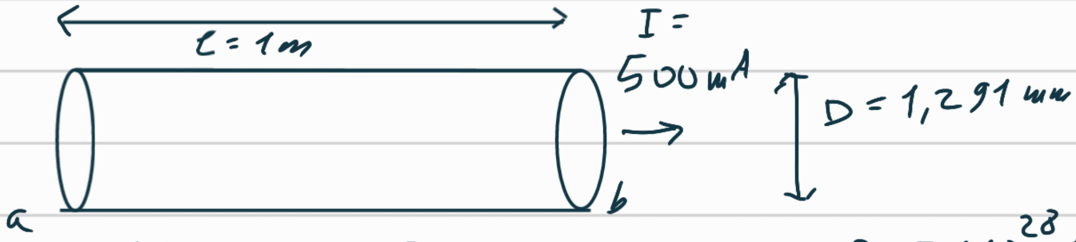
1. Al circular una corriente de 500 mA por un cable de cobre de diámetro 1,291 mm se mide una caída de potencial de 6,38 mV por cada metro de dicho cable.

(**a**)Teniendo en cuenta que el cobre posee una concentración de portadores $n = 8{,}47 \times 10^{28}$ electrones/m^3, determinar la resistencia de un metro de dicho cable, la resistividad del cobre y la velocidad de deriva de los portadores en el cable cuando lo circula una intensidad de 500 mA.

Sol.: 12,76 mΩ, $\rho = 1{,}67 \times 10^{-8}$ Ω·m y $v_d = 0{,}028$ mm/s..

(**b**)Comparar el valor de la resistencia de un metro del cable con la resistencia de una bombilla de 100W-220V (la resistencia de la bombilla puede obtenerse sabiendo que consume 100 W para una tensión de 220 V entre sus extremos). A la vista del resultado, concluya si puede despreciarse la resistencia del cable frente a la de la bombilla.

Sol.: $R_{\text{Bombilla}} = 484\ \Omega$, como 12,76 m$\Omega$ es mucho menor que 484 Ω podemos despreciar la resistencia del cable frente a la de la bombilla.



$V_a - V_b = 6{,}38 mV$ (a) si $n = 8{,}47 \times 10^{28}$ elec./m^3 ¿R, ρ, V_d?

$$R = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{6{,}38 \times 10^{-3} V}{500 \times 10^{-3} A} \Rightarrow R = 0{,}01276\,\Omega \Rightarrow \boxed{R = 12{,}76 \times 10^{-3}\,\Omega}$$

Además $R = \rho \frac{\ell}{S}$ y $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\rho = \frac{R\,S}{\ell} = \frac{12{,}76 \times 10^{-3}\,\Omega}{1\,m}\, 3{,}1416 \times \left(\frac{1{,}291 \times 10^{-3} m}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\rho = 1{,}67 \times 10^{-8}\,\Omega\, m}$$

Velocidad de deriva: $J = n q V_d$; $J = \frac{I}{S} \Rightarrow n q V_d = \frac{I}{S}$

$$y \quad V_d = \frac{I}{S n q} = \frac{500 \times 10^{-3} A}{3{,}1416 \times \left(\frac{1{,}291 \times 10^{-3} m}{2}\right)^2 \times 8{,}47 \times 10^{28} \frac{elec}{m^3} \times 1{,}6 \times 10^{-19} C}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_d = 0{,}028\ mm/s}$$

(b) Comparar con la resistencia de una bombilla de 100W, 220V

$$P = I^2 R' = \left(\frac{\Delta V}{R'}\right)^2 R' = \frac{\Delta V^2}{R'} \quad y \quad R' = \frac{\Delta V^2}{P} = \frac{(220V)^2}{100W} \Rightarrow$$

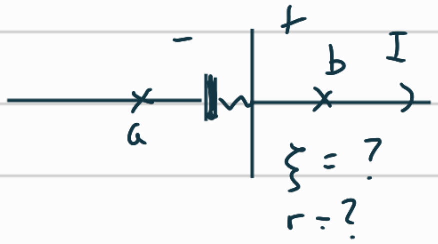
$\boxed{R' = 484\,\Omega}$ $R' >> R$, $\frac{R'}{R} \simeq 4 \times 10^5$, por lo que:

Se puede despreciar la resistencia del cable respecto a la de la bombilla

c.q.d

2. Entre los bornes de una pila se mide una tensión de 1,3 V al ser circulada por una intensidad de 400 mA y una tensión de 1,4 V al ser circulada por una intensidad de 200 mA. Determinar el valor nominal de la fuerza electromotriz de la pila y su resistencia interna.

Sol.: $\varepsilon = 1{,}5$ V y $r = 0{,}5\ \Omega$.

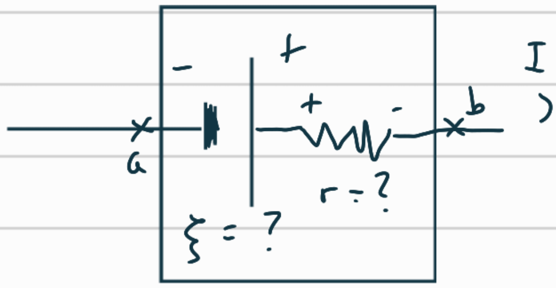


$\Delta V = V_b - V_a$

$I_1 = 500\text{mA}$ | $I_2 = 200\text{mA}$

$\Delta V_1 = 1{,}3\text{V}$ | $\Delta V_2 = 1{,}4\text{V}$

Suponemos que I va del polo negativo al positivo por el interior de la pila. Esto equivale:



$V_b - V_a = \xi - Ir \Rightarrow$

$-[1{,}3 = \xi - 500r]$ (1)

$1{,}4 = \xi - 200r$ (2)

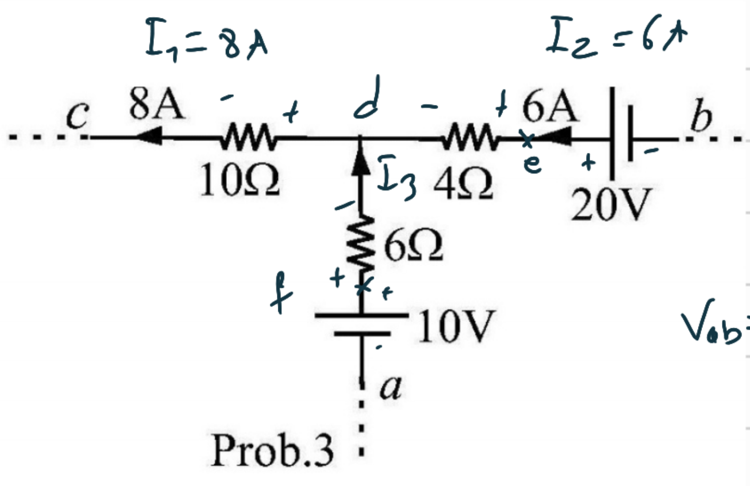
$0{,}1 = 200r \Rightarrow r = \dfrac{0{,}1\text{V}}{200\text{mA}} \dfrac{10^3\text{mA}}{1\text{A}}$

$\Rightarrow \boxed{r = 0{,}5\ \Omega}$

Despejando de (2) $\xi = 1{,}4\text{V} + 200\text{mA} \times 0{,}5\Omega \left(\dfrac{1\text{A}}{10^3\text{mA}}\right) \Rightarrow \boxed{\xi = 1{,}5\text{ V}}$

3. En las ramas del esquema, determinar la intensidad por la resistencia de 6 Ω y las caídas de potencial V_{ab} y V_{bc}.

Sol.: $I = 2$ A, $V_{ab} = -2$ V, V_{bc}=84 V.



V_{ab}, V_{bc} ?

