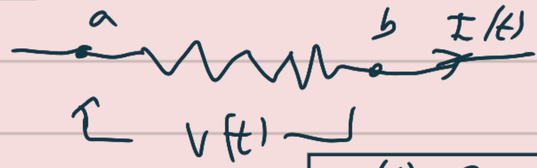
T2-4 Relación entre $V(t)$ e $I(t)$ entre varios elementos en corriente alterna

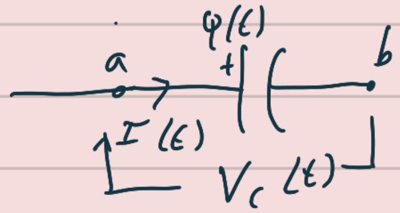
Resistencia R



$v_R(t) = V_a - V_b$

Es igual que en continua $\boxed{V(t) = R\,I(t)}$

Condensador: C



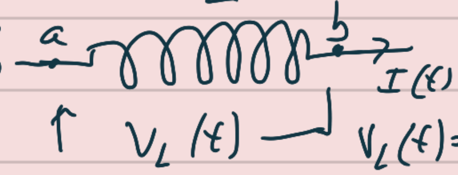
$V_c(t) = V_a - V_b$

Sabemos que $q(t) = C\,V_c(t)$ y que $I(t) = \dfrac{d\,q(t)}{dt}$, luego

$$\boxed{I(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}} \quad \text{y} \quad \boxed{V_c(t) = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt}$$

Autoinducción o bobina: L

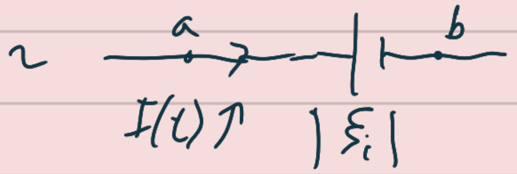
Está formada por un cable enrollado



$V_L(t) = V_a - V_b$

Veremos que produce una fuerza electromotriz inducida ξ_i, que se opone a la variación de $I(t)$. $\xi_i = -L\dfrac{dI}{dt}$

L se mide en henrio (henry) $H = \dfrac{V\cdot s}{A} = \Omega\cdot s$

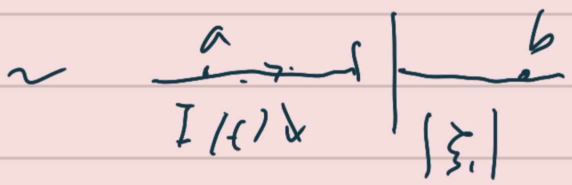


, luego $V_L(t) = |\xi_i| = L\dfrac{dI(t)}{dt}$

$$\boxed{V_L(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}} \quad (*)$$

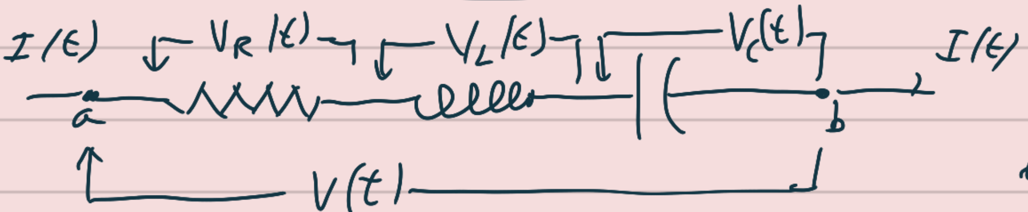
Si $I(t)$ aumenta, $V_L(t) = V_a - V_b > 0$, por lo que el signo es correcto

Si $I(t)$ disminuye, ξ_i se opone a esa disminución



$V_L(t) = V_a - V_b < 0$ y $L\dfrac{dI(t)}{dt} < 0$, luego $(*)$ es también correcta

Impedancia de un circuito RLC en serie



$V(t) = V_a - V_b$ es la caida de potencial

$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$, en corriente alterna,

$V(t), V_R(t), V_L(t), V_C(t), I(t)$ son todas funciones armónicas.

