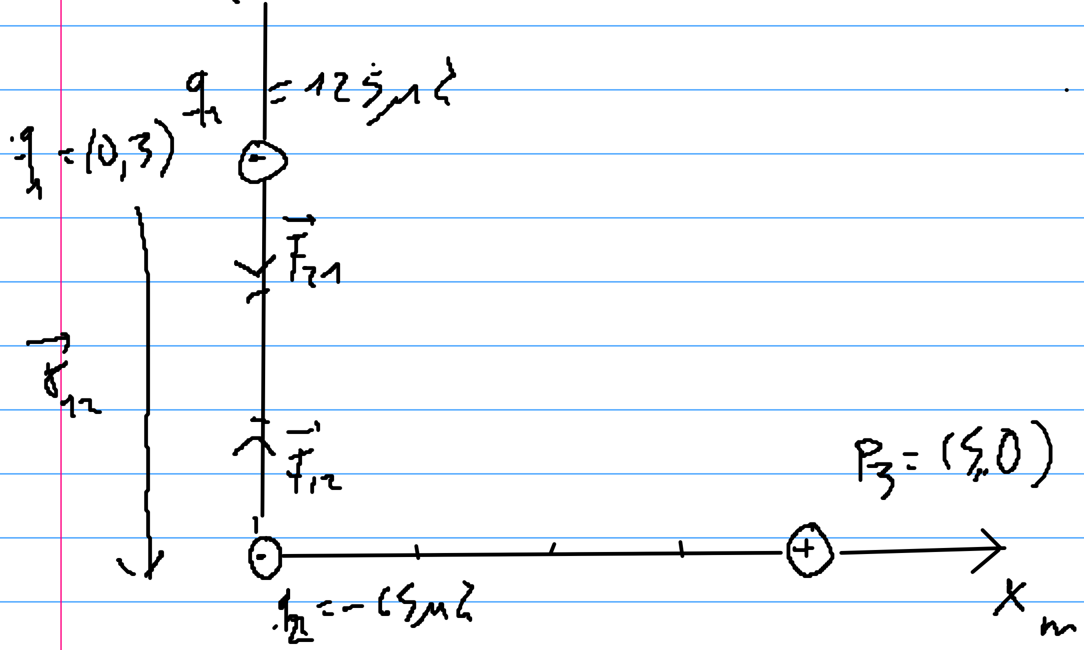
$$\simeq 2K_e \frac{q\,|y|}{|y|^3} = 2K_e \frac{q}{|y|^2} \Rightarrow \boxed{E = K_e \frac{2q}{|y|^2}}$$

$\Rightarrow \boxed{E = E'}$ La dirección y el sentido son también los mismos

TEMA 1

4. Dos cargas puntuales $q_1 = +125\ \mu$ C y $q_2 = -64\ \mu$ C, están situadas en los puntos de coordenadas $P_1 = (0, 3)$ m y $P_2 = (0, 0)$ m. (**a**) Calcular el módulo de la fuerza entre estas cargas. ¿Es la fuerza atractiva o repulsiva? (**b**) Obtener el módulo y dirección de la fuerza que ejercen sobre una tercera carga $Q = +1\ \mu$C en el punto $P_3 = (4, 0)$ m. Hacer un dibujo de la fuerza ejercida por cada carga y de la fuerza total sobre Q. (**c**) Calcular el trabajo realizado por la fuerza total ejercida por q_1 y q_2 sobre Q si Q es movida a lo largo del eje x desde P_3 m hasta el infinito.