Necesitamos obtener I_3

Nodo d: $8 - 6 - I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{I_3 = 2\text{A}}$

$V_{ab} = V_a - V_b = (V_a - V_f) + (V_f - V_d) + (V_d - V_e) + (V_e - V_b) =$

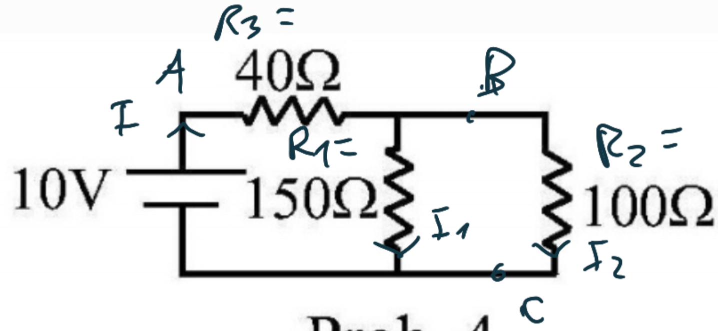
$-10\text{V} + 6 \times 2 - 6 \times 4 + 20 \Rightarrow \boxed{V_{ab} = -2\text{V}}$

$V_{bc} = V_b - V_c \Rightarrow V_{bc} = (V_b - V_e) + (V_e - V_d) + (V_d - V_c) =$

$= -20 + 4 \times 6 + 8 \times 10 \Longrightarrow \boxed{V_{bc} = 84\text{V}}$

Tema 2. Problema 4

4. Obtener las corrientes por las ramas del circuito de la figura así como la potencia total suministrada y consumida, verificando el balance.
Sol.: 100 mA, 40 mA y 60 mA; Potencia suministrada por la pila 1W y potencia consumida en las resistencias 0,4 + 0,24 + 0,36 = 1 W, igual a la suministrada como era de esperar.

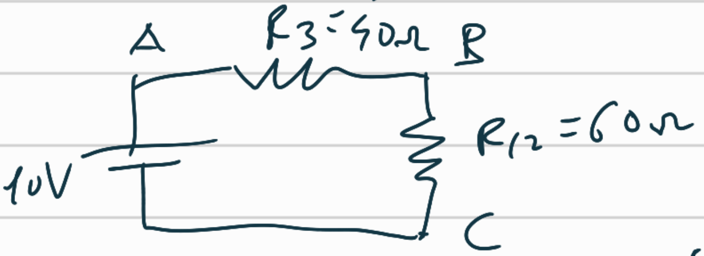


Prob. 4

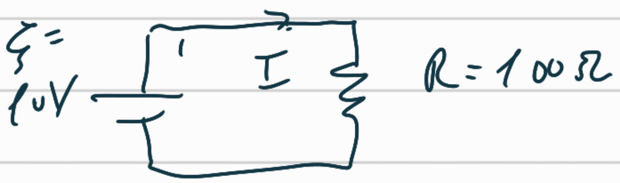
Ponemos nombres y asignamos sentidos arbitrarios a las intensidades. En este caso el sentido es obvio.

Asociamos R_1 y R_2 en paralelo: $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{150} + \frac{1}{100} = \frac{2+3}{300} = \frac{5}{300}$

$\Rightarrow R_{12} = \frac{300}{5} \Rightarrow \underline{R_{12} = 60\,\Omega}$. El sistema equivale a:



R_3 y R_{12} están en serie, luego:
$R = R_3 + R_{12} = 40 + 60 \Rightarrow \underline{R = 100\,\Omega}$



El aumento de potencial en el generador es igual a la caída en la resistencia $V_+ - V_- = \xi = IR$

$\Rightarrow I = \frac{\xi}{R} = \frac{10\text{ V}}{100\,\Omega} \Rightarrow \boxed{I = 0{,}1\text{ A} = 100\text{ mA}}$

En el primer esquema, vemos que $I_1 = \frac{V_{BC}}{R_1}$, $I_2 = \frac{V_{BC}}{R_2}$.
Necesitamos V_{AB}, según la ley de Ohm en el segundo esquema:
$V_{BC} = I R_{12} = 0{,}1 \times 60 \Rightarrow \underline{V_{BC} = 6\text{ V}}$
Igualmente, obtenemos $V_{AB} = I R_3 = 0{,}1 \times 40 \Rightarrow \underline{V_{AB} = 4\text{ V}}$
Entonces

$I_1 = \frac{6}{150} \Rightarrow \boxed{I_1 = 40\text{ mA}}$ $\quad I_2 = \frac{6}{100} \Rightarrow \boxed{I_2 = 60\text{ mA}}$

Potencias: las resistencias siempre consumen:

$P_3 = I^2 R_3 = 0{,}1^2 \times 50 \Rightarrow \boxed{P_3 = 0{,}5\,W}$

$P_1 = I_1^2 R_1 = 0{,}05^2 \times 150 \Rightarrow \boxed{P_1 = 0{,}25\,W}$

$P_2 = I_2^2 R_2 = 0{,}06^2 \times 100 \Rightarrow \boxed{P_2 = 0{,}36\,W}$

Potencia consumida en las resistencias $P_R = P_1 + P_2 + P_3 \Rightarrow$

$\boxed{P_R = 1\,W}$

El único generador necesariamente genera potencia. Además es recorrido en el mismo sentido que ξ por I positivo. Entonces

$P_\xi = \xi I = 10\,V \times 0{,}1\,A \Rightarrow \boxed{P_\xi = 1\,W}$

$P_\xi = P_R$, por lo que se verifica el balance de potencia

Nota: Si calculamos la potencia consumida en la resistencia equivalente:

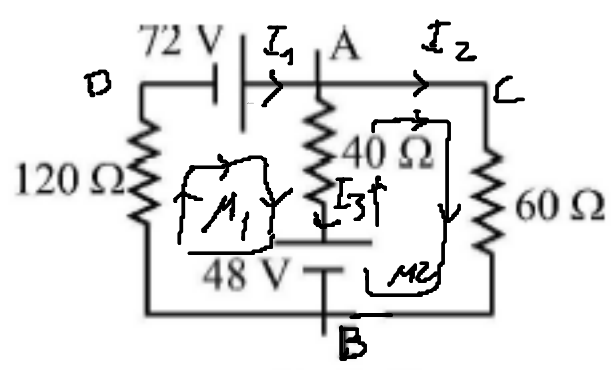
$P_R = I^2 R = 0{,}1^2\,A^2 \times 100\,\Omega \Rightarrow P_R = 1\,W$,

por lo que es equivalente calcular P con las resistencias originales o con su equivalente.

Tema 2. Problema 5

5. En el circuito de la figura calcular: (**a**) las intensidades por cada una de la ramas; (**b**) la caída de tensión V_{AB} por tres caminos diferentes; (**c**) la potencia suministrada y consumida, verificando su balance.

Sol.: (a) 0,3 A, 0,3 A y 0,6 A; (b) $V_{AB} = 36$ V, independiente del camino; (c) Suministro: $P_{(72V)} = 21{,}6$ W, $P_{(48V)} = 14{,}4$W, Consumo: $P_{(120\Omega)} = 10{,}8$ W, $P_{(40\Omega)} = 3{,}6$ W, y $P_{(6\Omega)} = 21{,}6$ W, Balance $(21{,}6+14{,}4)$W $= (10{,}8+3{,}6+21{,}6)$W $= 36$W.



Prob. 5

Definimos las corrientes de forma arbitraria.

(a)

Aplicamos la regla de Kirchhoff de nudos al nudo A

$\sum_i I_i = 0$ (+ si salen y − si entran)

$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ o bien $I_3 = I_1 - I_2$ (1)

Asignamos sentido a las mallas. Ambas en sentido horario. Aplicamos la regla de Kirchhoff de mallas a ambas mallas.

$M1: \; 40 I_3 + 120 I_1 - 24 = 0$
$M2: \; 60 I_2 - 40 I_3 - 48 = 0$ } sustituimos I_3 de (1).

$M1: \; 40(I_1 - I_2) + 120 I_1 - 24 = 0$
$M2: \; 60 I_2 - 40(I_1 - I_2) - 48 = 0$ } operamos.

$$\left.\begin{matrix} 160 I_1 - 40 I_2 - 24 = 0 \\ -40 I_1 + 100 I_2 - 48 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 1/8 \\ \times \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 20 I_1 - 5 I_2 - 3 = 0 \; (2) \\ -20 I_1 + 50 I_2 - 24 = 0 \; (3) \end{matrix}\right.$$

Sumamos (2)+(3): $55 I_2 - 25 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{25 V}{45 \Omega} \Rightarrow$

$\boxed{I_2 = 0{,}6 \text{ A}}$ Despejamos I_1 en (2): $I_1 = \frac{3 + 5 I_2}{20} \Rightarrow$

$I_1 = \frac{3 + 5 \times 0{,}6}{20} \frac{V}{A} \Rightarrow \boxed{I_1 = 0{,}3 \text{ A}}$ Sustituyendo en (1)

$I_3 = 0{,}3 - 0{,}6 \Rightarrow \boxed{I_3 = -0{,}3 \text{ A}}$

(b) Aplicamos la ley de Kirchhoff del potencial en un camino.