Sea $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi)$,

en general con diferente fase inicial.

$$V(t) = R I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$, para una la

misma ecuación en vectores giratorios:

$$\tilde{V}(t) = R \tilde{I}(t) + L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}(t)dt \Rightarrow$$

$$\tilde{V}(t) = R \tilde{I}(t) + L j\omega \tilde{I}(t) + \frac{1}{C}\frac{1}{j\omega}\tilde{I}(t)$$

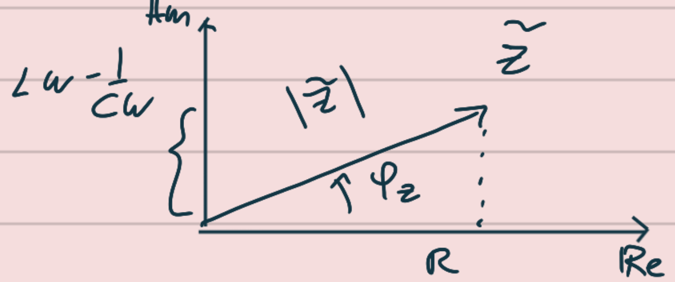
En $t=0$ $\tilde{V}(t) = \tilde{V}$ e $\tilde{I}(t) = \tilde{I}$, los fasores de $V(t)$ e $I(t)$.

$$\tilde{V} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\tilde{I} \quad \left(\text{recordar: } \frac{1}{j} = -j\right)$$

Llamamos impedancia de un circuito en corriente alterna

a $\tilde{Z}$ tal que $\boxed{\tilde{V} = \tilde{Z}\tilde{I}}$ Ley de Ohm en c.a.

Para un circuito RLC serie $\boxed{\tilde{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$



$$|\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_Z = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

φ_Z es positivo si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ y viceversa.

Si $R = 0$, $\operatorname{tg}\varphi_Z = \infty \Rightarrow \varphi_Z = \pm \pi/2$

Como $R > 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_Z \leq \pi/2$, en el primer o cuarto cuadrante

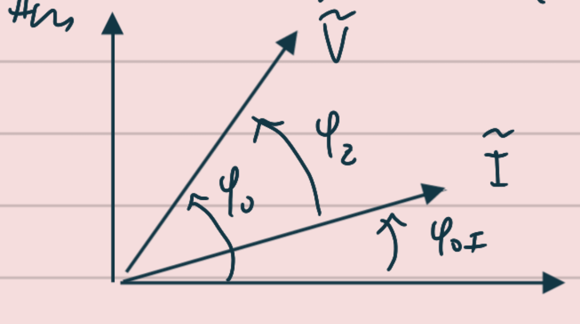
De la ley de Ohm, si $\tilde{V} = V_0 e^{j\varphi_0}$ e $\tilde{I} = I_0 e^{j(\varphi_0-\varphi)}$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}} = \frac{V_0 e^{j\varphi_0}}{|\tilde{Z}| e^{j\varphi_Z}} = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|} e^{j(\varphi_0-\varphi_Z)}$$

, luego

$$\boxed{\begin{gathered} I_0 = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|} \\ \varphi_{0I} = \varphi_0 - \varphi_Z \end{gathered}}$$

La impedancia introduce una diferencia de fase. $I(t)$ está atrasada respecto de $V(t)$ en el argumento de la impedancia (o $V(t)$ adelantada).



Los vectores giratorios $\tilde{V}(t)$, $\tilde{I}(t)$ mantienen el módulo y diferencia de fase.

Si φ_Z es negativa $\tilde{V}$ atrasa respecto a $\tilde{I}$

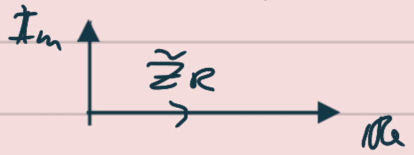
Impedancias de cada elemento. Si sólo hay un elemento:

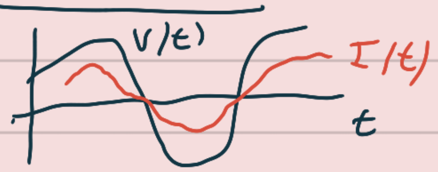
Resistencia

$\boxed{\tilde{Z}_R = R}$, $|\tilde{Z}_R| = R$, $\varphi_Z = 0 \Rightarrow$

$\tilde{V} = R\tilde{I}$. $\varphi_I = \varphi_0$, $V(t)$ e $I(t)$ están en fase

$$\boxed{\begin{gathered} V_0 = R I_0 \\ V_{ef} = R I_{ef} \end{gathered}}$$





Autoinducción

$\boxed{\tilde{Z}_L = j\omega L}$ $\quad \tilde{Z}_L = \omega L e^{j\pi/2} = X_L e^{j\pi/2}$