(a) obtener el módulo de F_{12} y F_{12}



$r_{12} = 3$

Formalmente

$\vec{r}_2 = (0,0)$; $\vec{r}_1 = (0,3)$

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0,0) - (0,3)$

$\Rightarrow \vec{r}_{12} = -3\vec{j}$

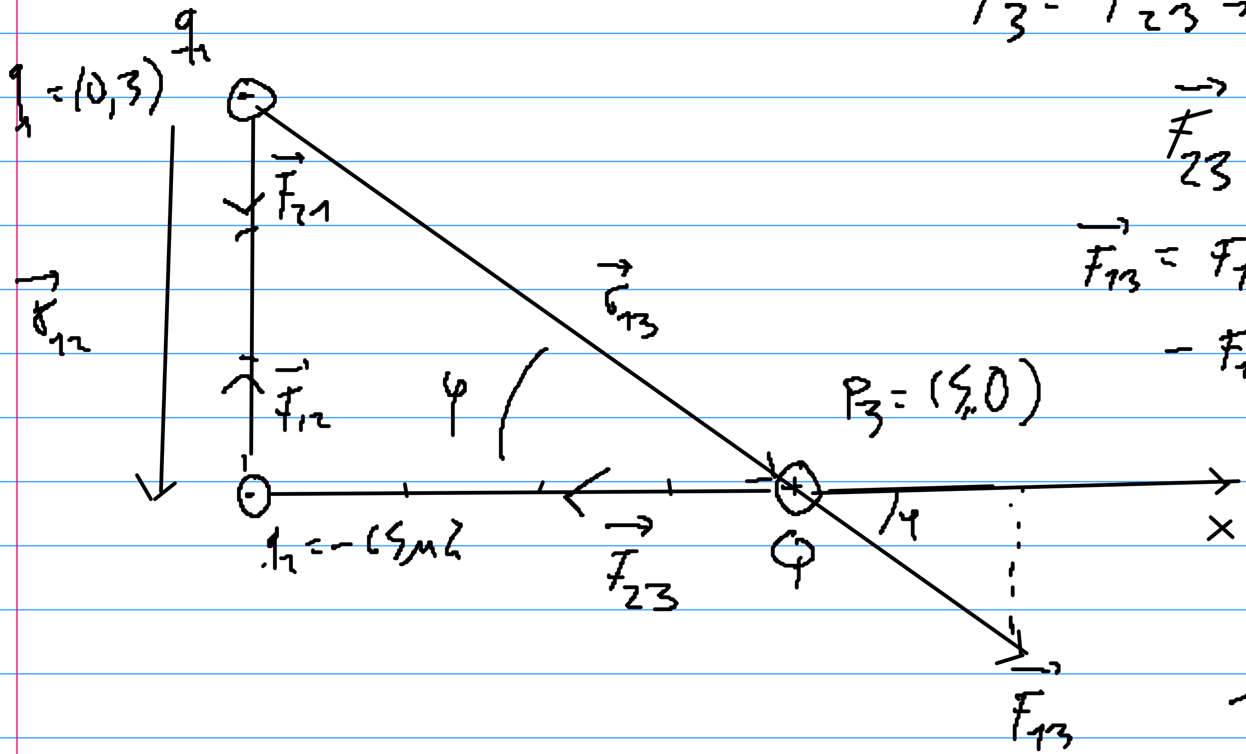
$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = 3m$

$F_{12} = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2} \Rightarrow$

$F_{12} = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{125\times64}{3^2 m^2} \left[\frac{10^{-6} C}{\mu C}\right]^2 \Rightarrow \boxed{F_{12} = 8N}$ $\boxed{\vec{F}_{12} = 8N\vec{j}}$

(b) F sobre $q = 1\,\mu C$ en $P_3 = (5,0)\,m$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13}$$



$$\vec{F}_{23} = -F_{23}\,\vec{i} \qquad (1)$$

$$\vec{F}_{13} = F_{13}\cos(\varphi)\,\vec{i} - F_{13}\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\vec{j} \qquad (2)$$

$$r_{13} = \sqrt{3^2+5^2} = 5$$

$$\cos(\varphi) = \frac{5}{5}$$

$$\mathrm{sen}(\varphi) = \frac{3}{5}$$

Calculamos los módulos $F_{23} = k_e \frac{q\,|q_2|}{r_{23}^2} = k_e \frac{q\;(5\mu C)}{5^2 m^2} = k_e\, q\, 5 \frac{\mu C}{m^2}$

$$F_{13} = k_e \frac{q\,|q_1|}{r_{13}^2} = k_e \frac{q\;125\,\mu C}{5^2 m^2} = k_e\, q\, 5\ \mu C/m^2$$

Sustituimos en (1) y (2)

$$\vec{F}_{23} = -k_e\, \cancel{q}\, 5 \frac{\mu C}{m^2}\, \vec{i}$$

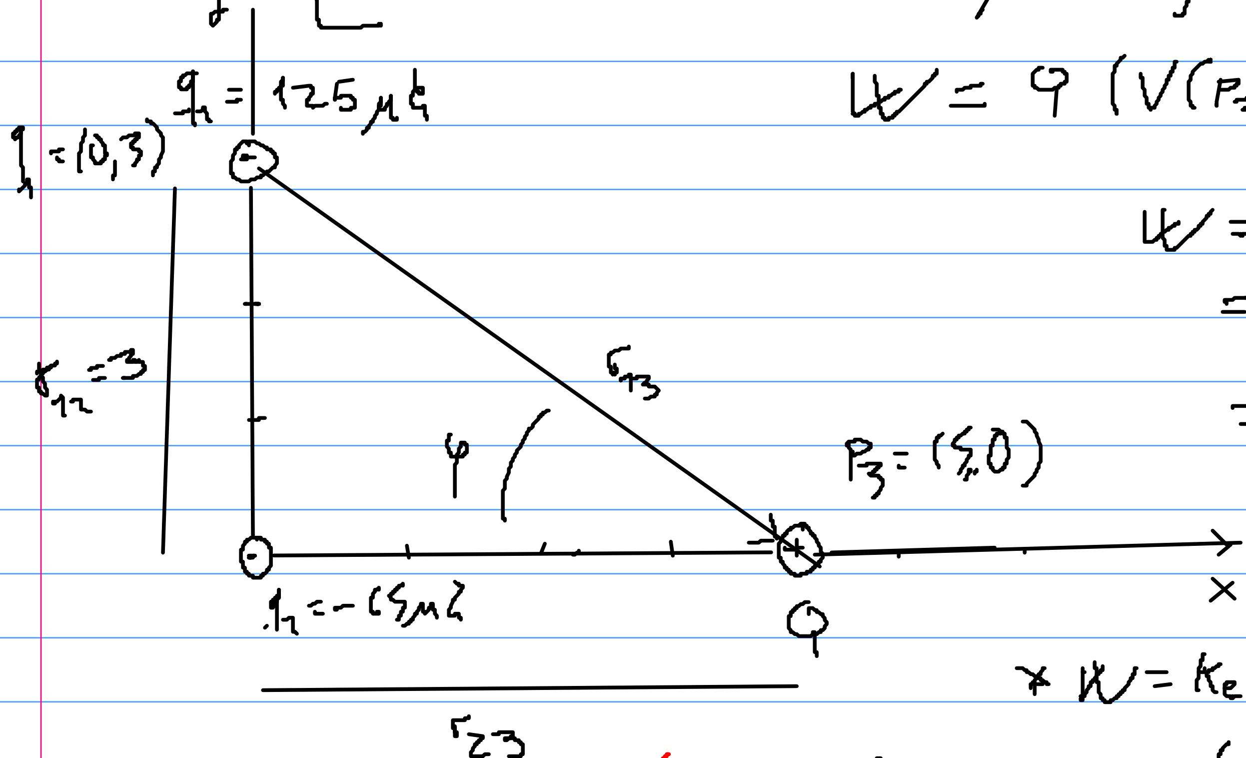
$$\vec{F}_{13} = +k_e\, \cancel{q}\, 5 \frac{\mu C}{m^2} \frac{4}{5}\, \vec{i} - k_e\, q\, 5 \frac{\mu C}{m^2} \frac{3}{5}\, \vec{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = -9\times10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\, 1\,\mu C \times 3 \frac{\mu C}{m^2}\, \vec{j} \left(\frac{1\,C}{10^6 \mu C}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -27\,mN\,\vec{j}}$$