$V_{AB} = V_A - V_B = \sum R_i I_i - (\sum \mathcal{E}_i)$ (+ si $A \to B$ y viceversa)

(b1) Directo AB: $V_{AB} = +40 I_3 - (-48) = +40(-0{,}3) + 48 \Rightarrow \boxed{V_{AB} = 36 V}$

(b2) ACB: $V_{AB} = +60 I_2 = 60 \times 0{,}6 \Rightarrow \boxed{V_{AB} = 36 V}$

(b3) ADB: $V_{AB} = -120 I_1 - (-72) = -120 \times 0{,}3 + 72 \Rightarrow \boxed{V_{AB} = 36 V}$ c.q.d.

(c) Potencias consumidas en las resistencias.

En $R_1 = 120\,\Omega$: $P_1 = I_1^2 \times 120 = 0{,}3^2 \times 120 \Rightarrow \underline{P_1 = 10{,}8\,W}$

En $R_2 = 60\,\Omega$: $P_2 = I_2^2 \times 60 = 0{,}6^2 \times 60 \Rightarrow \underline{P_2 = 21{,}6\,W}$

En $R_3 = 40\,\Omega$: $P_3 = I_3^2 \times 40 = (-0{,}3)^2 \times 40 \Rightarrow P_3 = 3{,}6\,W$

Potencia consumida en las resistencias: $P_R = P_1 + P_2 + P_3 \Rightarrow$

$\boxed{P_R = 36{,}0\,W}$

Generadores: $\xi_1 = 72$ V., I_1 en el sentido de ξ_1 y +, luego ξ_1 produce potencia

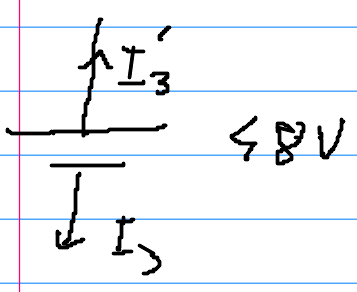
$P_{\xi_1} = \xi_1 I_1 = 72 \times 0{,}3 \Rightarrow \underline{P_{\xi_1} = 21{,}6\,W}$

$\xi_3 = 48V$: tenemos dos opciones:

Formal: I_3 está en sentido contrario a ξ_3, luego ξ_3 "consume" $P_{\xi_3} = \xi_3 I_3 = 48 \times (-0{,}3) = -14{,}4\,W$

pero un consumo negativo es equivalente a decir que ξ_3 produce $\underline{P'_{\xi_3} = 14{,}4\,W}$

Físico: Definimos $I_3' = -I_3 = 0{,}3$ A.



I_3' es positiva y está en el sentido de ξ_3, luego ξ_3 produce potencia:

$P'_{\xi_3} = \xi_3 I_3' = 48 \times 0{,}3 \Rightarrow \boxed{P'_{\xi_3} = 14{,}4\,W}$

Lógicamente, el mismo resultado.

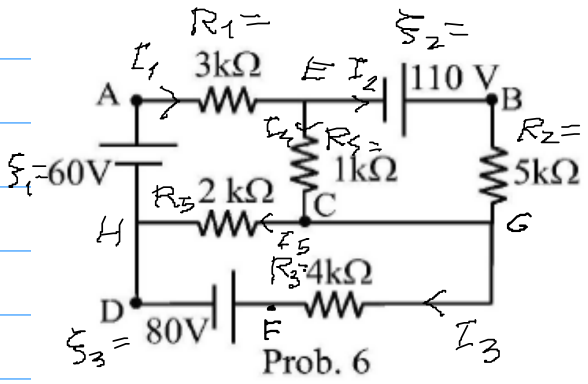
Potencia generada: $P_{gen} = P_{\xi_1} + P'_{\xi_3} = 21{,}6 + 14{,}4$

$\Rightarrow \boxed{P_{gen} = 36{,}0\,W}$ se cumple el balance de potencia $\boxed{P_{gen} = P_{consumida}}$

Tema 2. Problema 6.

6. En el circuito de la figura determinar las intensidades que atraviesan las baterías así como las caídas de potencial V_{AB}, V_{AC} y V_{BD}.

Sol.: 10 mA, 20 mA y 10 mA; $V_{AB} = -80$ V, $V_{AC} = 20$ V y $V_{BD} = 140$ V. Nota: este circuito tiene tres mallas y puede resultar conveniente usar el método de Kramer o un software para resolver el sistema de ecuaciones.



Prob. 6

Ponemos nombres a los ξ_i y R_i para referirnos a ellos más cómodamente. Igualmente a varios puntos y nudos.

Los puntos C y G están unidos por un conductor sin resistencia por lo que forman un único nudo CG. Hay tres nudos E, H y CG, necesitaremos dos para aplicar la ley de nudos de Kirchhoff.

Asignamos nombres y sentidos a las intensidades de forma arbitraria.

Ley de Kirchhoff de nudos $\quad \Sigma I_i = 0 \quad$ (+ si salen)

Nudo E: $+I_4 + I_2 - I_1 = 0 \Rightarrow I_4 = I_1 - I_2 \quad (1)$

Nudo H: $+I_1 - I_3 - I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_1 - I_3 \quad (2)$

Asignamos sentido horario de forma arbitraria a las tres mallas y aplicamos la ley de Kirchhoff de mallas: $\Sigma \xi_i = \Sigma I_i R_i$ (+ en el sentido de la malla)

M1: AECHA $\quad$ (R en kΩ, V en V, I en mA, pues $\frac{1V}{1k\Omega} = 1mA$)

$+60 = +3 I_1 + 1 I_4 + 2 I_5 \quad (3)$

M2: EBGCE: $\quad 110 = +5 I_2 - 1 I_4 \quad (4)$

M3: HCGFH: $\quad -80 = +4 I_3 - 2 I_5 \quad (5)$.

Sustituimos (1) y (2) en (3), (4) y (5)

$$\left.\begin{array}{l} 3 I_1 + (I_1 - I_2) + 2(I_1 - I_3) = 60 \\ 5 I_2 - (I_1 - I_2) = 110 \\ 4 I_3 - 2(I_1 - I_3) = -80 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6 I_1 - I_2 - 2 I_3 = 60 \\ -I_1 + 6 I_2 = 110 \\ -2 I_1 + 6 I_3 = -80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (6) \\ (7) \\ (8) \end{array}$$

Despejamos I_2 en (7) e I_3 en (8): $\quad I_2 = \frac{110 + I_1}{6}$; $I_3 = \frac{2I_1 - 80}{6} \quad (9)$

$$6 I_1 - \left(\frac{110 + I_1}{6}\right) - 2\left(\frac{2 I_1 - 80}{6}\right) = 60 \times 6 \Rightarrow 36 I_1 - (110 + I_1) - 2(2 I_1 - 80) = 360 \Rightarrow$$

$$(36 - 1 - 4) I_1 - 110 + 2 \times 80 = 360 \Rightarrow \quad I_1 = \frac{310 V}{31 k\Omega} \Rightarrow \boxed{I_1 = 10 mA}$$

sustituyendo en (9):

$$I_2 = \frac{110 + 10}{6} \Rightarrow \boxed{I_2 = 20 mA}; \quad I_3 = \frac{2 \times 10 - 80}{6} \Rightarrow \boxed{I_3 = -10 mA}$$

b) Caídas de potencial: usamos la ley de Kirchhoff del potencial en un camino

$V_{AB} = V_A - V_B = \sum_i I_i R_i - (\sum \xi_i)$ $\left[\begin{array}{l} + \text{ si en el sentido del camino } A \to B \\ - \text{ en caso contrario} \end{array}\right]$