$X_L = \omega L$ se llama: reactancia inductiva

De $\tilde{V} = \tilde{Z}_L \tilde{I}$, $\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}_L} = \frac{V_0 e^{j\varphi_0}}{j\omega L} = \frac{V_0 e^{j\varphi_0}}{\omega L e^{j\pi/2}} = \frac{V_0}{\omega L} e^{j(\varphi_0-\pi/2)}$

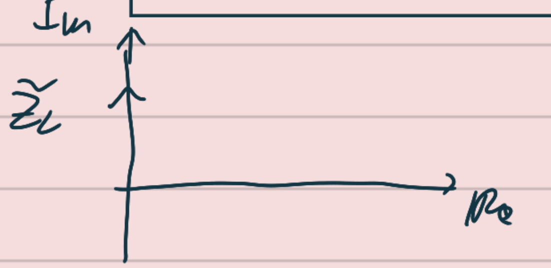
Luego

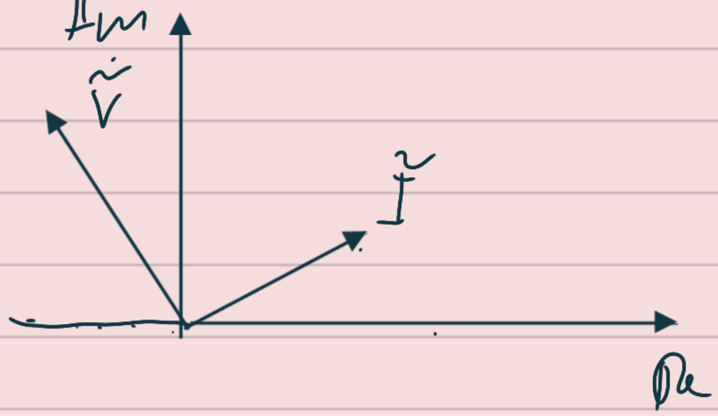
$$\boxed{\begin{gathered} I_0 = \frac{V_0}{\omega L} = \frac{V_0}{X_L} \\ I_{ef} = \frac{V_{ef}}{\omega L} = \frac{V_{ef}}{\omega L} \end{gathered}}$$

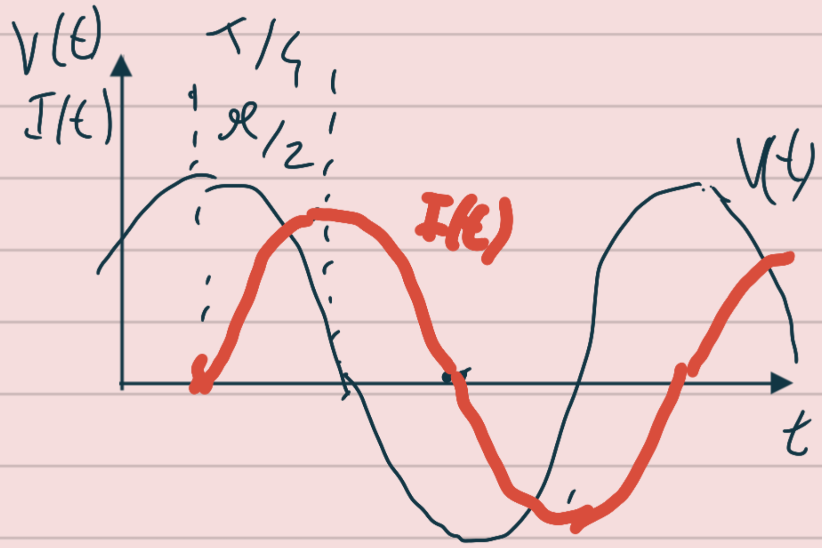
$\varphi_{0I} = \varphi_0 - \pi/2$ o $\varphi_0 = \varphi_{0I} + \pi/2$

