Física 2 — *Grado en Ingeniería de la Salud. Curso 2018-2019.* — Ejercicios del tema 5

Ley de Faraday

1. Una bobina circular de radio $r = 20$ cm y de $N = 500$ vueltas se encuentra en un campo magnético uniforme de 250 mT. La bobina está dispuesta de forma que las líneas de campo son paralelas al eje de la misma (esto es, son perpendiculares a las espiras). Si se hace aumentar dicho campo a razón de 50 mT/s manteniendo su dirección inicial, calcular: (**a**) el valor del módulo del campo magnético en función del tiempo, $B(t)$, tomando como instante inicial el momento en el que comenzó a crecer; (**b**) el flujo que atraviesa la bobina en función del tiempo así como la fuerza electromotriz (valor absoluto) inducida.
Sol.: (a) $B(t) = (250 + 50t)$ mT; (b) $\Phi = NB(t)\,\pi r^2\,\cos(\alpha)$, donde $\alpha = 0^{\text{o}}$ debido a cómo está colocada la bobina, sustituyendo ⇒ $\Phi = (15.71 + \pi t)$ Wb, $\varepsilon = -d\Phi(t)/dt = -3.1416$ V, luego $|\varepsilon| = 3.1416$ V.

2. Si la bobina del problema anterior se dispone ahora de forma que su eje forme 60^{o} con las líneas de campo, determinar a qué razón debe crecer el campo magnético para que la fuerza electromotriz inducida sea de 1 V (en valor absoluto).
Sol.: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -N\dfrac{dB}{dt}\,\pi r^2\,\cos(60^{\text{o}}) = -1$ V, despejando ⇒ $\dfrac{dB}{dt} = 1/(10\pi)$ T/s $= 31,8$ mT/s.

3. Una espira rectangular de 20 cm de largo por 5 cm de ancho y de resistencia 1,5 Ω entra a velocidad constante de 2 cm/s en una región donde existe un campo magnético uniforme de 1,5 T dirigido hacia el lector, según muestra la figura. Tomando $t = 0$ en el instante en que el extremo delantero de la espira entra en la zona de campo magnético, determinar: (**a**) el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo durante el intervalo desde $t = 0$ hasta el instante en que penetra totalmente en la zona de campo; (**b**) la fuerza electomotriz inducida en la espira durante dicho intervalo de tiempo así como la corriente inducida en la misma, indicando su sentido. (**c**) Una vez se halla completamente en la región de campo magnético, ¿seguirá aumentando el flujo en la espira? ¿cuánto valdría, por tanto, en este caso la fuerza electromotriz inducida?
Sol.: (a) $\phi(t) = 1,5t$ mWb; (b) $\varepsilon = 1,5$ mV si $0 \leq t \leq 10$ s e $I = 1$ mA en sentido horario; (c) el flujo no varía y no hay fuerza electromotriz inducida.

4. Una barra metálica de longitud l se desplaza a velocidad $\vec{v}$ sobre dos varillas conductoras unidas por una resistencia R en sus extremos, formando el conjunto un circuito en forma de espira rectangular de tamaño variable. Dicha espira está inmersa en un campo magnetostático uniforme y perpendicular a la misma, $\vec{B} = -B\,\vec{\text{k}}$, según se muestra en la figura. Calcular el flujo en la espira, la fem inducida y la corriente inducida indicado su sentido.
Sol.: flujo hacia afuera del papel $\Phi = -Blx$, donde x es la coordenada de la barra; $\varepsilon = -d(-Blx)/dt = Bl(dx/dt) = Blv$; $I = \varepsilon/R = Blv/R$, en sentido contrario a agujas del reloj.

5. Según se vio al estudiar el campo magnético, sobre un tramo recto de circuito inmerso en un campo magnético uniforme se ejerce una fuerza dada por la expresión $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$. Teniendo esto en cuenta, calcular la fuerza magnética ejercida sobre la barra móvil del problema anterior así como la fuerza que debemos aplicar a dicha barra para que, junto a la fuerza magnética, se mueva a velocidad constante.
Sol.: El vector tramo será $\vec{l} = l\,\vec{\text{j}}$, e $I = Blv/R$, por tanto, $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B} = -IlB\,\vec{\text{i}} = -(vl^2B^2/R)\,\vec{\text{i}}$. Esta fuerza tiende a frenar la barra ya que se opone a su velocidad. Si queremos que la barra se mueva a velocidad constante, la fuerza total debe ser nula, esto es, debemos aplicar $\vec{F}_{\text{apl.}} = -\vec{F}_m = (vl^2B^2/R)\,\vec{\text{i}}$.

