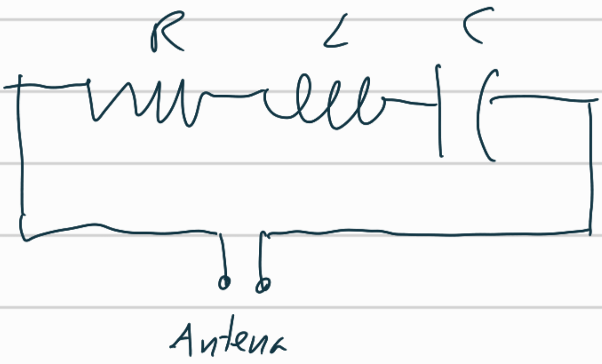
Resonancia en circuitos RLC serie y estudio de circuitos en función de la frecuencia

14. Un receptor de radio se sintoniza para detectar la señal emitida por una estación de radio. El circuito de sintonía –que puede esquematizarse como un circuito RLC serie– utiliza un condensador de 32,3 pF y una bobina de 0,25 mH. Calcular la frecuencia de emisión de la estación de radio.
Sol.: 1,77 MHz.



$C = 32.3\,\text{pF}$; $L = 0.25\,\text{mH}$

La antena recibe una diferencia de potencial que la hace equivalente en el circuito a un generador de corriente alterna de f.e.m. ξ y frecuencia ω.

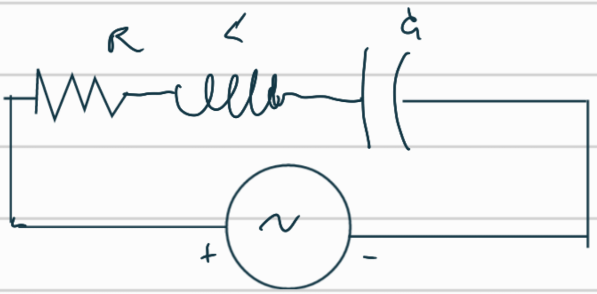
El circuito está diseñado para sintonizar la frecuencia de resonancia, pues es aquella en que la intensidad es mayor. $\omega_R = 2\pi f_R \Rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi}\omega_R$

$$f_R = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{0.25\times10^{-3}\,H \times 32.3\times10^{-12}\,F}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\times 3.23\times10^{-1}}}\ s^{-1}$$

$$\Rightarrow f_R = \frac{1}{\pi}\frac{10^{7}}{\sqrt{3.23}}\ s^{-1} \Rightarrow \boxed{f_R = 1.77\ \text{MHz}}$$

15. Una bobina de 0,1 H está conectada en serie con un condensador y una resistencia de 10 Ω. El condensador se elige de forma que el circuito esté en resonancia al conectarlo a una fuente de alterna de 60 Hz. Determinar el valor de condensador así como las caídas de potencial en cada uno de los elementos cuando se conecte el circuito a una fuente de alterna cuya tensión máxima sea 100 V y que opere a la frecuencia de resonancia (nota: elegir fase 0° en la fuente).

Sol.: $C = 70{,}4\ \mu$F; $V_R = 100\cos(120\pi t)$, $V_C(t) = 120\pi\cos(120\pi t - \pi/2)$ y $V_L(t) = 120\pi\cos(120\pi t + \pi/2) = -V_C(t)$. Note que, como era de esperar, $V_L(t) = -V_C(t)$ en resonancia, esto es, $V_L(t) + V_C(t) = 0$, y la impedancia de la serie L-C será nula, quedando la impedancia total determinada por la resistencia.



$L = 0.1\,H$, $C = ?$, $R = 10\,\Omega$

$\omega_R = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\, 60\,Hz \Rightarrow \underline{\omega_R = 120\pi\ rad/s}$

(a) C? Sabemos que la frecuencia de resonancia vale

$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_R^2 \Rightarrow$

$C = \frac{1}{\omega_R^2\, L} \Rightarrow C = \frac{1}{120^2\pi^2 (s^{-1})^2 \times 0.1\,H} = 7.05\times 10^{-5}\,F \Rightarrow \boxed{C = 70.5\,\mu F}$

(b) $V_i(t)$? Sabemos que $\tilde{V}_i = \tilde{Z}_i \tilde{I}$ y que $\tilde{I} = \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{Z}}$, además

$\tilde{Z} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C$, con $\tilde{Z}_R = R$, $\tilde{Z}_L = j\omega L$ y $\tilde{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$, pero en resonancia

$\omega_R L = \frac{1}{\omega_R C} \Rightarrow \tilde{Z}_C = -\tilde{Z}_L \Rightarrow \tilde{Z} = R$ e $\tilde{I} = \frac{\tilde{\xi}}{R}$

Como nos dicen que $\xi(t) = 100\,V\cos(\omega t + 0^{\circ})\,V \Rightarrow \tilde{\xi} = 100\,V\angle 0^{\circ} \Rightarrow$

$\tilde{I} = \frac{\tilde{\xi}}{R} = \frac{100\,V\angle 0^{\circ}}{10\,\Omega} \Rightarrow \tilde{I} = 10\,A\angle 0^{\circ}$, además $\tilde{V}_R = \tilde{\xi} \Rightarrow$

$\boxed{V_R(t) = 100\,V\cos(\omega_R t + 0^{\circ})}$. Calculamos $\tilde{Z}_L = j\omega_R L = j\,120\pi\times 0.1 = j\,12\pi\,\Omega$