$V(t)$ adelanta $\pi/2$ respecto a $I(t)$

($\tilde{V}$ resp. a $\tilde{I}$)

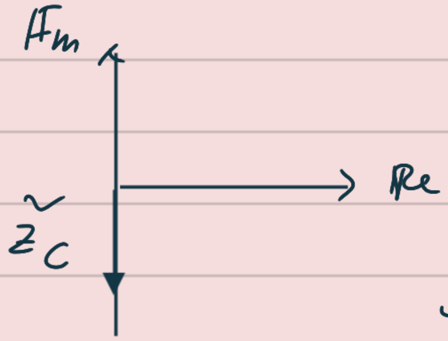






Condensador $\boxed{\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}$ $\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C}(-j) = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ se llama reactancia capacitiva (en Ω)

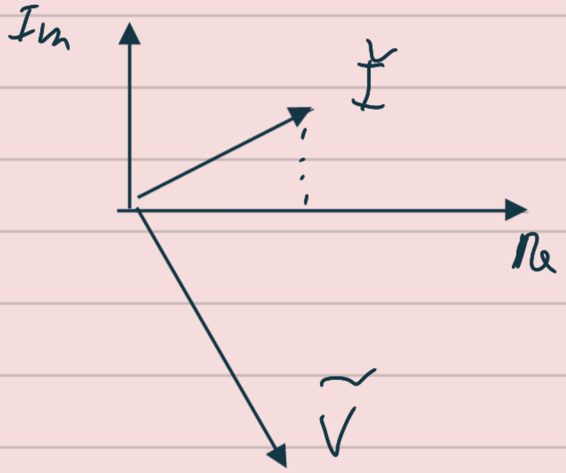


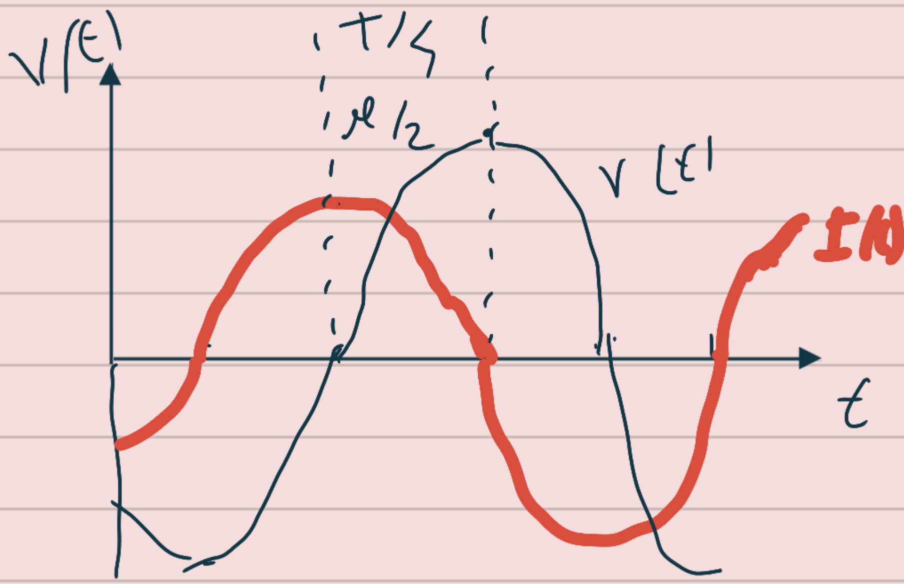
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}_C} \Rightarrow I_0 e^{j\varphi_{0I}} = \frac{V_0 e^{j\varphi_0}}{X_C e^{-j\pi/2}} = \frac{V_0}{X_C} e^{j(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_0 &= \frac{V_0}{\omega C} = \frac{V_0}{X_C} \\ I_{ef} &= \frac{V_{ef}}{\omega C} = \frac{V_{ef}}{X_C} \end{aligned} \right\}$$

y $\varphi_{0I} = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ o $\varphi_0 = \varphi_{0I} - \pi/2$