6. Un circuito de área variable está formado por una barra conductora de masa m que puede desplazarse sin rozamiento sobre dos raíles conductores separados una distancia $l = 1$ m y conectados entre sí por una resistencia $R = 10\ \Omega$, como muestra la figura. El conjunto se halla en un campo magnético uniforme de módulo $B = 1$ T dirigido hacia el lector. Si aplicamos una fuerza $\vec{F}_\mathrm{a} = 0,5N\ \vec{\mathrm{i}}$ la barra acaba realizando un movimiento uniforme a velocidad $\vec{v}$ (constante). Determinar: (**a**) la fuerza magnética, $\vec{F}_\mathrm{m}$, que actúa sobre la barra y la intensidad inducida en el circuito (indicando su sentido); (**b**) la fuerza electromotriz inducida y la velocidad de la barra.
Sol.: (a) $\vec{F}_m = -0,5\vec{\mathrm{i}}$ N, $I = 0,5$ A sentido horario; (b) 5 V, 5 m/s.

7. En la figura se muestra un campo magnético uniforme variable en el tiempo, $\vec{B}(t) = 0,5\exp(-t/0.1)\ \vec{\mathrm{k}}$ T (t en segundos). En el seno de dicho campo se ha dispuesto un circuito formado por un conductor en forma de U, que contiene una resistencia $R = 20\ \Omega$, y que junto con la barra conductora móvil AC, de longitud $l = 1$ m, forma una espira rectangular. Si la barra AC está en *reposo* en la posición $y = 1$ m, calcular: (**a**) el flujo magnético a través del circuito; (**b**) la fem inducida y la intensidad inducida indicando su sentido.
Sol.: (a) $\Phi(t) = 0,5\exp(-t/0.1)$ Wb; (b) $\mathcal{E}(t) = 5\exp(-t/0.1)$ V, $I(t) = 0,25\exp(-t/0.1)$ A en sentido antihorario.

8. Si la barra del ejercicio anterior partiese del reposo desde $y = 0$ y realizase un movimiento con aceleración de 6 m/s^2 mientras que el campo disminuye como en el ejercicio anterior, $\vec{B}(t) = 0.5\exp(-t/0.1)\ \vec{\mathrm{k}}$, calcular la intensidad inducida y encontrar el instante en que se anula para cambiar de sentido.
Sol.: $I(t) = 0.15(5t^2 - t)\exp(-t/0.1)$ A. En $t = 0,2$ s se anula y cambia de sentido horario a antihorario.

9. (*) Un conductor filiforme rectilíneo, de longitud infinita y circulado por una intensidad I, está dispuesto junto a una espira rectangular, según se indica en la figura. Determinar al flujo magnético que atraviesa la espira.
Sol.: Como el campo *no* es uniforme en la espira, es necesario integrar para calcular el flujo. Así, el flujo que atraviesa una franja rectangular infinitesimal de la espira de altura c y anchura dr será $d\Phi = B(r)dS$, donde
$B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$ y $dS = c\,dr$, siendo r la distancia de la franja al conductor rectilíneo.
Por tanto, $\Phi = \int d\Phi = \int_{r=a}^{a+b} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\, c\,dr = \dfrac{\mu_0 I c}{2\pi}\int_{r=a}^{a+b}\dfrac{dr}{r} = \dfrac{\mu_0 c I}{2\pi}\ln\left(\dfrac{a+b}{a}\right)$.

10. Un conductor rectilíneo de gran longitud está recorrido por una intensidad alterna $I(t) = 2\cos(10^6 t)$ A. Una bobina rectangular de 20 cm por 10 cm con 50 vueltas se ha colocado coplanaria con dicho conductor a distancia de 1 cm, según muestra la figura. Utilizando la expresión obtenida en el problema anterior, determinar el valor eficaz [1] de la fuerza electromotriz inducida que se mediría con un voltímetro entre los terminales de la bobina.
Sol.: $\sim 6,78$ V.

Autoinducción e inducción mutua

11. Determinar la fem inducida (valor absoluto) en una bobina de 10 H cuando: (**a**) la corriente por la bobina es de 25 mA en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 50 mA/s; (**b**) la corriente es cero en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 50 mA/s; (**c**) la corriente es de 125 mA en el instante inicial y disminuye con una rapidez de 50 mA/s; (**d**) la corriente es de 125 mA y no varía.
Sol.: (a), (b) y (c) se induce una fem de 0.5 V que se opone a la variación de la intensidad; (d) no se induce fem.

[1] En señales alternas de tensión o de intensidad del tipo $X(t) = A_0\cos(\omega t + \phi)$ o $X(t) = A_0\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$, donde $X(t)$ representa el voltaje o la intensidad, se denomina magnitud eficaz a $A_\mathrm{ef} = A_0/\sqrt{2}$. Los polímetros usados para medir tensiones e intensidades en alterna proporcionan como lectura la magnitud eficaz de la señal medida.

