

**F.F.I. — Grado en Ingeniería de la Salud. Curso 2021-2022. — Ejercicios del tema 1****Campo y potencial electrostáticos creado por cargas puntuales**

**1.** Comparar la atracción gravitatoria entre dos electrones ( $F_g = Gm_em_e/r^2$  with  $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ ) con la fuerza eléctrica repulsiva entre ellos, si la carga del electrón es  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$  y su masa  $m_e = 9,1095 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Sol.:**  $F_e/F_g = Ke^2/(Gm_e^2) \simeq 4,17 \times 10^{42}$ , por lo tanto, la atracción gravitatoria es despreciable frente a la repulsión electrostática.

**2.** Considerar una carga puntual  $q = +1 \text{ mC}$  colocada en el origen de coordenadas. **(a)** Calcular el módulo del campo eléctrico creado en un punto genérico de coordenadas  $P=(x, y, z)$ ; **(b)** ¿Cuál es la forma de una superficie con potencial eléctrico constante. ¿Cuál es la ecuación de la superficie si el potencial constante es  $V_2 = 45 \text{ MV}$ ; **(c)** Calcular el módulo de la fuerza ejercida por  $q$  en otra carga  $Q = +1 \mu\text{C}$  en el punto  $P_2$  de dicha superficie; **(d)** El trabajo hecho por el campo en dos casos (d.1) si  $Q$  se mueve de  $P_2$  a un punto  $P_3$  en la superficie equipotencial con potencial  $V_3 = 20 \text{ MV}$  y (d.2) si  $Q$  se mueve de  $P_2$  al infinito ( $r \rightarrow \infty$ ).

**Sol.:** (a)  $E = (9 \times 10^6 / (x^2 + y^2 + z^2)) \text{ N/C}$ , con  $x, y$  y  $z$  en metros (b) una superficie esférica de radio 20 cm, su ecuación es  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ , con  $x, y$  y  $z$  en metros; (c)  $F = 225 \text{ N}$ ; (d.1)  $W_{23} = E_{p,2} - E_{p,3} = 25 \text{ J}$ ; (d.2)  $W_{2\infty} = E_{p,2} - E_{p,\infty} = 45 \text{ J}$ .

**3.** Dos cargas puntuales,  $q_1$  y  $q_2$  de igual valor  $q$  se colocan en los puntos de coordenadas  $P_1 = (a, 0)$  y  $P_2 = (-a, 0)$  (la coordenada  $z$  ha sido suprimida porque el problema está limitado al plano  $xy$ , por lo tanto  $z$  es siempre 0). Calcular: **(a)** el potencial electrostático y el módulo del campo electrostático creado por ambas cargas en cualquier punto  $P_y = (0, y)$  en el eje  $y$ ; ¿cuál es la dirección de  $\vec{E}$  **(b)** compruebe que si  $P_y$  está lejos del origen de coordenadas, por lo que podemos despreciar  $a^2$  con respecto a  $y^2$ , el potencial y el campo son los mismos que aquellos creados por una sola carga puntual  $2q$  (carga total del sistema) en el origen de coordenadas.

**Sol.:** (a)  $V(0, y) = 2kq(a^2 + y^2)^{-1/2}$ ,  $E(0, y) = 2Kqy(a^2 + y^2)^{-3/2}$ ; en la dirección del eje  $y$  (b)  $V = K2q/y$  y  $E = k2q/y^2$ , en la dirección del eje  $y$ , que corresponden al potencial y campo electrostático creados en  $P_y = (0, y)$  por una carga puntual  $2q$  en el origen de coordenadas.

**4.** Dos cargas puntuales  $q_1 = +125 \mu\text{C}$  y  $q_2 = -64 \mu\text{C}$ , están situadas en los puntos de coordenadas  $P_1 = (0, 3)$  m y  $P_2 = (0, 0)$  m. **(a)** Calcular el módulo de la fuerza entre estas cargas. ¿Es la fuerza atractiva o repulsiva? **(b)** Obtener el módulo y dirección de la fuerza que ejercen sobre una tercera carga  $Q = +1 \mu\text{C}$  en el punto  $P_3 = (4, 0)$  m. Hacer un dibujo de la fuerza ejercida por cada carga y de la fuerza total sobre  $Q$ . **(c)** Calcular el trabajo realizado por la fuerza total ejercida por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $Q$  si  $Q$  es movida a lo largo del eje  $x$  desde  $P_3$  m hasta el infinito.