$V(t)$ atrasa respecto a $I(t)$ en $\frac{\pi}{2}$

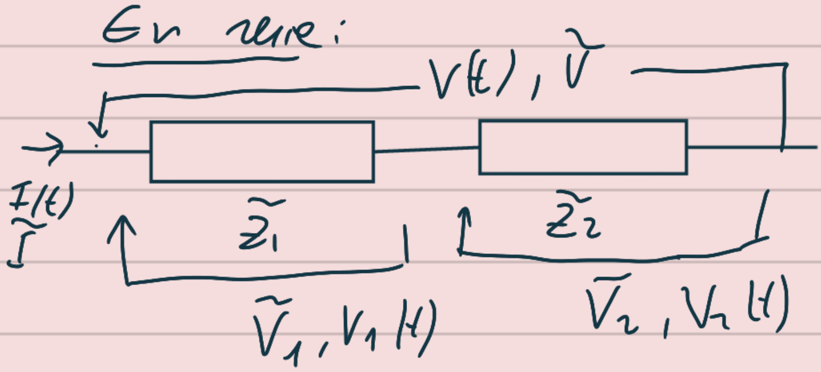




Asociaciones de impedancias

Partimos de $\tilde{V} = \tilde{Z}\,\tilde{I}$, ley de Ohm

En serie:

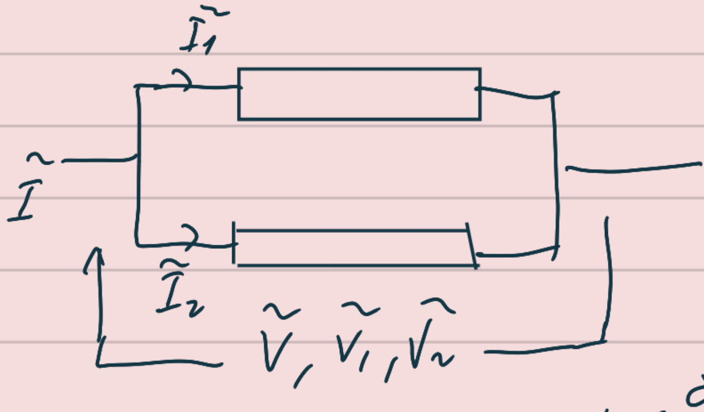


$\tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2$ $\qquad$ $\tilde{I} = \tilde{I}_i$

$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$ $\qquad$ $\tilde{V} = \sum \tilde{V}_i$

$$\boxed{\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 \ ; \quad \tilde{Z} = \sum \tilde{Z}_i}$$

En paralelo

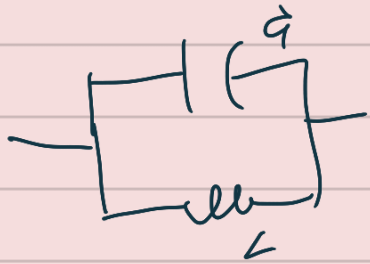


$\tilde{V} = \tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 \ ; \quad \tilde{V} = \tilde{V}_i$

$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \ ; \quad \tilde{I} = \sum \tilde{I}_i$

$$\boxed{\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2} \ ; \quad \frac{1}{\tilde{Z}} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i}}$$

Ejemplo

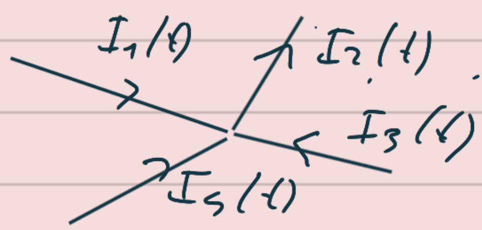


$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{j}\left(-\omega C + \frac{1}{-\omega L}\right)$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \Rightarrow \tilde{Z} = j\,\frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \Rightarrow \underline{\tilde{Z} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}$$

Regla de Kirchhoff de las intensidades



$\sum I_i(t) = 0$ (+ si salen)