(c) W realizado por F ejercida por q_1 y q_2 sobre q

si: q se mueve a lo largo del eje x desde $P_3 \to \infty$



$$W = q\left(V(P_3) - \cancel{V(\infty)}\right) \Rightarrow$$
$$\cancel{V(\infty)} = 0$$

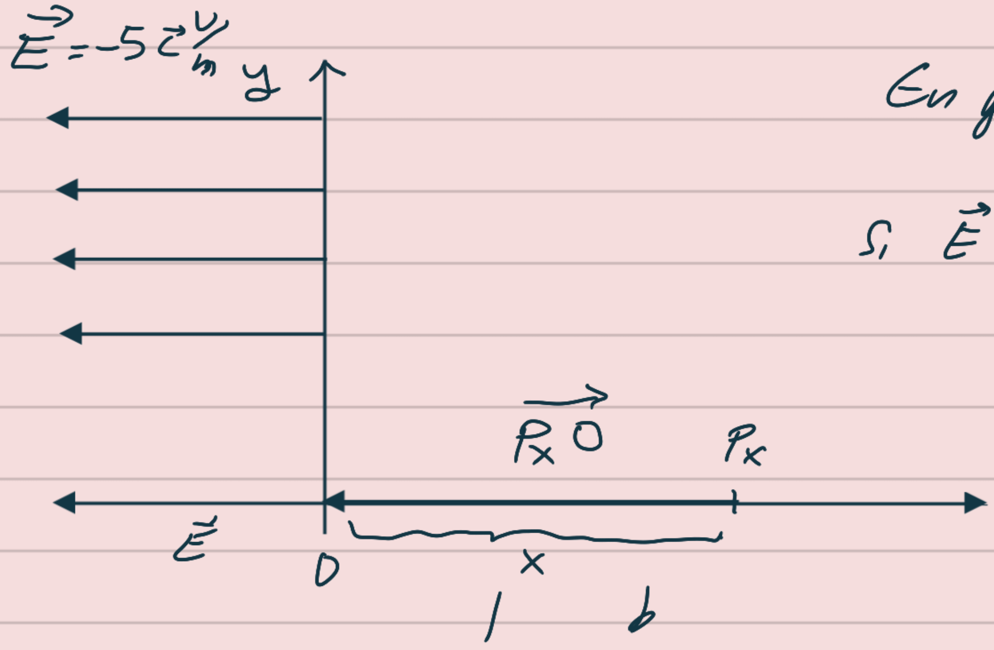
$$W = qV(P_3) =$$
$$= q\left(V_1(P_3) + V_2(P_3)\right)$$
$$= q\left(k_e \frac{q_1}{r_{13}} + k_e \frac{q_2}{r_{23}}\right) =^{*}$$

$$^{*}\ W = k_e q \left(\frac{125\,\mu C}{5\,m} + \frac{-64\,\mu C}{4\,m}\right)$$

$$\to W = 9\times 10^9 \frac{N m^{\cancel{2}}}{C^2} \times 10^{-6}\,C\,(25-16)\,\frac{10^{-6}\,C}{\cancel{m}} \Rightarrow \boxed{W = 81\,mJ}$$

Problema 5. Tema 1. $\vec{E} = -5\,\vec{i}$ kV/m uniforme.