**Sol.:** (a)  $F = 8 \text{ N}$ . (b)  $F = 27 \text{ mN}$  en la dirección negativa del eje  $y$ . (c)  $W = 81 \text{ mJ}$ .

**Campos electrostáticos uniformes**

**5.** Sea  $\vec{E}$  un campo electrostático uniforme dado por  $\vec{E} = -5 \vec{i} \text{ kV/m}$ . **(a)** Si  $V = 0$  en el origen de coordenadas, obtener el potencial electrostático en cualquier punto  $P_x$  del eje  $x$ , esto es  $V(x)$ , usando la expresión  $V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{l} = El \cos(\alpha)$ , siendo A un punto en el eje  $x$  y B el origen de coordenadas (tenga en cuenta que, en este caso,  $V_A - V_B = V(x)$ ). **(b)** Aplicando nuevamente la expresión  $V_A - V_B = El \cos(\alpha)$ , demostrar que el potencial en un punto del eje  $x$  (ahora A) no cambia si nos movemos normalmente a ese eje (hasta el punto B). ¿Cuáles serán, entonces, las superficies con potencial constante (o superficies equipotenciales)? Dibujar dichas superficies. **(c)** ¿Cuánto disminuiría el potencial si nos movemos una distancia de 3 m a lo largo de una línea de campo? ¿y si nos movemos la misma distancia pero con un ángulo de  $60^\circ$  con la línea de campo?.

**Sol.:** (a)  $V_A - V_B = V(x) = El \cos(\alpha) = Ex \cos(0^\circ) = 5x \text{ kV}$ . (b) En este caso  $V_A - V_B = El \cos 90^\circ = 0$ , por lo

tanto, el potencial no cambia cuando nos movemos perpendicularmente al eje  $x$ . Por lo tanto, los planos perpendiculares al eje  $x$ , o, lo que es lo mismo, a las líneas de campo, son superficies equipotenciales. (c)  $V_A - V_B = El \cos(0^\circ) = 15 \text{ kV}$  y  $V_A - V_B = El \cos 60^\circ = 7,5 \text{ kV}$ , porque  $E = 5 \text{ kV}$  y  $l = 3 \text{ m}$ .

### Conductores y condensadores

**6.** Las capacidades de los condensadores de la figura están expresados en  $\mu\text{F}$ . **(a)** Obtener la capacidad equivalente  $C_{xy}$  entre los puntos  $x$  and  $y$ ; **(b)** Si el condensador con capacidad  $C_5 = 5 \mu\text{F}$  tiene una carga  $Q_5 = +120 \mu\text{C}$  en su placa izquierda, encontrar la diferencia de potencial  $V_{xa} = V_x - V_a$  entre los puntos  $x$  y  $a$ .

**Sol.:** (a)  $C_{xy} = 5 \mu\text{F}$ ; (b)  $V_{xa} = 64 \text{ V}$ .

**7.** Un condensador de placas paralelas está construido utilizando dos placas planas paralelas metálicas con área  $S = 1 \text{ m}^2$  separadas una distancia  $d = 1 \text{ cm}$ . Obtener: **(a)** la capacidad del condensador; **(b)** la constante dieléctrica relativa de un material que si se coloca entre las placas aumenta su capacidad a  $C' = 10 \text{ nF}$ ; **(c)** la energía almacenada en el condensador con y sin dieléctrico si hay una diferencia de potencial entre las placas de  $V = 100 \text{ V}$ .

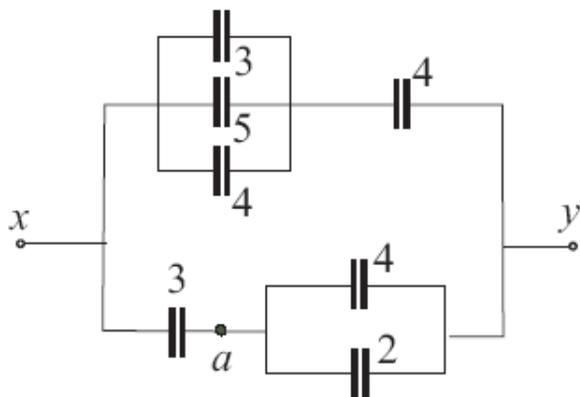
**Sol.:** (a)  $C = 8,85 \times 10^{-10} \text{ F} \simeq 0,9 \text{ nF}$ ; (b)  $\epsilon_r \simeq 11,3$ ; (c)  $4,43 \mu\text{J}$  en el vacío y  $50 \mu\text{J}$  con dieléctrico.

