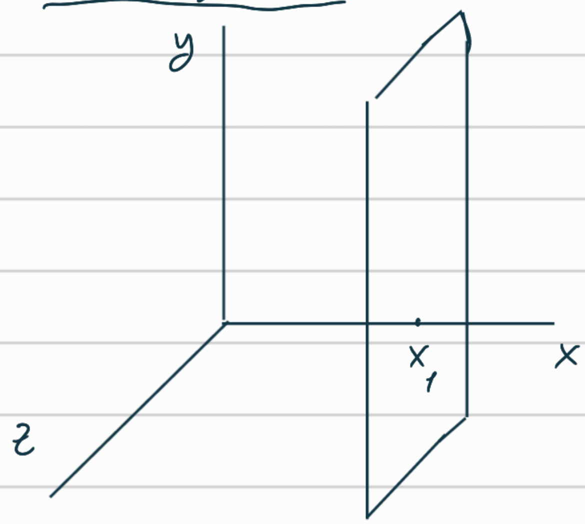
T6: Notas de clase:

Ondas planas



La ecuación de una onda que se propaga hacia la derecha en el eje x:

$$u = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0) \,. \quad (1)$$

tiene otro significado si la consideramos en el espacio en tres dimensiones, como se ve en la figura.

$x = x_1$ define un plano perpendicular al eje x y que pasa por x_0. Las coordenadas y y z pueden tomar cualquier valor.

Pero en ese plano, la fase de la onda (1): $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ toma el mismo valor $\varphi_1 = kx_1 - \omega t + \varphi_0$ (en el mismo tiempo t).
Es decir, el plano $x = x_1$ es un conjunto de puntos con la misma fase, que es la definición de frente de onda.

Luego $u = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ (1) describe una onda plana que se propaga en el sentido positivo del eje x.

Vamos a generalizarla, de la siguiente forma. Sea $\vec{k}$ el vector de ondas, de módulo $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, el número de ondas, y dirección y sentido el de propagación de la onda.

En (1) $\vec{k} = k\,\hat{\imath}$, $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, además $\vec{k}\cdot\vec{r} = kx$.
Escribimos

$$\boxed{u = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_0)} \quad (2).$$

Pero si cambiamos los ejes, (2) sigue siendo válida. Luego representa una onda plana, perpendicular a $\vec{k}$ y que se propaga en la dirección y sentido del vector de onda $\vec{k}$ (no confundir con el vector unitario $\hat{k}$.

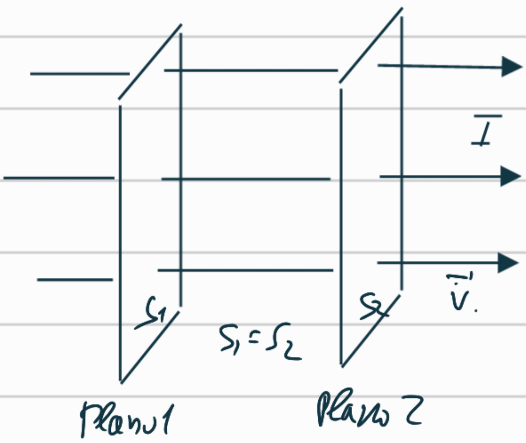
Por ejemplo, si la onda se propaga en el sentido negativo del eje y, $\vec{k} = -k\hat{j}$; $\vec{k}\cdot\vec{r} = -ky$ y

$$u = A\cos(-ky - \omega t + \varphi_0) = A\cos(ky + \omega t - \varphi_0),$$ que sabemos que es una onda que se propaga en el sentido negativo del eje Y. [El cambio de signo de φ_0 da igual, pues no lo conocemos]

Más en general, si $\vec{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k}$, $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ y $$u = A\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0).$$

Por ejemplo $u = A\cos(2x - 3y - \omega t + \varphi_0)$, tiene vector de onda $\vec{k} = (2,-3)\,m^{-1}$, se propaga en esa dirección ($\vec{k}$). Su número de ondas es $|\vec{k}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}\ m^{-1}$.

Ondas planas y potencia



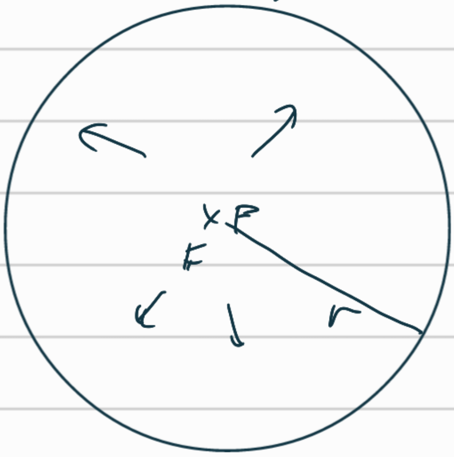
Si consideramos dos planos perpendiculares a la dirección de propagación, vemos que la misma potencia atraviesa los dos (imaginemos un fluido y el caudal, o m^3/s que atraviesa cada plano).

Luego $P_1 = P_2$. Como $I = \frac{P}{S}$ y $S_1 = S_2 \Rightarrow$ $I_1 = I_2$. $\boxed{I = cte \text{ en una onda plana}}$

Físicamente quiere decir que el foco está tan alejado que no hay diferencia apreciable en la intensidad en un pequeño desplazamiento. Por ejemplo, la radiación solar en el suelo o 2m sobre el suelo.

T6: Notas sobre potencia e intensidad

Ondas esféricas:



El foco F emite una potencia P que se expande en todas direcciones.

A una distancia r, P se ha distribuido sobre una superficie $S=4\pi r^2$ e $I=\frac{P}{S}$ es:

$\boxed{I=\frac{P}{4\pi r^2}}$, como $I\propto A^2 \Rightarrow A\propto\frac{1}{r}$.

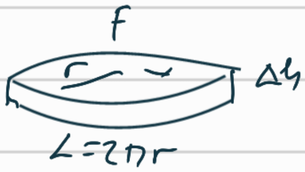
Una onda esférica tendrá como ecuación:

$$\boxed{u=\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t+\varphi_0)}$$,

donde $\varphi=kr-\omega t+\varphi_0$ no varía en los frentes de onda esféricos pues r tiene el mismo valor en cada superficie esférica.

Ondas cilíndricas o circulares

Son similares, pues una onda circular siempre tendrá una pequeña altura



La potencia se emite en el foco o en el eje y se distribuye por la superficie del cilindro $S=2\pi r\Delta h$

$I=\frac{P}{2\pi r\Delta h}$. Como $I\propto A^2\Rightarrow A\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$

y $\boxed{u=\frac{A_0}{\sqrt{r}}\cos(kr-\omega t+\varphi_0)}$

Ahora r tiene el significado de distancia al eje y no varía en un frente de onda.