(a) Si $V=0$ en $O=(0,0,0)$, obtener $V(x)$ en P_x del eje x

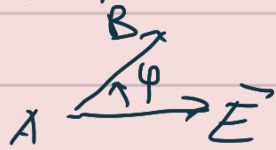


En general $V(A) - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$

Si $\vec{E}$ es uniforme

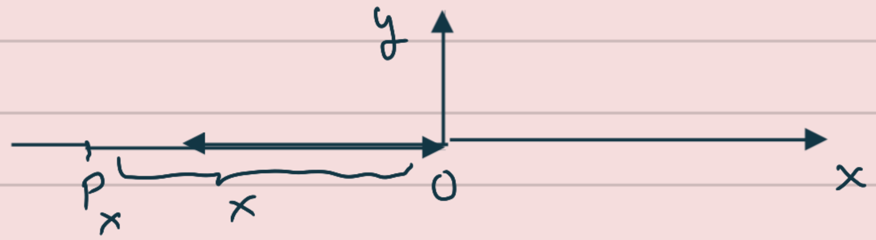
$V_A - V_B = \vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{s} \Rightarrow$

$V_A - V_B = \vec{E}\cdot\vec{AB} = |\vec{E}||\vec{AB}|\cos(\varphi)$

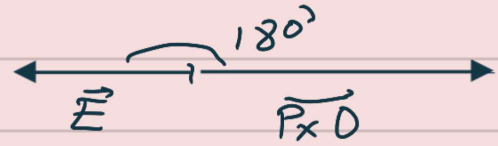


Aplicándolo a nuestro problema $V(P_x) - \underbrace{V(O)}_{0} = \vec{E}\cdot\overrightarrow{P_x O} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x>0 \\ \varphi = 0 \\ x = |x| \end{array}\right\} \Rightarrow V(P_x) = |\vec{E}||\overrightarrow{P_x O}|\cos(0^\circ) = E|x|1 = Ex$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x<0 \\ \varphi = 180^\circ \\ x = -|x| \end{array}\right\}$$



$$V(P_x) = |\vec{E}||\overrightarrow{P_x O}|\cos 180^\circ = E\underbrace{|x|(-1)}_{x} = Ex$$

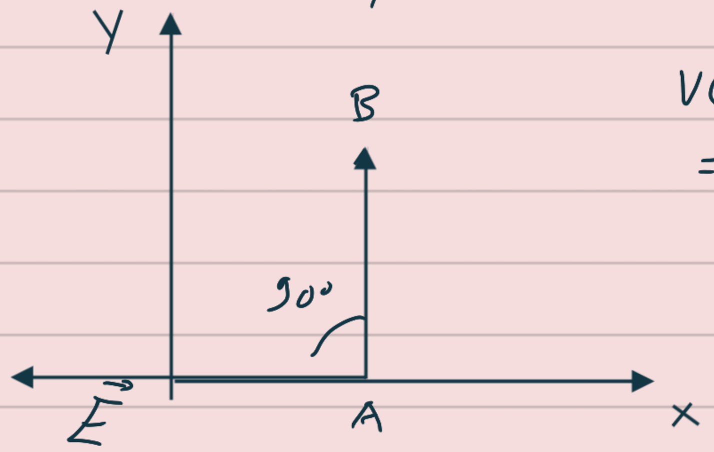
Luego, para todo x, $\boxed{V(P_x) = Ex = 5\,\frac{V}{m}\,x}$.

Más fácil. $V(P) - V(O) = \vec{E}\cdot\overrightarrow{P_x O} = \vec{E}\cdot(-\overrightarrow{OP_x})$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow V(P) = (-E\vec{i})(-x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$\Longrightarrow V(P) = Ex + 0\cdot y + 0\cdot z \Rightarrow \boxed{V(P) = Ex}$

(b) Demostrar que si $\vec{AB} \perp \vec{E}$ $V(A)-V(B)=0$



$V(A)-V(B) = \vec{E}\cdot\vec{AB} =$

$= E\,|\vec{AB}|\cos 90° = 0 \Rightarrow$

ó

$\boxed{V(A) = V(B)}$

c.q.d (como queríamos demostrar.)

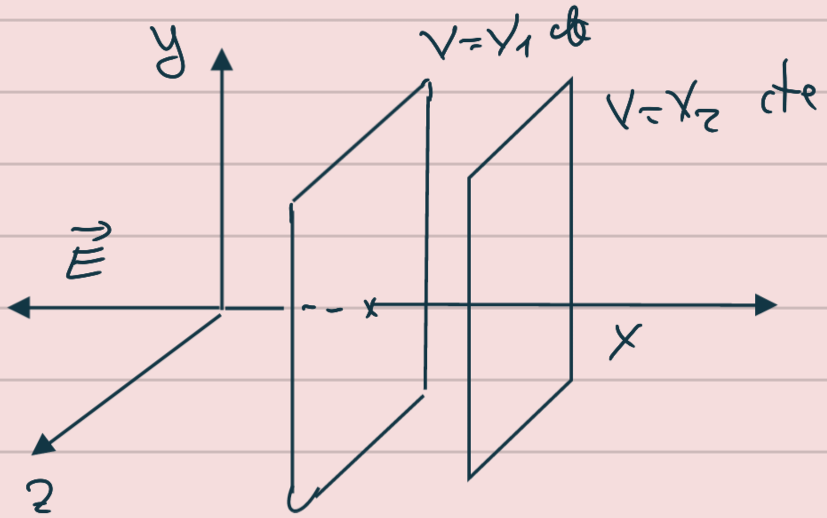
También $V(A) = E\,x_A$; $V(B) = E\,x_B$

Si nos movemos perpendicularmente al eje x, $x_A = x_B$

$\Rightarrow$ $V(A) = V(B)$ c.q.d.