$V_{AB} = 3 I_1 - (+110) = 3 \times 10 - 110 \Rightarrow \boxed{V_{AB} = -80 \text{ V}}$

$V_{AC} = 3 I_1 + 1 I_4 = 3 I_1 + (I_1 - I_2) = 4 I_1 - I_2 = 4 \times 10 - 20 \Rightarrow \boxed{V_{AC} = 20 \text{ V}}$

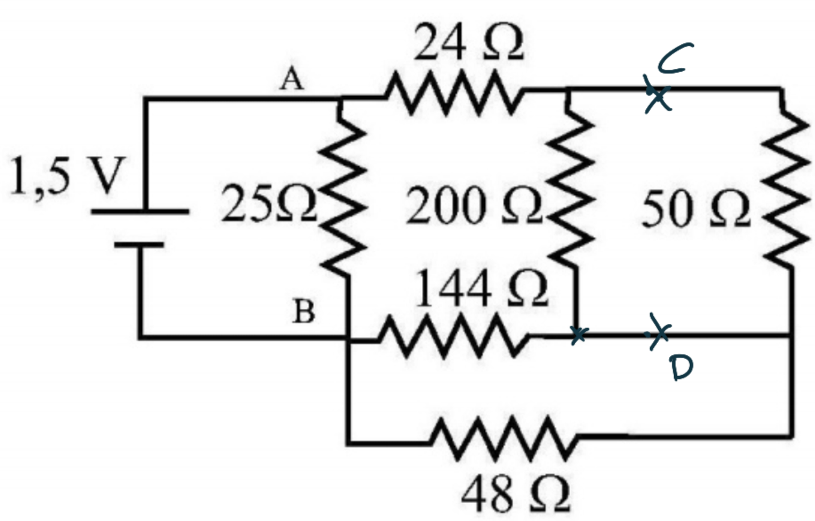
ó $V_{AC} = V_{AB} + V_{BD} + \underset{0}{\underset{\parallel}{V_{DC}}} = -80 + 5 I_2 = -80 + 5 \times 20 = 20 \text{ V}$ c.q.d.

$V_{BD} = 5 I_2 + 4 I_3 - (-80) = 5 \times 20 + 4 \times (-10) + 80 \Rightarrow \boxed{V_{BD} = 140 \text{ V}}$

Tema 2. Problema 7

7. Utilizando las reglas para la asociación en serie y en paralelo de resistencias, determinar la resistencia equivalente desde los terminales de la pila en el circuito de la figura. Utilizar dicho resultado para obtener la potencia suministrada por la pila.

Sol.: $R_{eq.} = 20\ \Omega$ y $P = 112{,}5$ mW.

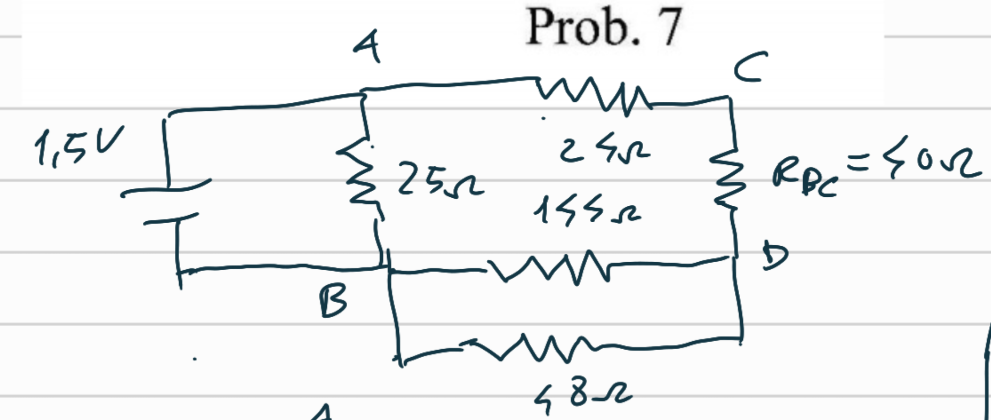


Prob. 7

Las de 50 y 200 Ω están en paralelo, luego

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{50} = \frac{1+4}{200} = \frac{5}{200}$$

$$\Rightarrow R_{CD} = \frac{200}{5} \Rightarrow R_{CD} = 40\,\Omega$$



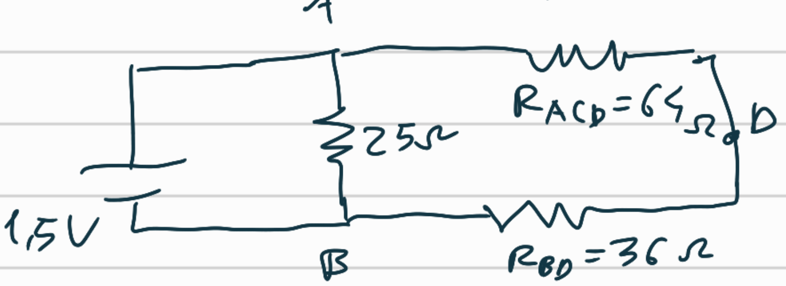
R_{CD} está en serie con la de 24 Ω ⇒

$R_{ACD} = 40+24 = 64\,\Omega$

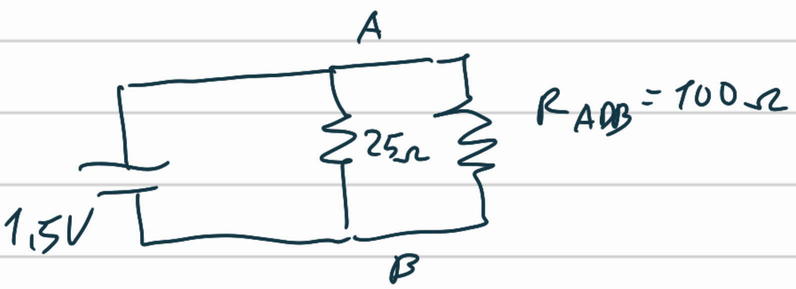
La de 144 y 48 Ω están en paralelo:

$$\frac{1}{R_{BD}} = \frac{1}{144} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{144} \Rightarrow$$

$$R_{BD} = \frac{144}{4} \Rightarrow \underline{R_{BD} = 36\,\Omega}$$



Pero R_{ACD} y R_{BD} están en serie: $R_{ADB} = 64+36 \Rightarrow \underline{R_{ADB} = 100}$



La de 25 Ω y R_{ADB} están en paralelo

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = \frac{4+1}{100} = \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{AB} = 20\,\Omega}$$

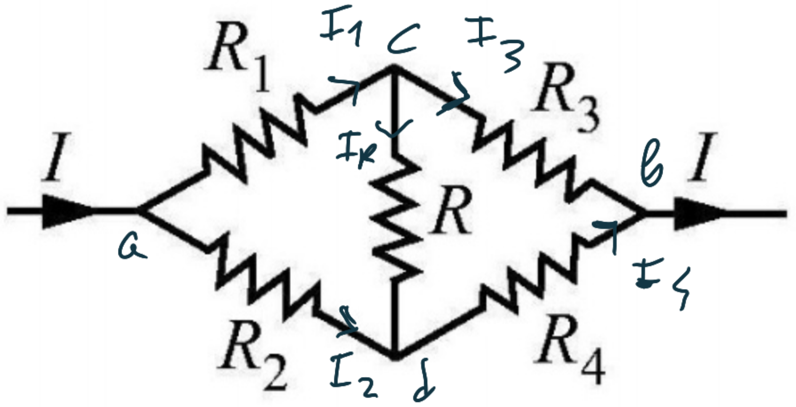
(b) R_{AB} es equivalente también en potencia $I = \frac{\varepsilon}{R_{AB}} \Rightarrow I = \frac{1{,}5\,V}{20\,\Omega} \Rightarrow I = 75\times10^{-3}\,A$

$P = \varepsilon I = 1{,}5 \times 75\times10^{-3} = 0{,}1125\ W \Rightarrow \boxed{P = 112{,}5\ mW}$

TEMA - PROBLEMA 8

8. La asociación de resistencias de la figura se denomina puente de Wheastone. (**a**) Demostrar que si la intensidad que atraviesa la resistencia R es nula entonces se cumple la relación $R_1R_4 = R_2R_3$ (nota: si se verifica dicha relación, se dice que el puente está *balanceado* y la resistencia R podría quitarse o sustituirse por otra resistencia para calcular la resistencia equivalente). (**b**) Para los valores (en kΩ) siguientes: $R_1 = 5$, $R_2 = 1$, $R_3 = 10$, $R_4 = 2$ y $R = 2$, compruebe si el puente está balanceado y calcule la resistencia equivalente. (**c**) sea ahora $R_2 = 4$ kΩ, compruebe que el puente no está balanceado. siendo las demás las mismas del apartado (b),

Sol.: (b) el puente está balanceado y $R_{\text{eq.}} = 2{,}5$ kΩ; (c) no está balanceado y $R_{\text{eq.}} = 4$ kΩ.