12. Dos solenoides esbeltos de igual longitud, l, son coaxiales y poseen un número total de espiras N_1 y N_2 respectivamente. Las áreas de sus secciones transversales son S_1 y S_2 respectivamente siendo $S_1 > S_2$, según se muestra en la figura. Determinar: (**a**) la expresión del coeficiente de autoinducción de los solenoides y (**b**) los coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} comprobando que son iguales.
Sol.: (a) $L_1 = \mu_0 N_1^2 S_1/l$ y $L_2 = \mu_0 N_2^2 S_2/l$; (b) $M_{21} = \Phi_{21}/I_1$ donde $\Phi_{21} = N_2 B_1 S_2$ siendo $B_1 = \mu_0 I_1 N_1/l$, luego $M_{21} = \mu_0 N_2 N_1 S_2/l$, y $M_{12} = \Phi_{12}/I_2$ donde $\Phi_{12} = N_1 B_2 S_2$ (nótese que la bobina pequeña sólo introduce flujo en una porción de S_1 de área S_2 ya que B_2 es cero fuera de la bobina pequeña, por este motivo aparece S_2 en vez de S_1 en Φ_{12}) siendo $B_2 = \mu_0 I_2 N_2/l$, luego $M_{12} = \mu_0 N_1 N_2 S_2/l$. Por tanto, $M_{21} = M_{12} = M = \mu_0 N_1 N_2 S_2/l$.

13. En la figura se muestra un solenoide esbelto de longitud l_1 y un total de N_1 espiras. Dentro del mismo y coaxial con él se ha dispuesto una bobina corta de radio R_2 y un total de N_2 espiras. Calcular: (**a**) el coeficiente de inducción mutua entre ambos bobinados; (**b**) la fem inducida en la bobina pequeña, $\varepsilon_2(t)$, si dicha bobina está en abierto [2] y por el solenoide esbelto circula una intensidad $I_1(t) = I_0\cos(\omega t)$. (**c**) ¿Cómo se transformarían los resultados de los apartados anteriores si el eje de la bobina pequeña formase un ángulo θ con el del solenoide?
Sol.: (a) $\Phi_{21} = N_2 B_1 S_2$ siendo $B_1 = \mu_0 N_1 l_1$, por tanto $M = M_{21} = \Phi_{21}/I_1 = \mu_0 \pi R_2^2 N_1 N_2/l_1$;
(b) $\varepsilon_2(t) = -d\Phi_2/dt = -d(L_2 I_2 + M I_1)/dt = M\omega I_0 \text{sen}(\omega t)$, ya que $I_2 = 0$ por estar abierta la bobina. (c) Los resultados anteriores se multiplican por el factor $\cos(\theta)$ que aparece al calcular el flujo que atraviesa la bobina interior.

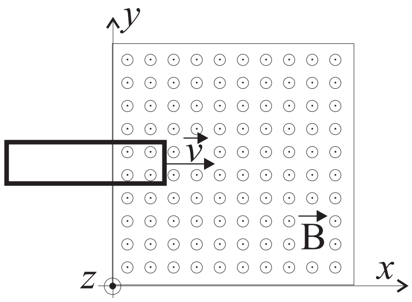
14. En la figura se ha representado un solenoide esbelto de longitud l_1 y área de sección transversal S_1, que posee un total de N_1 espiras. Por dicho solenoide circula un intensidad $I_1(t) = I_0\cos(\omega t)$. Rodeando dicho solenoide se ha colocado perpendicularmente al eje del mismo una bobina rectangular de N_2 espiras con sus extremos en abierto ($I_2 = 0$). Calcular: (**a**) el coeficiente de inducción mutua entre ambos bobinados; (**b**) la tensión eficaz, $V_{1\text{ef}}$, entre los extremos del solenoide así como la tensión eficaz, $V_{2\text{ef}}$, entre los bornes de la bobina rectangular. (c) ¿Cómo varían los resultados de los apartados anteriores si giramos la bobina rectangular de forma que la normal a la misma forme un ángulo θ con el eje del solenoide?
Sol.: (a) $M = \Phi_{21}/I_1 = B_1 N_2 S_1/I_1 = \mu_0 N_1 N_2 S_1/l_1$, nótese que sólo una porción de área de valor S_1 del total de la sección de la bobina rectangular es atravesada por líneas de B_1, por ese motivo aparece S_1 en la expresión de Φ_{21};
(b) $\varepsilon_1(t) = -d(L_1 I_1 + M I_2)/dt = L\omega I_0 \text{sen}(\omega t)$ y $V_{1\text{ef}} = L_1 \omega I_{1\text{ef}}$, donde $I_{1\text{ef}} = I_0/\sqrt{2}$ y siendo $L_1 = \mu_0 N_1^2 S_1/l_1$; $\varepsilon_2(t) = -d(L_2 I_2 + M I_1)/dt = M\omega I_0 \text{sen}(\omega t)$ y $V_{2\text{ef}} = M\omega I_{1\text{ef}}$. (c) Como el flujo que introduce el solenoide en la bobina rectangular no varía por ese giro, los resultados no cambian.