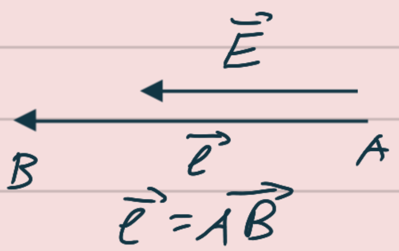
¿Cuales serán las superficies con V cte? Dibujarlas

$x=$cte son planos perpendiculares al eje x



Como $\vec{E}$ apunta hacia potenciales decrecientes $V_1 < V_2$

(c) ¿Disminución de V si nos desplazamos 3m en la dirección de $\vec{E}$



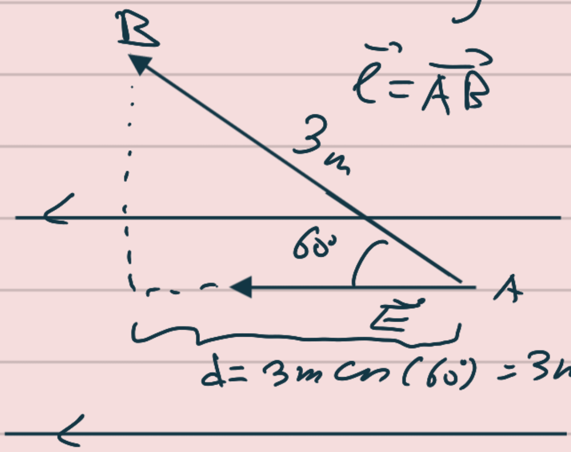
$\vec{l} = \vec{AB}$

$V(A)-V(B) =$ disminución (antes) $-$ (después)

$V(A)-V(B) = E\,l\cos(0°) = E\,l$

$\Rightarrow V_A - V_B = 5\,\frac{V}{m}\,3m \Rightarrow \boxed{V_A - V_B = 15\,V}$

(c) Y si nos movemos la misma distancia con un ángulo de 60° respecto a las líneas de campo?



$d = 3m\cos(60°) = 3m \times \frac{1}{2} = 1{,}5m.$

$$V_A - V_B = \vec{E}\cdot\vec{l} = El\cos(60°) = El\frac{1}{2} = 5\frac{V}{m}\,3m\,\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{V_A - V_B = 7{,}5\,V}$$

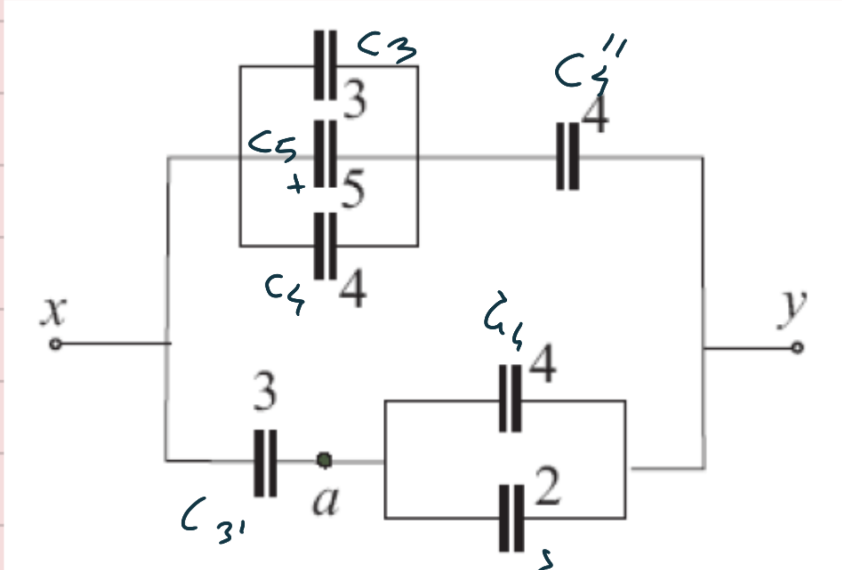
O bien
$V_A - V_B = Ed$
siendo d el desplazamiento en la dirección de $\vec{E}$, $d = l\cos(60°)$

$\Rightarrow d = 3m\,1/2 = 1{,}5m \Rightarrow V_A - V_B = 5\frac{V}{m}\,1{,}5m = 7{,}5\,m$ c.q.d.

Vemos que el signo es correcto, pues $V_A > V_B$ y $\vec{E}$ apunta en la dirección en que disminuye el potencial.