Prob. 8

(a) Ponemos nombres a las intensidades y los nudos

Si $I_R = 0 \Rightarrow$

$I_3 = I_1$

$I_4 = I_2$

Además $V_{cd} = 0 \Rightarrow$

$V_{ac} = V_{ad} \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2$

$V_{cb} = V_{db} \Rightarrow R_3 I_3 = R_4 I_4$

Sustituimos I_3 e I_4: $\left.\begin{array}{l} R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ R_3 I_1 = R_4 I_2 \end{array}\right\}$ dividiendo: $\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{R_2}{R_4}$

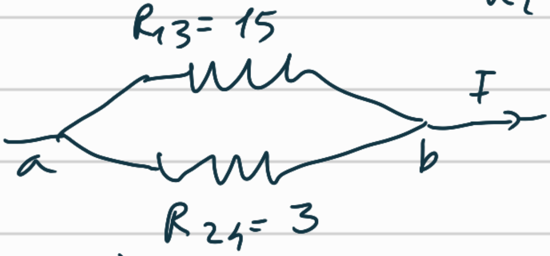
ó $\boxed{R_1 R_4 = R_2 R_3}$ c.q.d.

(b) (kΩ) $R_1 = 5$, $R_2 = 1$, $R_3 = 10$; $R_4 = 2$ $\left\{\begin{array}{l} R_1 R_4 = 5 \times 2 = 10\ (\text{k}\Omega)^2 \\ R_2 R_3 = 1 \times 10 = 10\ (\text{k}\Omega)^2 \\ \text{c.q.d} \end{array}\right.$

Resistencia equivalente. Usamos kΩ, mA y V (mA $= \dfrac{V}{k\Omega}$)

b1) Como $I_3 = I_1$, R_1 está en serie con $R_3 \Rightarrow R_{13} = R_1 + R_3 = 5 + 10 = 15$ kΩ

R_2 está en serie con $R_4 \Rightarrow R_{24} = R_2 + R_4 = 1 + 2 = 3$ kΩ

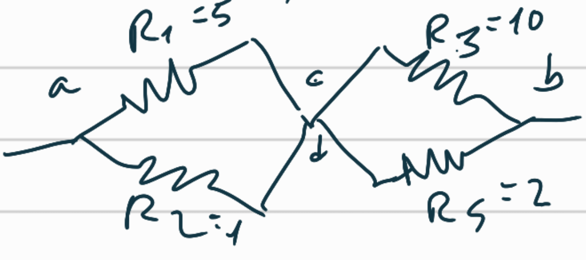


R_{13} está en paralelo con $R_{24} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{R_{ab}} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1+5}{15} = \dfrac{6}{15} \Rightarrow R_{ab} = \dfrac{15}{6} \Rightarrow$

$\boxed{R_{ab} = 2{,}5\ \text{k}\Omega}$

b2) otra forma: como $V_{cd} = 0$, el sistema equivale a:



$V_{ac} = V_{da}$, luego R_1 y R_2 están en paralelo

$V_{cb} = V_{db}$, luego R_3 y R_4 están en paralelo

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{1} = \frac{1+5}{5} \Rightarrow R_{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1+5}{10} = \frac{6}{10} \Rightarrow R_{34} = \frac{10}{6}$$

R_{12} y R_{34} están en serie:

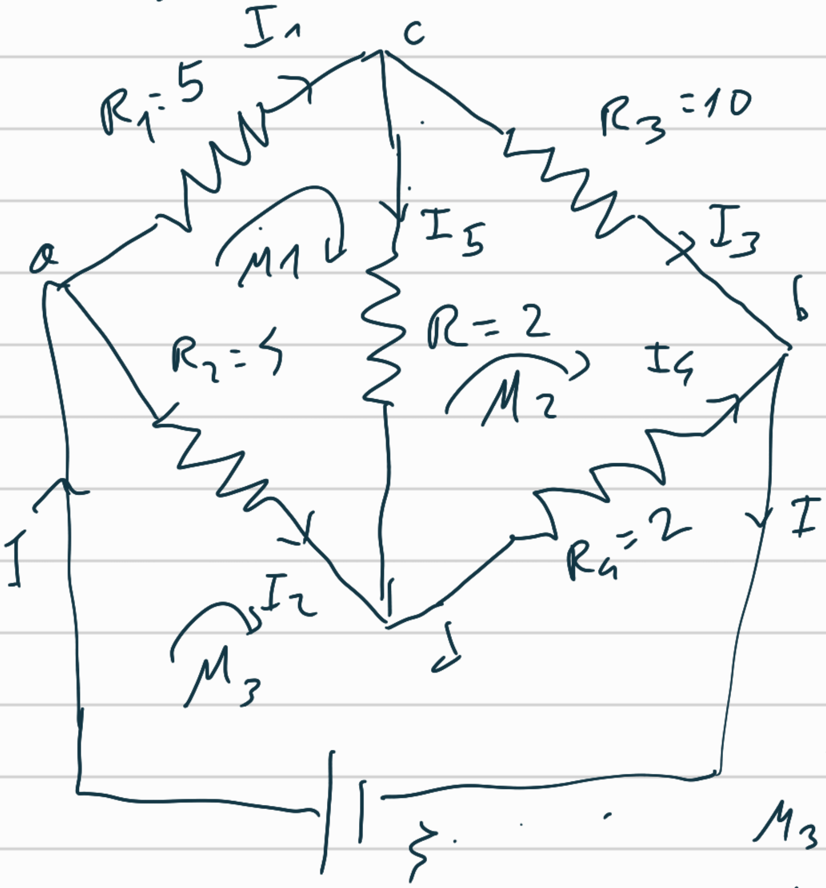
$R_{ab} = \frac{5}{6} + \frac{10}{6} = \frac{15}{6} \Rightarrow$ $\boxed{R_{ab} = 2{,}5\ k\Omega}$ c.q.d.

(c) $\underline{R_2 = 4}$ y $R_1 = 5$, $R_4 = 2$, $R_3 = 10$; $\underline{R = 2}$ $(k\Omega)$

$R_1 R_4 = 5 \times 2 = 10\ k\Omega$
$R_2 R_3 = 4 \times 10 = 40\ k\Omega$

El puente no está balanceado. $I_R \neq 0$.

Los cálculos de R_{eq} anteriores no son válidos. Se podría calcular R_{eq} con el siguiente circuito. Resolviéndolo, calculamos: $R_{eq} = \frac{\xi}{I}$



Hay 4 nudos: a, b, c, d, por lo que aplicamos la ley de Kirchhoff de nudos a 3 de ellos.

a: $+I_1 + I_2 - I = 0$ (1)

b: $-I_3 - I_4 + I = 0$ (2)

c: $+I_5 + I_3 - I_1 = 0$ (3)

Aplicamos la ley de Kirchhoff de mallas a las tres mallas.

