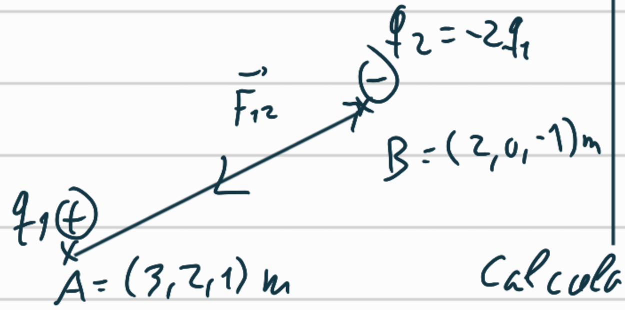
GRUPO 1 - PARCIAL 1 - 27/05/2021

1. Opción A Una carga puntual positiva q_1 se encuentra en el punto $A = (3,2,1)$ m y otra carga puntual $q_2 = -2q_1$ se encuentra en el punto $B = (2,0,-1)$ m. (**a**) Calcular el módulo F_{12} de la fuerza entre ambas cargas en dichas posiciones. (**b**) Calcular la fuerza $\vec{F}_{12}$ que q_1 ejerce sobre q_2 en dichas posiciones. (**c**) Si q_1 se mantiene fija y q_2 se desplaza hasta un punto C situado a 9 m de A, calcular el trabajo realizado por el campo creado por q_1 en dicho recorrido. **Nota** Dar los resultados en función de q_1 y la constante de Coulomb k_e y m (metro).
1.- Opción B Demuestre que el campo electrostático producido por una carga puntual es conservativo y obtenga la función potencial correspondiente.



a) F_{12} (módulo)

$$F_{12} = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} = k_e \frac{q_1\,|-2q_1|}{|\vec{AB}|^2}$$

Calculamos $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,0,-1) - (3,2,1)$ m

$\vec{AB} = (-1,-2,-2)$ m ; $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} \Rightarrow |\vec{AB}| = 3$ m

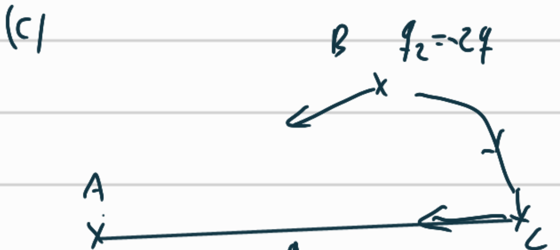
Sustituyendo: $F_{12} = k_e \frac{2q_1^2}{3^2 m^2} \Rightarrow \boxed{F_{12} = \frac{2}{9} k_e q_1^2\, m^{-2}}$

(b) Como ya conocemos el módulo y sabemos que la fuerza es atractiva al ser de diferente signo: $\vec{F}_{12} = -F_{12} \cdot \vec{u}_{12}$ siendo $\vec{u}_{12}$ el vector unitario del vector que va de q_1 en A a q_2 en B:

$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{3}(-1,-2,-2)$m , sustituyendo:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{2}{9} k_e q_1^2 m^{-2} \frac{1}{3}(-1,-2,-2) m \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = \frac{2}{27} k_e q_1^2 m^{-1} (1,2,2)}$$

(c)



$|\vec{AC}| = 9$m

$W_{AC} = q_2 (V(B) - V(C)) =$

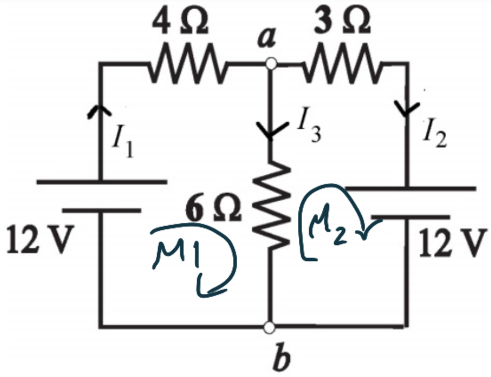
$= -2q_1 \left(k_e \frac{q_1}{|\vec{AB}|} - k_e \frac{q_1}{|\vec{AC}|} \right) =$

$= -2 k_e q_1^2 \left(\frac{1}{3m} - \frac{1}{9m} \right) = -2 \frac{k_e q_1^2}{m} \left(\frac{3-1}{9} \right)$

$\Rightarrow \boxed{W_{AC} = -\frac{4}{9} k_e q_1^2 m^{-1}}$

El signo $\ominus$ indica que en realidad otra fuerza realiza el trabajo y el campo eléctrico lo recibe. Esto es lógico, pues se aleja en contra de la fuerza atractiva, por lo que el campo no podría realizar ese trabajo.