6. Las capacidades de los condensadores de la figura están expresados en μF. (**a**) Obtener la capacidad equivalente C_{xy} entre los puntos x and y; (**b**) Si el condensador con capacidad $C_5 = 5\ \mu$F tiene una carga $Q_5 = +120\ \mu$C en su placa izquierda, encontrar la diferencia de potencial $V_{xa} = V_x - V_a$ entre los puntos x y a.

Sol.: (a) $C_{xy} = 5\ \mu$F; (b) $V_{xa} = 64$ V.



Prob. 6

(a) ¿C_{xy}?

Asociamos condensadores paso a paso. Primero les ponemos nombre

En paralelo $C = \sum C_i$

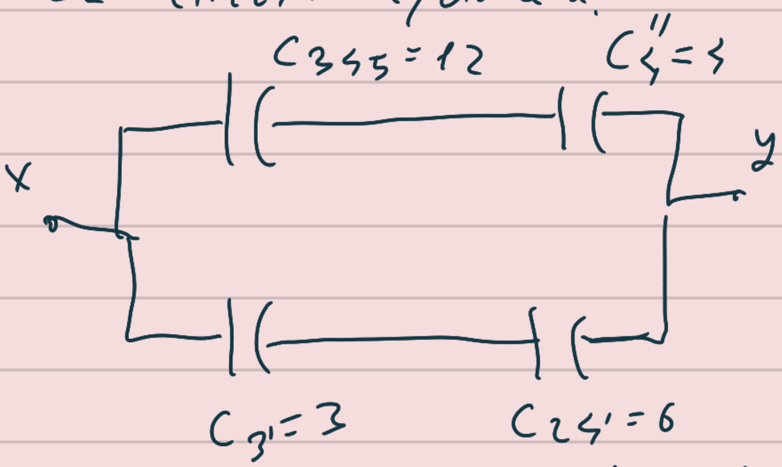
En serie $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

Todas las capacidades en μF

C_3, C_4 y C_5 en paralelo $C_{345} = 3+4+5 \Rightarrow \underline{C_{345} = 12\ \mu F}$

C_4' y C_2 " " $C_{24'} = 2+4 \Rightarrow C_{24} = 6\ \mu F$

El circuito equivale a:



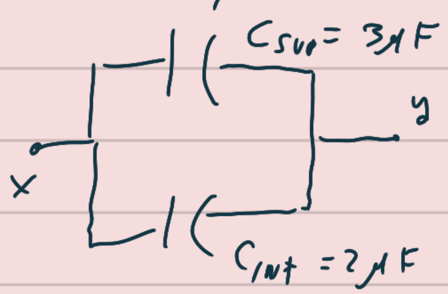
Los dos de arriba están en serie, luego.

$$\frac{1}{C_{SUP}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{C_{SUP} = 3\ \mu F}$$

Idem, los dos de abajo: $\frac{1}{C_{INF}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{C_{INF} = 2\ \mu F}$

El circuito equivale a:

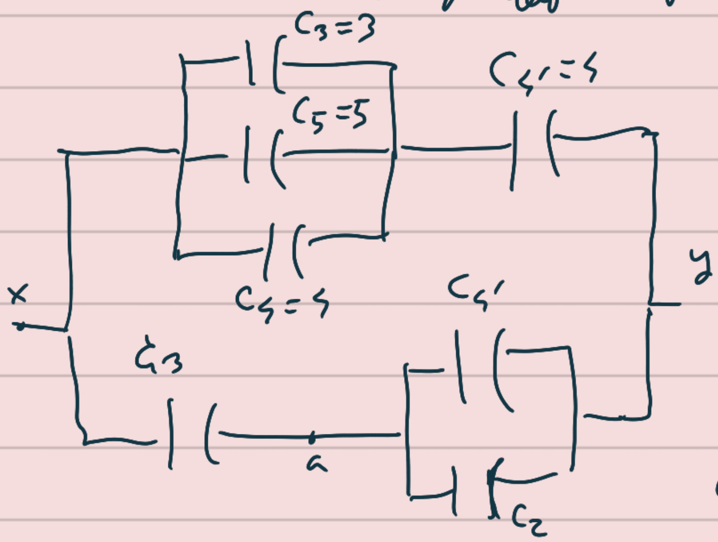


C_{SUP} y C_{INF} están en paralelo, luego:

$$C_{xy} = C_{SUP} + C_{INF} = 3+2 \Rightarrow \boxed{C_{xy} = 5\ \mu F}$$

b) Si C_5 tiene $q_5 = 120\mu C$ (+ a la izquierda) obtener $V_{xa} = V_x - V_a$

Sabemos que $\begin{cases} \text{en serie} & \Delta V = \sum \Delta V_i \;,\; q = q_i \\ \text{en paralelo} & V = V_i \;;\; q = \sum q_i \end{cases}$ $\Big\}$ $q = C \Delta V$



Entonces $\Delta V_{354} = \Delta V_5 = \dfrac{q_5}{C_5} = \dfrac{120\mu C}{5\mu F}$