M_3: $4 I_2 + 2 I_4 = \xi$ (4)

M_1: $5 I_1 + 2 I_5 - 4 I_2 = 0$ (5)

M_2: $10 I_3 - 2 I_4 - 2 I_5 = 0$ (6)

Para reducir variables, despejamos I_2, I_4 e I_5 en función de I, I_1 e I_3. Interesa que al final esté todo en función de I para poder calcular $R_{eq} = \frac{\xi}{I}$: $I_2 = I - I_1$; $I_4 = I - I_3$; $I_5 = I_1 - I_3$ (7)

Sustituimos en las ecuaciones de mallas (4, 5, 6)

$$\left.\begin{array}{l} 4(I-I_1)+2(I-I_3)=\xi \\ 5I_1+2(I_1-I_3)-4(I-I_1)=0 \\ 10I_3-2(I-I_3)-2(I_1-I_3)=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6I-4I_1-2I_3=\xi \\ -4I+11I_1-2I_3=0 \\ -2I-2I_1+14I_3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \qquad (8) \\ \qquad (9) \\ I_1=7I_3-I \quad (10) \end{array}$$

Sustituimos I_1 en (8) y (9):

$$\left.\begin{array}{l} 6I-4(7I_3-I)-2I_3=\xi \\ -4I+11(7I_3-I)-2I_3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (6+4)I+(-4\times 7-2)I_3=\xi \Rightarrow 10I-30I_3=\xi \quad (11) \\ (-4-11)I+75I_3=0 \Rightarrow I_3=\frac{15}{75}I \Rightarrow I_3=\frac{1}{5}I \end{array}$$

Sustituimos I_3 en (11):

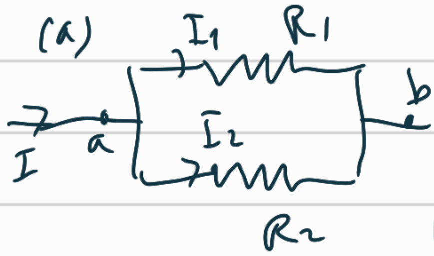
$$10I-30\,\frac{1}{5}\,I=\xi \Rightarrow (10-6)I=\xi \Rightarrow 4I=\xi \text{ ó } \xi=4I$$

$$\Rightarrow R_{eq}=\frac{\xi}{I}=\frac{4I}{I} \Rightarrow \boxed{R_{eq}=4\,K\Omega}$$

Problema 9. Tema 2

9. Demostrar: (**a**) Si dos resistencias R_1 y R_2 están en paralelo, entonces se verifica que $I_1 = IR_2/(R_1 + R_2)$ y análogamente $I_2 = IR_1/(R_1 + R_2)$, donde I es la intensidad total por el paralelo e I_1 e I_2 las intensidades por R_1 y R_2 respectivamente [1].
b) Si dos resistencias están en serie, entonces se verifica $V_1 = VR_1/(R_1 + R_2)$ y análogamente $V_2 = VR_2/(R_1 + R_2)$, donde V es la caída de tensión total entre los extremos de la asociación, siendo V_1 y V_2 las caídas de tensión en R_1 y R_2 respectivamente [2].

(a)



Sabemos que $V_{ab} = V_a - V_b = I_1 R_1 = I_2 R_2 = IR$

siendo R, la resistencia equivalente.

[obtenemos R (visto en teoría

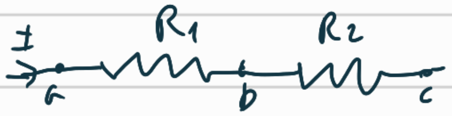
$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

o bien $\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$]

Entonces: $I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{IR}{R_1} = \frac{I}{R_1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}}$

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{IR}{R_2} = \frac{I}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}}$$

(b)



[En teoría, hemos calculado la resistencia equivalente R. Aquí la recalculamos: $V_1 = V_{ab}$; $V_2 = V_{bc}$ y $V = ab$.

La intensidad es la misma, por definición de "en serie" y por el montaje. $I = I_1 = I_2$

Además: $V = V_1 + V_2 \Rightarrow IR = I_1 R_1 + I_2 R_2 = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$].

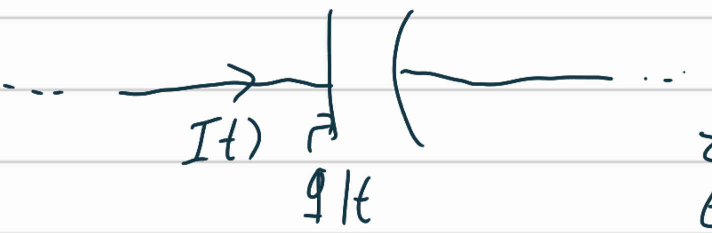
Entonces: $V_1 = IR_1 = \frac{V}{R} R_1 = \frac{V}{R_1 + R_2} R_1 \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{VR_1}{R_1 + R_2}}$

$$V_2 = IR_2 = \frac{V}{R} R_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{VR_2}{R_1 + R_2}}$$

c.q.d.

Tema 2. Problema 10

10. Cuando un circuito con resistencias, condensadores y baterías de CC se conecta, la carga de cada condensador aumenta hasta su valor final Q de acuerdo con la ley: $q(t) = Q(1 - e^{-t/\tau})$, donde τ se denomina *la constante de tiempo* y depende de las capacidades y resistencias de los elementos del circuito. Después de un tiempo $t = \tau$ la carga es el 63 % de la carga final. (**a**) Usando la expresión anterior para $q(t)$, determinar las expresiones matemáticas para la intensidad $I(t) = dq(t)/dt$ y la diferencia de voltaje $V(t) = q(t)/C$ a través del condensador y representarlas gráficamente. (**b**) Verificar que para $t = 4\tau$ la carga $q(t)$ es 98 % de la carga final y el condensador está, por lo tanto, casi cargado. (**c**) Comprobar que para $t = 0$ la diferencia de potencial entre las placas del condensador es cero y, por lo tanto, es equivalente a un *cortocircuito* (a menudo abreviado como *corto*), y compruebar también que si el condensador está completamente cargado la intensidad a través de él es cero, por lo que es equivalente a un em circuito abierto.



$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

τ cte de tiempo

t: tiempo desde que se cierra el circuito

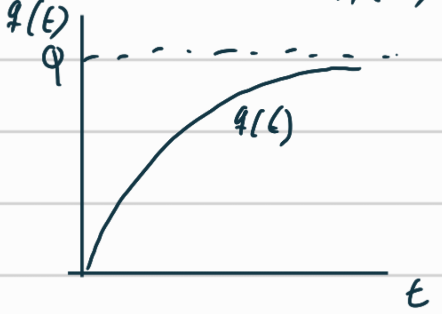
Vemos que $q(0) = Q\left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = Q(1-1) \Rightarrow$

$q(0) = 0 \Rightarrow$ La carga inicial es cero.

También: $q(\infty) = Q\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = Q(1 - e^{-\infty}) = Q(1-0) = Q$

Luego $Q = q(\infty)$, la carga final

Además: $q(\tau) = Q\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = Q(1 - e^{-1}) \Rightarrow q(\tau) = 0{,}63\,Q = \frac{63}{100}Q$ c.q.d.

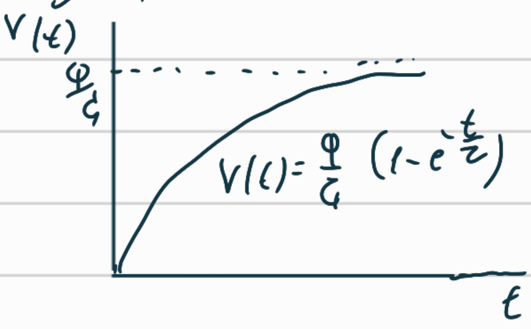


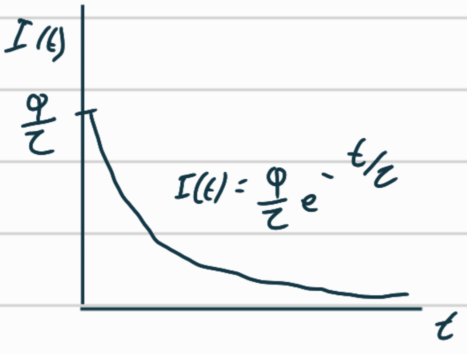
(a) ¿$I(t)$ y $V(t)$?