$-I_1(t) + I_2(t) - I_3(t) - I_4(t) = 0$

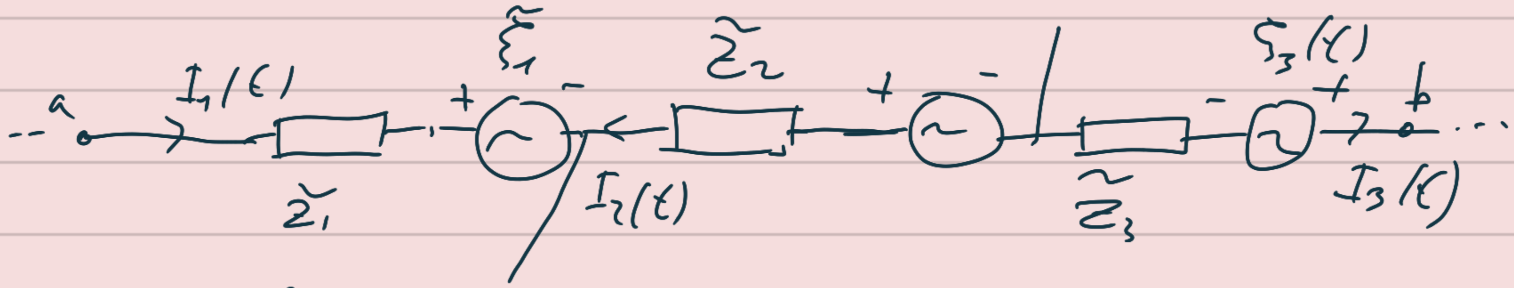
$-\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 - \tilde{I}_3 - \tilde{I}_4 = 0$

$$\boxed{\sum \tilde{I}_i = 0}$$

+ si salen

− si entran

Regla de Kirchhoff del potencial en un camino



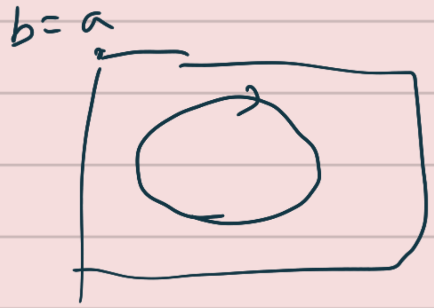
$\tilde{V}_{ab} = \tilde{V}_a - \tilde{V}_b$: $\tilde{V}_{ab} = \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 - \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 + \tilde{I}_3 \tilde{Z}_3 - (-\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3)$

$$\boxed{V_{ab} = \sum \tilde{I}_i \tilde{Z}_i - \left(\sum \tilde{\xi}_i\right)}$$

+ si I_i, ξ_i en el sentido del camino a→b y viceversa

Regla de Kirchhoff del potencial en una malla

a=b



$V_{ab} = \tilde{V}_a - \tilde{V}_a = 0$

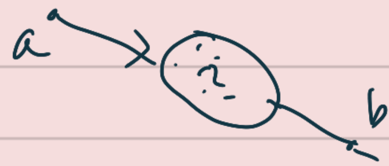
$$\boxed{\sum \tilde{\xi}_i = \sum \tilde{I}_i \tilde{Z}_i}$$

+ si I_i, ξ_i en el sentido de la malla y viceversa.

Potencia en corriente alterna

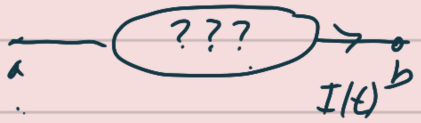
De forma instantánea es similar a la corriente continua:

$P = \underbrace{(V_b - V_a)}_{\text{Aumento de potencial}} I$ potencia generada



$P = \underbrace{(V_a - V_b)}_{\text{caída de potencial}} I$ potencia consumida

En corriente alterna



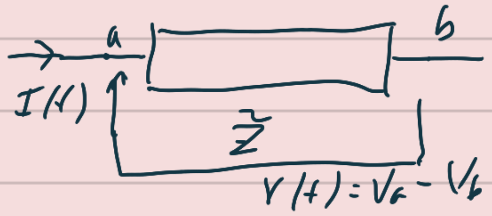
$V(t) = V_a - V_b$ "caída" de potencial

$P(t) = V(t) I(t)$. $\begin{cases} \text{Potencia instantánea} \\ \text{consumida} \end{cases}$

Si $V(t) = V_b - V_a$ "aumento" de potencial

$P(t) = V(t) I(t)$ es la potencia instantánea generada.

Veamos la consumida:



$P(t) = V(t) I(t)$ con $\begin{cases} V(t) = V_0 \cos(\omega t) \\ I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_{IV}) \end{cases}$

Suponemos fase inicial 0 para $V(t)$ para simplificar.