**8.** Se quiere construir un condensador de placas paralelas con  $C = 1 \text{ nF}$  usando dos placas metálicas de área  $A = 0,01 \text{ m}^2$ . **(a)** Calcular la distancia  $d$  entre las placas si están separadas por aire. ¿Cuál es la tensión (diferencia de potencial) máxima que se puede aplicar sin que haya ruptura dieléctrica si la resistencia dieléctrica del aire es  $E_{\text{crit}} = 3 \text{ MV/m}$ ? ¿Cuál es, por lo tanto, la máxima energía que se puede almacenar en el condensador? **(b)** Repetir los cálculos anteriores si un dieléctrico con  $\epsilon = 5\epsilon_0$  y  $E_{\text{crit}} = 15 \text{ MV/m}$  se usa entre las placas.

**Sol.:** (a)  $88.5 \mu\text{m}$ ; menor que  $265.5 \text{ V}$  y  $35,2 \mu\text{J}$ . (b)  $442 \mu\text{m}$ , menor que  $6631 \text{ V}$  y  $22 \text{ mJ}$ .

**9.** La rigidez dieléctrica del aire, es decir, el campo eléctrico máximo antes de que ocurra la ruptura dieléctrica (la carga eléctrica empieza a fluir), es  $E_{\text{crit}} = 3 \text{ MV/m}$ . Calcular la carga máxima que una esfera metálica con radio  $R = 9 \text{ cm}$  puede contener sin que se produzca la ruptura dieléctrica del aire circundante con la descarga correspondiente.

**Sol.:** el campo en la superficie de un conductor es  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Debido a su geometría, la densidad superficial de carga en la superficie de la esfera es uniforme y está dada por  $\sigma = Q/A = Q/(4\pi R^2)$ , y  $E = Q/(\epsilon_0 4\pi R^2) = k_e Q/R^2$ . Usando los valores de  $E = E_{\text{crit}}$  y  $R$  dados se obtiene  $Q = 2,7 \mu\text{C}$ .



Prob. 6

**Aplicaciones médicas**

**10.** Para la toma de una radiografía convencional se requiere acelerar electrones con un voltaje de 30000 V y por el fenómeno de frenado se generan los R-X. (a) Determine la energía máxima de los fotones emitidos en la radiación de frenado, así como la frecuencia máxima y longitud de onda mínima. (b) Determine la frecuencia y longitud de onda de los R-X si solo el 20 % de la energía cinética de un electrón se transforma en energía de un fotón. Usar  $h=4,14 \times 10^{-14}$  eV y  $c=3 \times 10^8$  m/s. Respuesta:  $E_{f,max} = 30$  keV,  $f_{max} = 7,25 \times 10^{17}$  Hz,  $\lambda_{min} = 4,14$  Å (b)  $E_{f,max} = 6$  keV,  $f_{max} = 1,55 \times 10^{17}$  Hz,  $\lambda_{min} = 20,7$  Å.

**11.** (a) Deducir la expresión de la energía de un fotón de R-X de las rayas  $K_\alpha$  y  $K_\beta$  de un átomo en función del número atómico efectivo  $Z_{ef}$ . (b) Si para el Mg ( $Z=12$ ), la longitud de onda de la raya  $K_\alpha$  es  $\lambda = 0,987$  nm obtener  $Z_{ef}$ . ¿A que carga  $q_{ap}$  corresponde el apantallamiento? Respuesta:  $E_\alpha = \frac{3}{4}Z_{ef}^2 E_0$ ,  $E_\beta = \frac{8}{9}Z_{ef}^2 E_0$ . (b)  $Z_{ef} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{E_\alpha}{E_0}} = 11,3$ ;  $q_{ap} = (12 - 11,3)e = 0,7e$ .