$V(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{Q}{C}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = Q\left(-\left(-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right)\right) \Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{Q}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Gráficamente:

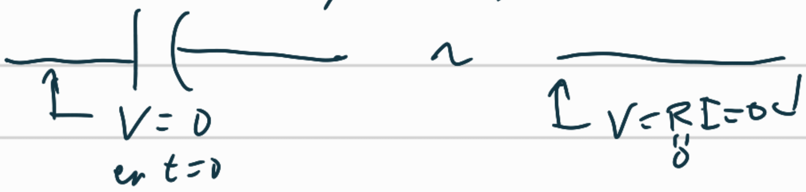




(b) $q(4\tau) = Q\left(1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}}\right) = Q(1 - e^{-4}) = 0{,}9816\,Q \Rightarrow \boxed{q(4\tau) \simeq \frac{98}{100}Q}$

Luego, para $t = 4\tau$, el condensador está casi cargado

(c) Para $t=0$, $V(0) = \frac{\Phi}{C}\left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = \frac{\Phi}{C}\left(1 - e^{0}\right) = 0$, luego el condensador equivale instantáneamente a un conductor de resistencia nula,



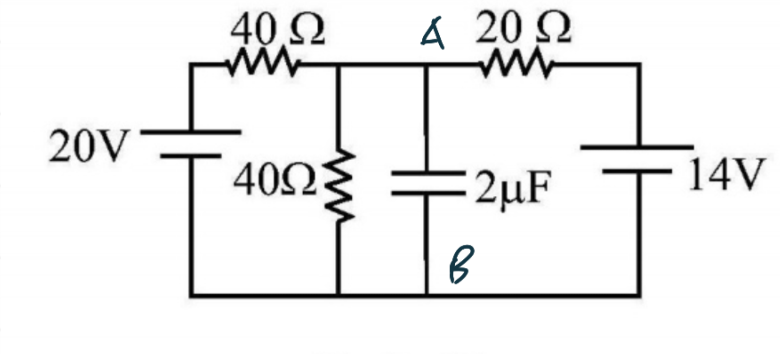
que se llama cortocircuito o "corto"

En cambio para $t=\infty$: $V(\infty) = \frac{\Phi}{C}\left(1 - e^{-\infty}\right) \Rightarrow V(\infty) = \frac{\Phi}{C}$, y, además $I(\infty) = \frac{\Phi}{\tau} e^{-\frac{\infty}{\tau}} = 0 \Rightarrow I(\infty) = 0$, quiere decir que no pasa corriente, pues hemos llegado al estado estacionario, es decir, corriente continua. El condensador equivale a un circuito abierto o "abierto"

TEMA 2. PROBLEMA 11

11. Usando (c) del ejercicio previo, determinar: **(a)** las intensidades a traves de los generadores de la figura justo en el momento en que el circuito se conecta en ($t = 0$); (**b**) las corrientes a través de los generadores cuando el condensador se ha cargado completamente **(c)** la diferencia de potencial en el condensador calculada a lo largo de dos caminos diferentes; **(d)** la carga final del condensador y la energía que almacena.

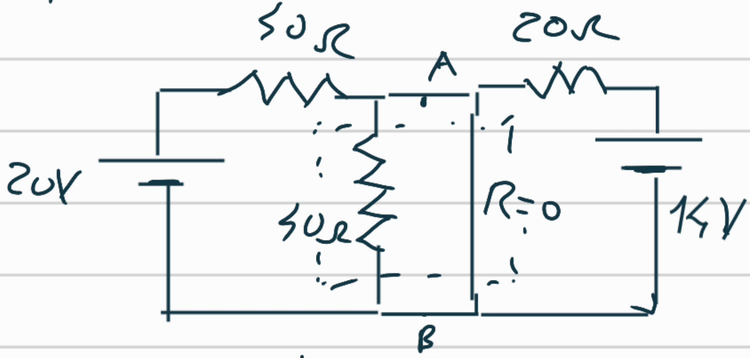
Sol.: (a) 0,25 A y 0,7 A; (b) 0,2 A y 0,1 A; (c) V_c=12 V, por cualquier camino; (d) 24 μC, con la placa superior cargada positivamentey $U_E = 144$ μJ.



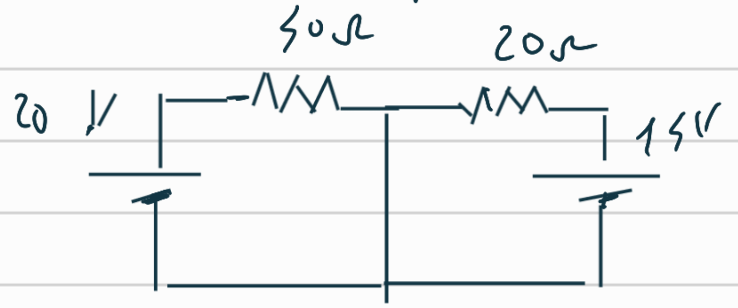
Prob. 11

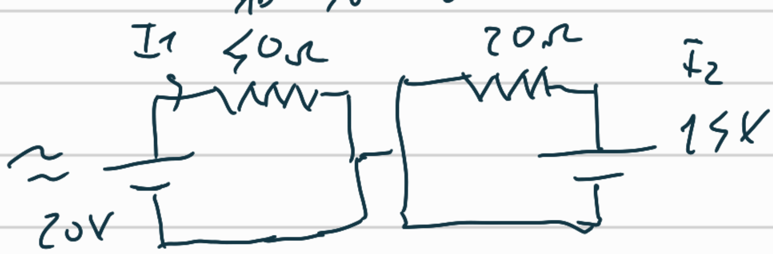
Usamos que en $t=0^+$ un condensador equivale a un cortocircuito y en $t=\infty$ a un abierto.

(a) En $t=0^+$ el circuito equivale a



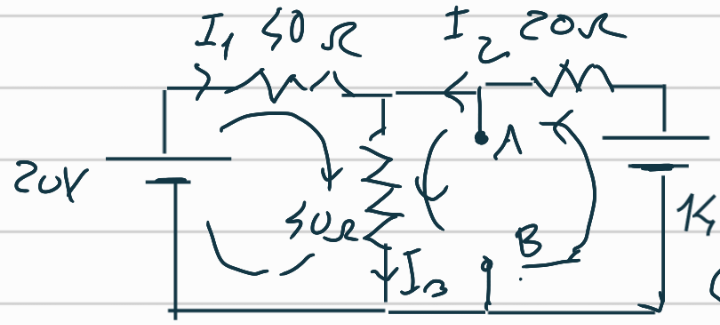
Cuando asociamos una resistencia con un corto (cable con resistencia nula) toda la intensidad se va por el corto. $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow R_{\parallel} = 0$





Luego, $20 = 40 I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = 0,5A}$; $14 = 20 I_2 \Rightarrow \boxed{I_2 = 0,7A}$

(b) En $t=\infty$, cuando el condensador se ha cargado equivale a un abierto.



RKI. $I_3 - I_2 = I_1$

$I_3 = I_1 + I_2$

RKV

M izda: $20 = 50 I_1 + 50 I_3$

M dcha: $15 = +20 I_2 + 50 I_3$

sustituyendo

$$\left.\begin{array}{l} 20 = 50 I_1 + 50(I_1 + I_2) \\ 15 = +20 I_2 + 50(I_1 + I_2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 20 = 80 I_1 + 50 I_2 \\ 15 = 50 I_1 + 60 I_2 \end{array}$$

*

$$\left.\begin{array}{l} [1 = 5 I_1 + 2 I_2] \times (-5) \\ 7 = 20 I_1 + 30 I_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -5 = -20 I - 10 I_2 \\ 7 = 20 I_1 + 30 I_2 \\ \hline 2 = 0 + 20 I_2 \end{array} \Rightarrow I_2 = \frac{2}{20} \Rightarrow \boxed{I_2 = 0{,}1\,A}$$

$$\text{en } * \quad I_1 = \frac{1 - 2I_2}{5} = \frac{1 - 2\times 0{,}1}{5} = \frac{0{,}8}{5} \Rightarrow \boxed{I_1 = 0{,}2\,A}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow \boxed{I_3 = 0{,}3\,A}$$