Se denomina potencia activa a la potencia media consumida en un periodo

$$P_a = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T V(t) I(t) = \frac{1}{T}\int_0^T V_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \varphi_{IV})\,dt$$

$$\Rightarrow P_a = \frac{V_0 I_0}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\left[\cos(\omega t)\cos\varphi_{IV} - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi_{IV}\right] dt \Rightarrow$$

$$P_a = \frac{V_0 I_0}{T}\cos\varphi_{IV}\underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt}_{A} - \frac{V_0 I_0}{T}\operatorname{sen}\varphi_{IV}\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt}_{B}$$

Integrales

Calculamos las dos integrales A y B usando relaciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

A: $$\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2}\right]dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^T + \frac{1}{4\omega}\left[\operatorname{sen} 2\omega t\right]_0^T =$$

$$\frac{1}{2}T + \frac{1}{4\omega}\Big(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{sen} 2\underbrace{\omega T}_{2\pi}}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{sen} 0}}\Big) = \frac{1}{2}T$$

B: $$\int_0^T \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen} 2\omega t\,dt = \frac{-1}{4\omega}\left[\cos 2\omega t\right]_0^T =$$

$$= -\frac{1}{4\omega}\Big(\cos 2\underbrace{\omega T}_{2\pi} - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\cos 0}}\Big) = 0$$. Sustituyendo

$$P_a = \frac{V_0 I_0}{T}\cos\varphi_{IV}\underbrace{\frac{T}{2}}_{1} \Rightarrow \boxed{P_a = \frac{1}{2}V_0 I_0\cos\varphi_{IV} = I_{ef}V_{ef}\cos\varphi_{IV}}$$

Hemos usado que $\frac{V_0 I_0}{2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}} = V_{ef} I_{ef}$

$\cos\varphi_{IV}$ se llama factor de potencia

El signo de φ_{IV}, el desfase entre I y V es irrelevante pues cos es par.

Para una resistencia: $\varphi_{VI} = 0 \Rightarrow \cos\varphi_{IV} = 1$

$$V_0 = RI_0 \Rightarrow V_{ef} = RI_{ef} \Rightarrow P_a = I_{ef}RI_{ef} \Rightarrow \boxed{P_a = RI_{ef}^2 = \frac{1}{2}RI_0^2}$$

Luego I_{ef} equivale a la intensidad de continua que consume igual.

Para un condensador o bobina

$$\varphi_{IV} = \pm\pi/2;\quad \cos\varphi_{IV} = 0 \Rightarrow \boxed{P_a = 0}$$

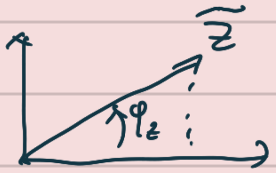
Condensadores y bobinas no consumen potencia. Almacenan energía durante una parte del ciclo y la devuelven en la otra.

En una impedancia $\tilde{Z} = |\tilde{Z}|e^{j\varphi_Z}$

$\varphi_{IV} = \varphi_Z$ y $V_0 = |\tilde{Z}|I_0$, luego

$$P_a = \frac{1}{2}V_0 I_0\cos\varphi_Z = \frac{1}{2}|\tilde{Z}|I_0 I_0\cos(\varphi_Z) \Rightarrow$$

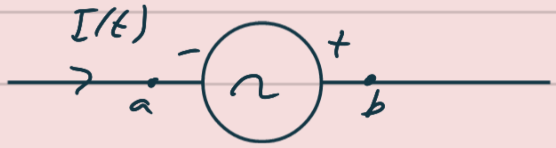
$$P_a = \frac{1}{2}I_0^2\underbrace{|\tilde{Z}|\cos(\varphi_Z)}_{R} \Rightarrow P_a = I_{ef}^2 R$$



$R = |\tilde{Z}|\cos(\varphi_Z)$

Es decir la potencia consumida en una impedancia se consume en la resistencia.

Potencia producida en un generador de corriente alterna



Instantáneamente $P(t) = V(t)I(t)$,

con $V(t) = V_b - V_a = \xi(t)$.