$\Rightarrow \Delta V_{354} = 24\ V$ y

$q_{354} = C_{354} \Delta V_{354} \Rightarrow$

$q_{354} = 12\mu F \times 24 V \Rightarrow q_{354} = 12 \times 24 \mu C$

Pero C_{354} y $C_{4'}$ están en serie

$q_{SUP} = q_{354} = 12 \times 24 \mu C$ y

$\Delta V_{xy} = \dfrac{q_{SUP}}{C_{SUP}} = \dfrac{12 \times 24 \mu C}{3\mu F} \Rightarrow \underline{\Delta V_{xy} = 96\ V}$, Ahora vamos a

la rama de abajo que equivale a $C_{INF} = 2\mu F \Rightarrow q_{INF} = C_{INF} \Delta V_{xy} \Rightarrow$

$q_{INF} = 2\mu F \times 96\ V \Rightarrow q_{INF} = 2 \times 96 \mu C$

- Como C_{INF} = C_3 y $C_{24'}$ en serie $\Rightarrow q_3 = q_{INF} = 2 \times 96 \mu C$ y

$\Delta V_3 = \dfrac{q_3}{C_3} = \dfrac{2 \times 96 \mu C}{3\mu F} \Rightarrow \Delta V_3 = 64\ V$, como $V_x - V_a = \Delta V_3 \Rightarrow$

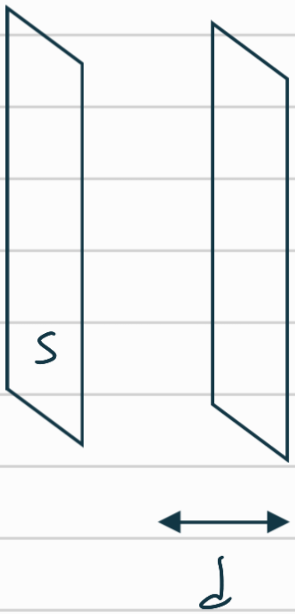
$$\boxed{V_x - V_a = 64\ V}$$

TEMA 1

7. Un condensador de placas paralelas está construido utilizando dos placas planas paralelas metálicas con área $S = 1\ \mathrm{m}^2$ separadas una distancia $d = 1$ cm. Obtener: (**a**) la capacidad del condensador; (**b**) la constante dieléctrica relativa de un material que si se coloca entre las placas aumenta su capacidad a $C' = 10$ nF; (**c**) la energía almacenada en el condensador con y sin dieléctrico si hay una diferencia de potencial entre las placas de $V = 100$ V.

Sol.: (a) $C = 8{,}85 \times 10^{-10}$ F $\simeq 0{,}9$ nF; (b) $\varepsilon_r \simeq 11{,}3$; (c) $4{,}43\,\mu$J en el vacío y $50\,\mu$J con dieléctrico.

$S = 1\,m^2,\ d = 1\,cm$



(a) C_0? $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ en el aire

$\Rightarrow C = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m}\ \frac{1\,m^2}{1\,cm}\left(\frac{10^2\,cm}{1\,m}\right) \Rightarrow$

$\boxed{C_0 = 8{,}85 \times 10^{-10}\,F}$

(b) $C' = \varepsilon_r C_0$ luego

$\varepsilon_r = \frac{C'}{C_0} = \frac{10\,nF}{0{,}885\,nF} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_r = 11{,}3}$

c) U y U_0 si $\Delta V = 100\,V$ (no cambia)

$U_0 = \frac{1}{2} Q_0 \Delta V = \frac{1}{2} C_0 \Delta V\, \Delta V = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2 = \frac{1}{2}\, 8{,}85 \times 10^{-10}\,F\ 100^2\,V^2$

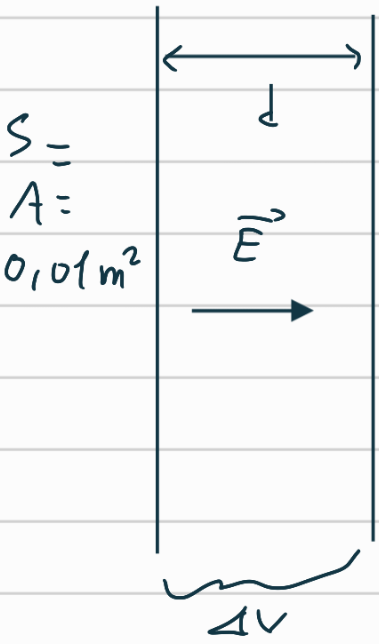
$\Rightarrow \boxed{U_0 = 4{,}42\,\mu J}$

y $U' = \frac{1}{2} C' \Delta V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 \Delta V^2 = \varepsilon_r \underbrace{U_0}_{U_0}$

$\Rightarrow U' = 11{,}3 \times 4{,}42\,\mu J \Rightarrow \boxed{U' = 49{,}9\,\mu J}$

8. Se quiere construir un condensador de placas paralelas con $C = 1$ nF usando dos placas metálicas de área $A = 0{,}01\ \mathrm{m}^2$. (**a**) Calcular la distancia d entre las placas si están separadas por aire. ¿Cuál es la tensión (diferencia de potencial) máxima que se puede aplicar sin que haya ruptura dieléctrica si la resistencia dieléctrica del aire es $E_{\mathrm{crit}} = 3$ MV/m? ¿Cuál es, por lo tanto, la máxima energía que se puede almacenar en el condensador? (**b**) Repetir los cálculos anteriores si un dieléctrico con $\varepsilon = 5\varepsilon_0$ y $E_{\mathrm{crit}} = 15$ MV/m se usa entre las placas.