(c) Directo: $V_{AB} = 50 I_3 = 50 \times 0{,}3 \Rightarrow V_{AB} = 15V$

Por la dcha $V_{AB} = -20 I_2 - (-15) = -20 \times 0{,}1 + 15 \Rightarrow V_{AB} = 13V$

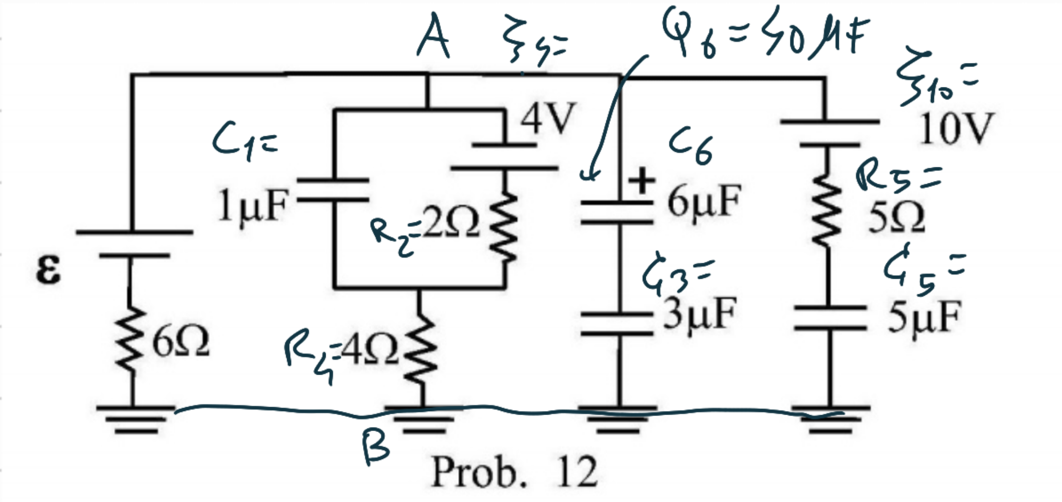
(d) $q = C V_C = C V_{AB} = 2\mu F \times 12V \Rightarrow \boxed{q = 24\mu C}$

$U = \frac{1}{2} q V_C = \frac{1}{2} q V_{AB} = \frac{1}{2}\, 24\mu C \times 12V \Rightarrow \boxed{U = 144\mu J}$

Tema 2. Problema 12

12. El circuito de la figura está en estado estacionario. Sabiendo que la carga del condensador de 6 μF es de 40 μC con la polaridad indicada, determinar: (**a**) el valor de la intensidad que atraviesa el generador así como su fuerza electromotriz; (**b**) la carga de cada uno de los condensadores.

Sol.: **a)** $I = 4$ A, $\varepsilon = 44$ V; **b)** $Q_{(1\mu F)} = 4\ \mu$C, $Q_{(6\mu F)} = Q_{(3\mu F)} = 40\ \mu$C y $Q_{(5\mu F)} = 50\ \mu$C.

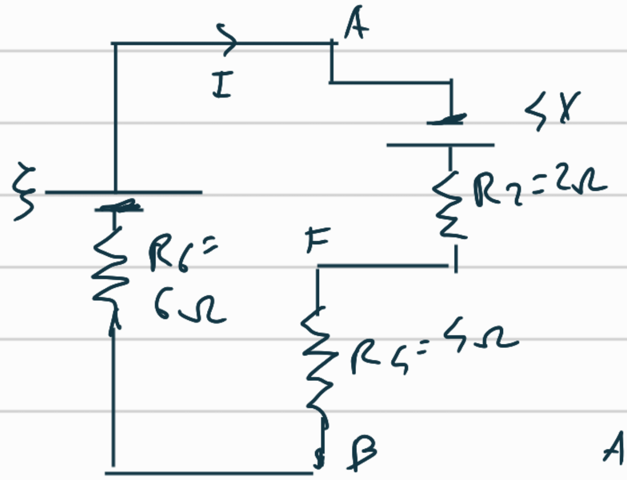


Prob. 12

Ponemos nombres a los elementos y unimos las tierras

La tierra es un conductor muy grande

(a) Por los condensadores no pasa corriente en estado estacionario, por lo que quitamos las ramas con condensadores



En la única malla, RKV:

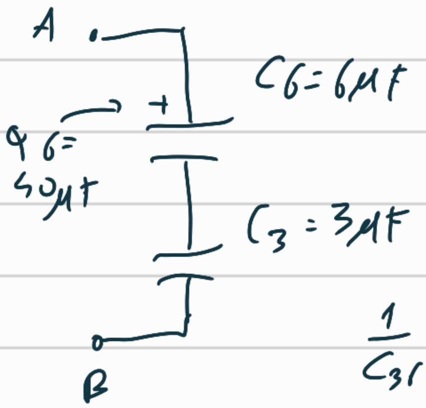
$\xi + 4 = (6+2+4)I \Rightarrow \xi = 12I - 4$ (1)

Necesitamos conocer algo más. Como conocemos la carga q_6, podemos calcular V_{AB}

Calculamos V_{AB} por RKV:

$V_{AB} = (2+4)I - (4) \Rightarrow$

$V_{AB} = 6I - 4V$. (2)



$q_6 = 40\mu F$. Como están en serie, es también la de la asociación. $q_{36} = 40\mu F$

$\frac{1}{C_{36}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_{36} = 2\mu F$

y $V_{AB} = \Delta V_{36} = \frac{q_{36}}{C_{36}} = \frac{40\mu F}{2\mu F} \Rightarrow \underline{V_{AB} = 20V}$

Sustituyendo en (2): $20V = 6I - 4V \Rightarrow I = \frac{24}{6} \Rightarrow \boxed{I = 4A}$

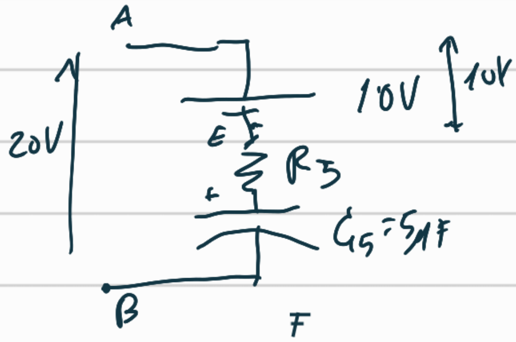
Sustituyendo en (1): $\xi = 12I - 4 = 12 \times 4 - 4 \Rightarrow \boxed{\xi = 44V}$

(b) La carga de cada condensador:

Ya conocemos $Q_3 = Q_6 = 40\mu F$.

La rama de la derecha también está sometida a $V_{AB}=20$.

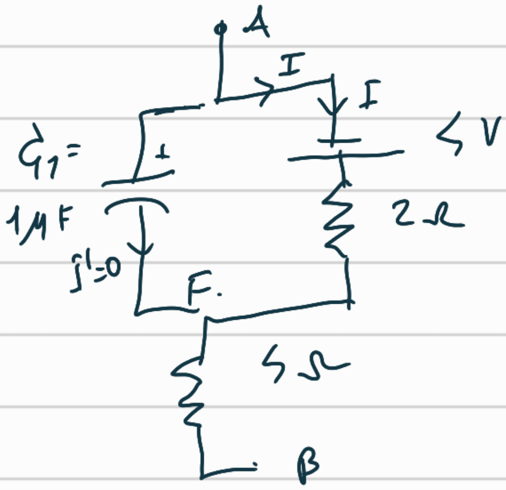
Como la intensidad es nula, no hay caída de potencial en R_5 y



$V_{AB} = 10 + \Delta V_5 \Rightarrow \Delta V_5 = 20-10 = 10V$ y

$Q_5 = C_5 \Delta V_5 = 5\mu F \times 10V \Rightarrow \boxed{Q_5 = 50\mu C}$

Falta $C_1 = 1\mu F$. Nos fijamos en su rama y la de al lado. C_1 está sometido a $\Delta V_1 = V_{EF} = 2I - (5)$ [usando RKI] $\Rightarrow$



$\Delta V_1 = V_{EF} = 2\times 5 - 5 = 5V$ y

$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = 1\mu F \times 5V \Rightarrow \boxed{Q_1 = 5\mu F}$