Si $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$, e $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_{I\xi})$

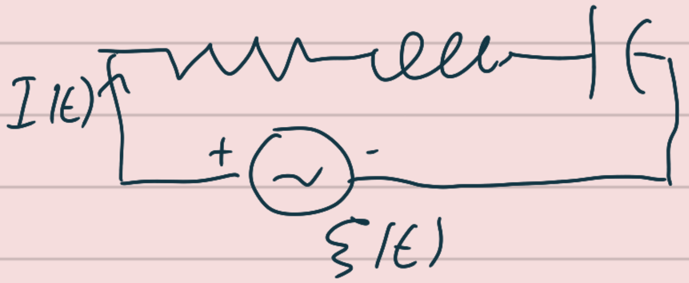
$\langle P_g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t) I(t)\, dt$, haciendo la misma integral que antes:

$$\boxed{\langle P_g \rangle = \frac{1}{2}\xi_0 I_0 \cos(\varphi_{I\xi}) = \xi_{ef} I_{ef} \cos(\varphi_{I\xi})}$$

La misma expresión, pero $V(t)$ es el aumento del potencial en vez de la caída.

Resonancia

Sea un circuito RLC con frecuencia variable



Con $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$

$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_z)$

$\tilde{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)$

$|\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_z = \frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R}$

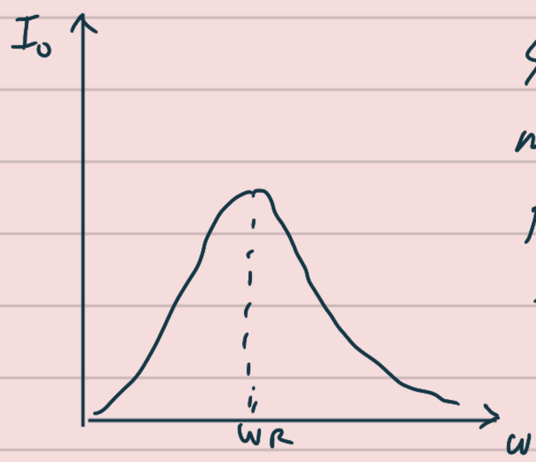
$I_0 = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|}$ $|\tilde{Z}|$ varía con ω y tiene un mínimo para ω_R tal que

$\left(\omega_R L - \frac{1}{C\omega_R}\right) = 0 \Rightarrow \omega_R L = \frac{1}{C\omega_R} \Rightarrow \omega_R^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

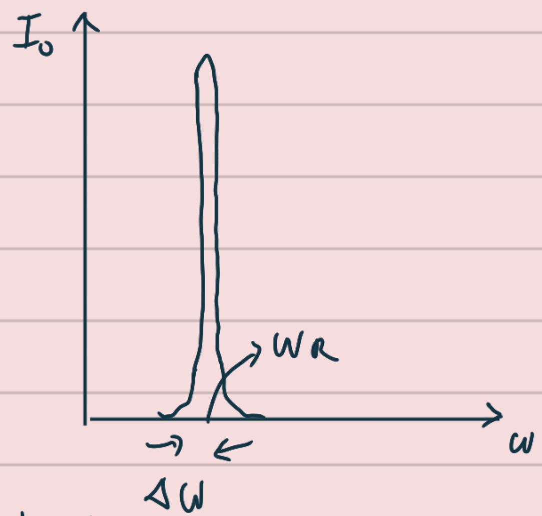
ω_R o $f_R = \frac{1}{2\pi}\omega_R$ se llama frecuencia de resonancia.

Para $f = f_R$:
1) I_0 es máxima $I_0 = \frac{V_0}{R}$
2) $\operatorname{tg}\varphi_z = 0$, $I(t)$ y $V(t)$ están en fase
3) $\tilde{Z} = R$. La impedancia equivale a la resistencia. El condensador y la bobina se anulan
4) La potencia consumida $P_R = \frac{1}{2}\xi_0 I_0 \cos(\varphi_{IV})$ es máxima.

Si representamos $I_0 = \frac{\xi_0}{|\tilde{Z}|}$ respecto a ω



Si R es muy pequeña, para $\omega = \omega_R$ $I_0 = \frac{\xi_0}{R} \to \infty$



Entonces para R pequeña, I_0 es distinta de cero en un pequeño intervalo de frecuencias en torno a ω_R. Tenemos un sintonizador, como por ejemplo, un teléfono móvil. Para que una conversación no se junte con la otra, cada teléfono usa una frecuencia.