Sol.: (a) 88.5 μ m; menor que 265.5 V y 35,2 μ J. (b) 442 μ m, menor que 6631 V y 22 mJ.



(a) ¿d en aire? ¿ΔV_{MAX} si $E_{crit} = 3\frac{MV}{m}$?

La capacidad de un condensador plano es

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$$

En el aire $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \Rightarrow d_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{C_0}$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{1}{4\pi K_e}\frac{S}{C_0} = \frac{1}{4\pi\, 9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}} \frac{0{,}01\,m^2}{1\times10^{-9}F}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 88{,}4\,\mu m}$$

a₂) ¿ΔV_{MAX}? $\quad \Delta V = E d \Rightarrow \Delta V_{MAX} = E_{crit}\, d \Rightarrow$

$$\Delta V_{MAX} = 3\frac{\cancel{M}V}{m}\, 88{,}4\,\cancel{\mu}m \Rightarrow \boxed{\Delta V_{MAX} = 265{,}5\,V}$$

$$U_{MAX} = \frac{1}{2}(Q\,\Delta V)_{MAX} = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2_{MAX} = \frac{1}{2}10^{-9}F \times (265{,}5\,V)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{MAX} = 35{,}2\,\mu J}$$

(b) Repetir si $\varepsilon = 5\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_r = 5$ y $E'_{crit} = 15\frac{MV}{m}$

Veamos como cambian las expresiones anteriores en función de ε_r

$$C' = C_0, \text{ cambia } d_0 \to d'$$

$$\varepsilon_r \cancel{\varepsilon_0}\frac{\cancel{S}}{d'} = \cancel{\varepsilon_0}\frac{\cancel{S}}{d_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon_r}{d'} = \frac{1}{d_0} \Rightarrow d' = \varepsilon_r d_0 = 5\times 88{,}4\,\mu m$$

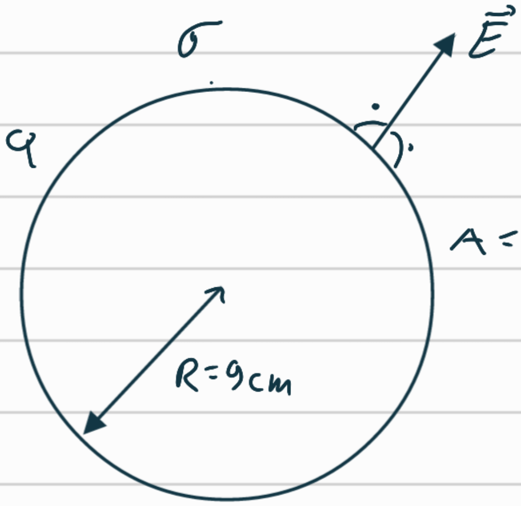
$\Rightarrow \boxed{d' = 442\,\mu m}$ Además $\Delta V'_{MAX} = E'_{crit}\, d' = 15\frac{MV}{m}\,442\,\mu m$

$\Rightarrow \boxed{\Delta V'_{MAX} = 6631\,V}$ $\quad U'_{MAX} = \frac{1}{2} C' \Delta V'^2_{MAX} = \frac{1}{2}10^{-9}F\times(6631\,V)^2 \Rightarrow$

$$\boxed{U'_{MAX} = 22\,mJ = 22000\,\mu J}$$

9. La rigidez dieléctrica del aire, es decir, el campo eléctrico máximo antes de que ocurra la ruptura dieléctrica (la carga eléctrica empieza a fluir), es $E_{\text{crit}} = 3\,\text{MV/m}$. Calcular la carga máxima que una esfera metálica con radio $R = 9\,\text{cm}$ puede contener sin que se produzca la ruptura dieléctrica del aire circundante con la descarga correspondiente.

Sol.: el campo en la superficie de un conductor es $E = \sigma/\varepsilon_0$. Debido a su geometría, la densidad superficial de carga en la superficie de la esfera es uniforme y está dada por $\sigma = Q/A = Q/(4\pi R^2)$, y $E = Q/(\varepsilon_0 4\pi R^2) = k_e Q/R^2$. Usando los valores de $E = E_{\text{crit}}$ y R dados se obtiene $Q = 2{,}7\,\mu\text{C}$.



En la superficie de un conductor

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ En el aire $\varepsilon = \varepsilon_0$

$A = 4\pi R^2$

$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 4\pi k_e \frac{Q}{A} \Rightarrow$

$E = 4\pi k_e \frac{Q}{4\pi R^2} = k_e \frac{Q}{R^2}$ igual al creado por una carga puntual en su centro.

$E_{CRIT} = k_e \frac{Q_{CRIT}}{R^2} \Rightarrow Q_{CRIT} = \frac{R^2}{k_e} E_{CRIT} = \frac{(0{,}09\,m)^2}{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}} 3\times10^6 \frac{V}{m}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{CRIT} = 2{,}7\,\mu C}$