2. En el circuito de la figura determinar (**a**) Escribir las reglas de Kirchhoff para las mallas y mudos. (**b**) La corriente en cada rama (**c**) Calcular $V_{ab} = V_a - V_b$ a traves de dos caminos diferentes; (**d**) La potencia consumida en la resistencia de 3 Ω; (**e**) La potencia producida en el generador de la derecha.



(a) RKI: $\sum I_i = 0$ [$+I_i$ si salen, $-I$ si entran]

Nudo a: $\boxed{I_3 + I_2 - I_1 = 0 \ (1)}$. Nudo b: $\boxed{I_1 - I_3 - I_2 = 0}$

Como vemos la segunda ecuación es la primera cambiada de signo y no se usa

RKV para las mallas: $\sum \xi_i = \sum I_i R_i$ [$+\xi_i, +I_i$ si van en el sentido de la malla; $-\xi_i, -I_i$ en caso contrario]

Tomamos ambas mallas en sentido horario:

Usamos V, Ω, A: M1: $\boxed{12 = 4I_1 + 6I_3}$

M2: $\boxed{-12 = 3I_2 - 6I_3}$

(b) Simplificamos las ecuaciones de mallas y sustituimos $I_3 = I_1 - I_2$ de (1) en ellas

$$\left.\begin{array}{ll} 6 = 2I_1 + 3I_3 & (2) \\ 4 = -I_2 + 2I_3 & (3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6 = 2I_1 + 3(I_1 - I_2) \\ 4 = -I_2 + 2(I_1 - I_2) \end{array} \left.\right\} \begin{array}{ll} 6 = 5I_1 - 3I_2 & (4) \\ 4 = 2I_1 - 3I_2 & (5) \end{array}$$

Restamos (4)−(5) $6 - 4 = 5I_1 - 2I_1$

$2 = 3I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2}{3}\,A}$ Sustituyendo en (5): $4 = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 3I_2 \Rightarrow 3I_2 = \frac{4}{3} - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4 - 4\times3}{3}\right) = \frac{1}{9}(-8) \Rightarrow \boxed{I_2 = -\frac{8}{9}\,A}$

Sustituyendo I_1 e I_2 en (1) $I_3 = I_1 - I_2 = \frac{2}{3} - \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{3\times2+8}{9} \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{14}{9}\,A}$

(c) Usamos RKV para un camino $V_{ab} = V_a - V_b = \sum R_i I_i - \left(\sum \xi_i\right)$ [+ si en el sentido del camino; − en caso contrario]

(c_1) Usamos el camino por el conductor central.

$V_{ab} = 6I_3 = 6\times\frac{14}{9} = \frac{2\times14}{3} = \frac{28}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3}\,V}$

(c_2) Usando el camino por la derecha

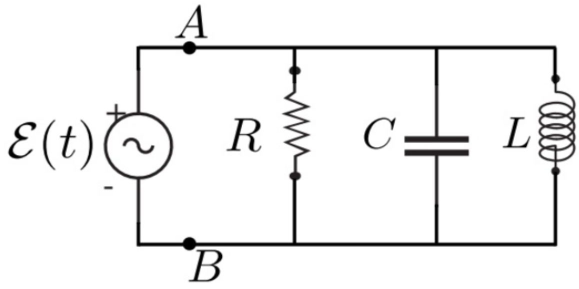
$V_{ab} = 3I_2 - (-12) = 12 + 3\left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{3\times12 - 8}{3} = \frac{36-8}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3}\,V}$

(c_3) Por la izquierda: $V_{ab} = -4I_1 - (-12) = 12 - 4\frac{2}{3} = \frac{36-8}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3}\,V}$

(d) $P_3 = R_3 I_2^2 = 3\times\left(\frac{8}{9}\right)^2 \Rightarrow \boxed{P_3 = 2{,}37\,W}$

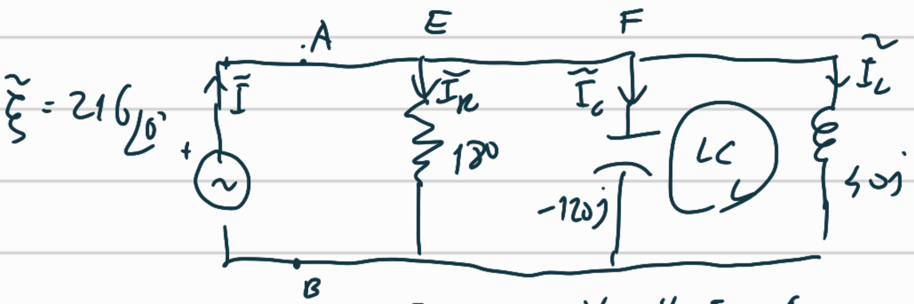
(e) I_2 en contra de ξ, luego consume $P = \xi I_2 = 12\left(-\frac{8}{9}\right) = 4\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{32}{3}$ negativa, luego produce $\boxed{P' = \frac{32}{3}\,W = 10{,}67\,W}$. o bien $I_3' = -I_3$ está a favor de ξ y produce $P' = \xi I_3' = 12\times\frac{8}{3}$