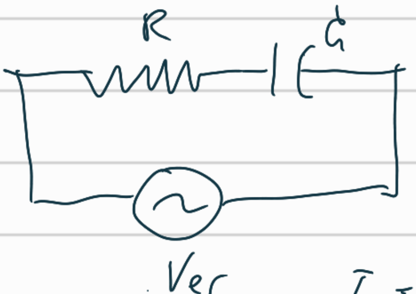
y $\tilde{V}_L = \tilde{Z}_L \tilde{I} = 12 j\pi \times 10 \Rightarrow \tilde{V}_L = 120\pi\, e^{j\pi/2}\,V$ y

$\boxed{V_L(t) = 120\pi\cos(\omega_R t + \frac{\pi}{2})\,V}$ Como $\tilde{Z}_C = -\tilde{Z}_L \Rightarrow \tilde{V}_C = -\tilde{V}_L$ y

$\tilde{V}_C = -120\pi j \Rightarrow \tilde{V}_C = 120\pi\, e^{-j\pi/2} \Rightarrow \boxed{V_C(t) = 120\pi\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})\,V}$

16. (**a**) Sea un circuito serie RC conectado a una fuente de alterna. Suponiendo que mantenemos fija la amplitud de la fuente, $V_{\text{ef.}}$, y variamos sólo su frecuencia, obtener la expresión la tensión eficaz en el condensador en función de la frecuencia angular, $V_{C,\text{ef.}}(\omega)$, y representarla gráficamente. (**b**) Repetir el estudio anterior para un circuito serie RL.

Sol.: (a)$V_{C,\text{ef.}}(\omega) = V_{\text{ef.}}/\sqrt{1+(RC\omega)^2}$. (b)$V_{L,\text{ef.}}(\omega) = V_{\text{ef.}}/\sqrt{1+(R/(L\omega))^2}$.



(a) $\tilde{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$

Además $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}} \Rightarrow |\tilde{I}| = \frac{|\tilde{V}|}{|\tilde{Z}|} \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|}$ y

$I_e = \frac{V_e}{|\tilde{Z}|}$ con $I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ y $V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

Entonces $I_e = \frac{V_e}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \frac{V_e}{\sqrt{\frac{(R\omega C)^2 + 1}{(\omega C)^2}}} = \frac{V_e\, \omega C}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}$

Análogamente $\tilde{V}_C = \tilde{Z}_C \tilde{I} \Rightarrow V_{C,e} = |\tilde{Z}_C| I_e = \frac{1}{\omega C} I_e = \frac{1}{\omega C} \frac{V_e\, \omega C}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}} \Rightarrow$

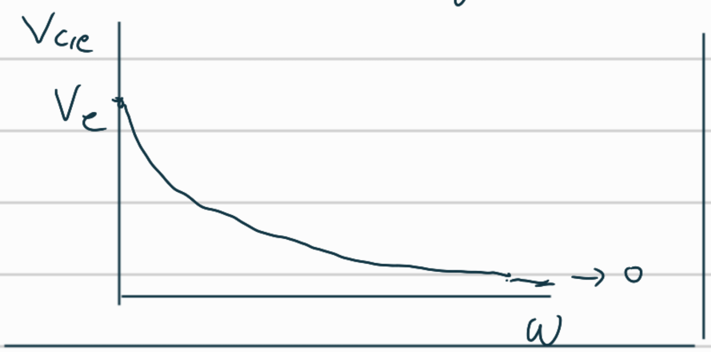
$$\boxed{V_{C,e} = \frac{V_e}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}}$$

Gráficamente, vemos que si ω aumenta, $V_{C,e}$ disminuye (luego $V_{R,e} = \sqrt{V_e^2 - V_{C,e}^2}$ aumenta).

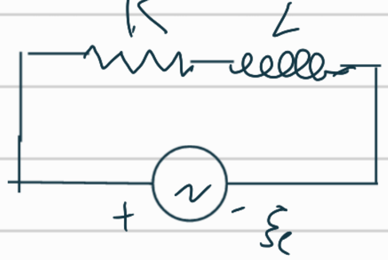
Para $\omega = 0$ (corriente continua) $V_{C,e} = V_e$ ($I_e = 0$, el condensador corta la corriente como un abierto).

Para $\omega = \infty$, $V_{C,e} = \frac{V_e}{\infty} = 0$, el condensador equivale a un cortocircuito.

C corta las frecuencias bajas.



(b)



Ahora $\tilde{Z}_L = j\omega L$ y $|\tilde{Z}_L| = \omega L$, $\tilde{Z} = R + j\omega L$ y $|\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow$

$I_e = \frac{\xi_e}{|\tilde{Z}|} = \frac{\xi_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$; $V_{L,e} = |\tilde{Z}_L| I_e = \omega L \frac{\xi_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

Pasamos ωL al denominador dividiendo, para que ωL esté en su sitio:

$$\boxed{V_{L,e} = \frac{\xi_e}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1}}}$$

Ahora si $\omega = 0$, $\frac{R}{\omega L} = \infty \Rightarrow V_{L,e} = 0$ y si $\omega = \infty$, $V_{L,e} = \xi_e$

Si ω crece, $\frac{R}{\omega L}$ decrece y $V_{L,e}$ crece.

L equivale a un corto para $\omega = 0$ (CC) y un abierto si $\omega = \infty$.

L corta las frecuencias altas.