15. Como es sabido, al conectar un circuito compuesto por una bobina y resistencias a una fuente de continua, la intensidad en la bobina $I(t)$ no aumenta repentinamente debido a la fuerza electromotriz inducida en la misma. En concreto: $I(t) = I_\text{f}(1 - e^{-t/\tau})$, donde I_f es el valor final y τ un parámetro con dimensiones de tiempo que depende de L y de las resistencias presentes. Utilizando la expresión anterior de $I(t)$: (**a**) obtener la expresión $V(t)$ para la tensión en la bobina; (**b**) determinar el valor de t en el cual $I(t)$ ha alcanzado el 98% de I_f; (**c**) comprobar que en $t = 0$ la intensidad es nula y que cuando la intensidad alcanza su valor final la tensión es nula. ¿Qué puede concluirse respecto del comportamiento de una bobina en $t = 0$ y en el estado estacionario?
Sol.: (a) $V(t) = L I_\text{f} e^{-t/\tau}/\tau$; (b) $t = 3,912\tau \sim 4\tau$. (c) Se comporta como un circuito abierto en $t = 0$ y como un cortocircuito en estado estacionario.

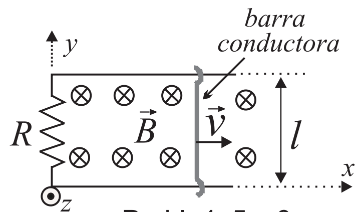
[2]Un bobina con sus extremos desconectados, esto es en abierto, se caracteriza por que no circula ninguna intensidad, lo que no impide que pueda inducirse una fuerza electromotriz en la misma.

16. Utilizando las conclusiones del apartado (c) del problema anterior, determinar: **(a)** la intensidad que atraviesa la batería del circuito en el instante $t = 0$ de conexión; (**b**) las intensidad por la batería cuando en la bobina se ha alcanzado el valor final de la intensidad (estado estacionario) y la energía acumulada en la bobina en esa situación.
Sol.: (a) $I = 0.15$ A; (b) 0.25 A y $125\ \mu$J.

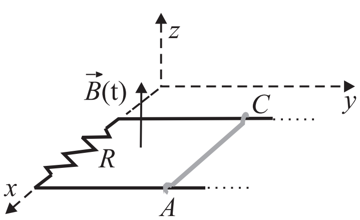
Figuras Bol. Tema 4



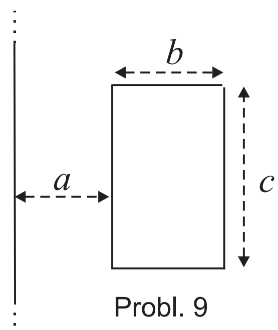
Probl. 3



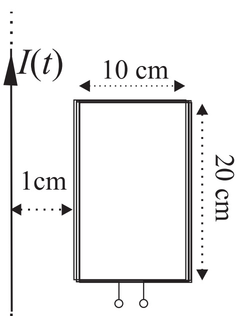
Probl. 4, 5 y 6



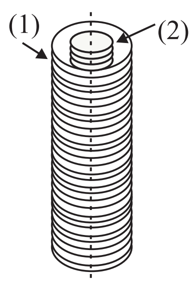
Probl. 7 y 8



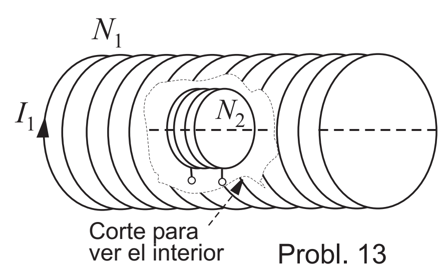
Probl. 9



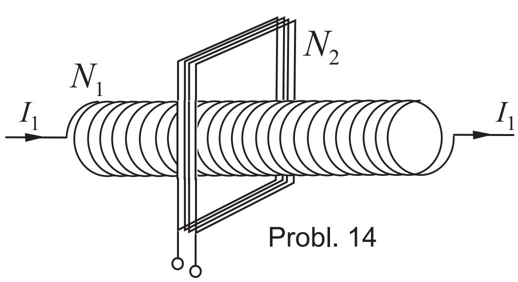
Probl. 10



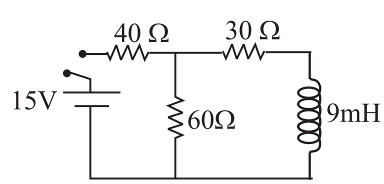
Prob. 12



Probl. 13



Probl. 14



Prob. 16