3. En el circuito de la figura, $\xi(t) = 216\cos(2000t)$ V, siendo $R = 180\Omega$; $\tilde{Z}_C = -120\mathrm{j}\Omega$ y $\tilde{Z}_L = 40\mathrm{j}\Omega$. Los fasores intensidad se definen hacia abajo salvo el que pasa por el generador, hacia arriba. Calcular: **(a)** los fasores de las intensidades que circulan por la resistencia y el condensador $\tilde{I}_R$ e $\tilde{I}_C$ **(b)** El fasor intensidad que pasa por la bobina $\tilde{I}_L$ usando la regla de Kirchhoff para la malla LC. **(c)** El fasor intensidad que pasa por el generador $\tilde{I}$ usando la regla de Kirchoff de nudos **(d)** la potencia media media consumida por cada elemento del circuito y la producida por el generador. **(e)** Representar en un diagrama fasorial las cuatro intensidades. Nota: puede obtener las magnitudes pedidas de otra forma, pero puntúan menos.



$\xi(t) = 216\cos(2000t)\,V \Rightarrow \tilde{\xi} = 216\,e^{j0}\,V = 216\,V$ y $\omega = 2000\,rad/s$

$R = 180\Omega$; $\tilde{Z}_C = -120j\Omega$; $\tilde{Z}_L = 40j\Omega$. El circuito queda:



Z_i en Ω, V en V, I en A

(a) $\tilde{I}_R$ e $\tilde{I}_C$:

$\tilde{I}_R = \frac{216}{180} \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_R = 1{,}2\,e^{j0}\,A}$

$\tilde{I}_C = \frac{216}{-120j} \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_C = 1{,}8j\,A = 1{,}8\,e^{j\pi/2}\,A}$

(b) $\tilde{I}_L$ usando RKV

Tomando sentido horario: $\sum \tilde{\xi}_i = \sum \tilde{Z}_i \tilde{I}_i$ (+ en el sentido de la malla; - en el sentido contrario)

No hay generadores: $(40j)\tilde{I}_L - (-120j)\tilde{I}_C = 0$

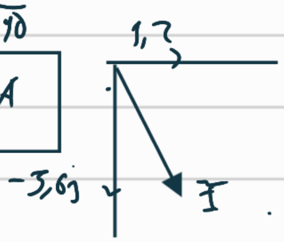
$\Rightarrow \tilde{I}_L = \frac{-120j\,\tilde{I}_C}{40j} = -3\tilde{I}_C = -3\times 1{,}8j \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_L = -5{,}4j\,A = 5{,}4\,e^{-j\pi/2}\,A}$

(c) EF es un solo nudo en el que entra $\tilde{I}$ y salen $\tilde{I}_R$, $\tilde{I}_C$ e $\tilde{I}_L$

$-\tilde{I} + \tilde{I}_R + \tilde{I}_L + \tilde{I}_C = 0 \Rightarrow \tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = 1{,}2 + 1{,}8j - 5{,}4j = 1{,}2 - 3{,}6j$

Calculamos su módulo y argumento: $|\tilde{I}| = \sqrt{1{,}2^2 + 3{,}6^2} = \sqrt{1{,}2^2(1+3^2)} = 1{,}2\sqrt{10}$

$tg\,\varphi = \frac{-3{,}6}{1{,}2} = -3 \Rightarrow \varphi = -71{,}56° \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 1{,}2 - 3{,}6j\,A = \underbrace{1{,}2\sqrt{10}}_{3{,}79}\,e^{-j71{,}56°}\,A}$



(d) L y C no consumen potencia, solamente R:

$P_R = \frac{1}{2} R I_{R0}^2 = \frac{1}{2}\,180 \times 1{,}2^2 \Rightarrow \boxed{P_R = 129{,}6\,W}$

La potencia producida en el generador es $P_g = \frac{1}{2}\xi_0 I_0 \cos(\varphi_\xi - \varphi_I) \Rightarrow$

$P_g = \frac{1}{2}\,216 \times \underbrace{1{,}2\sqrt{10}}_{I_0} \cos(0 - (-71{,}56°))$, o bien $I_0\cos(\varphi_I) = \mathrm{Re}(\tilde{I}) = 1{,}2$

$\Rightarrow P_g = \frac{1}{2}\,216 \times 1{,}2 \Rightarrow \boxed{P_g = 129{,}6\,W}$

(e) Diagrama fasorial de $\tilde{I}_i$: $\tilde{I} = 1,2 - 3,6j$; $\tilde{I}_R = 1,2$; $\tilde{I}_C = 1,8j$; $\tilde{I}_L = -5,5j$