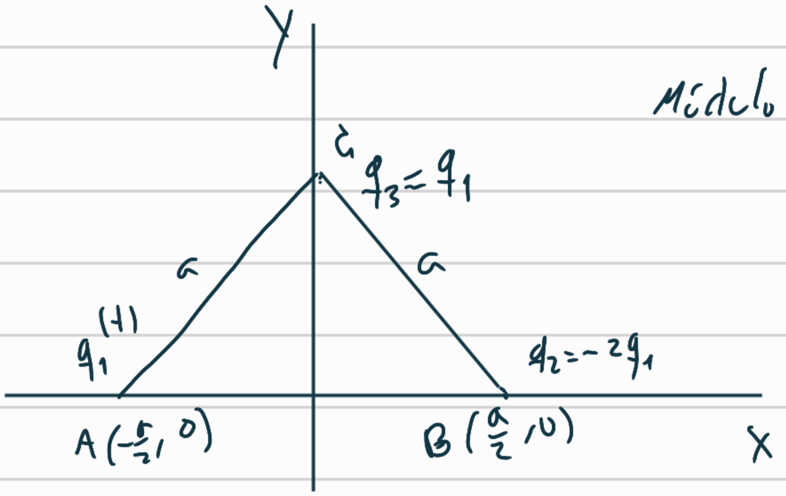
1. Opción A Tres cargas se encuentran en los vertices de un triángulo equilatero de lado a en el plano XY. q_1 en $A = (-a/2, 0)$, q_2 en $B = (a/2, 0)$ y q_3 en el vertice restante C que está sobre el semieje positivo Y. Si q_1 es positiva, $q_2 = -2q_1$ y $q_3 = q_1$, obtener **a**) El módulo del campo eléctrico en el punto C, (**b**) El vector fuerza eléctrica $\vec{F}_3$ sobre q_3 ejercida por q_1 y q_2. (**c**) El trabajo realizado por el campo electrostático si q_3 se desplaza al punto $D = (3a/2, 0)$. **Nota:** Dejar el resultado en función de la constante de Coulomb k_e, q_1 y a.

1.- Opción B Obtenga la energía electrostática de un condensador plano así como la densidad de energía del campo eléctrico en su interior.

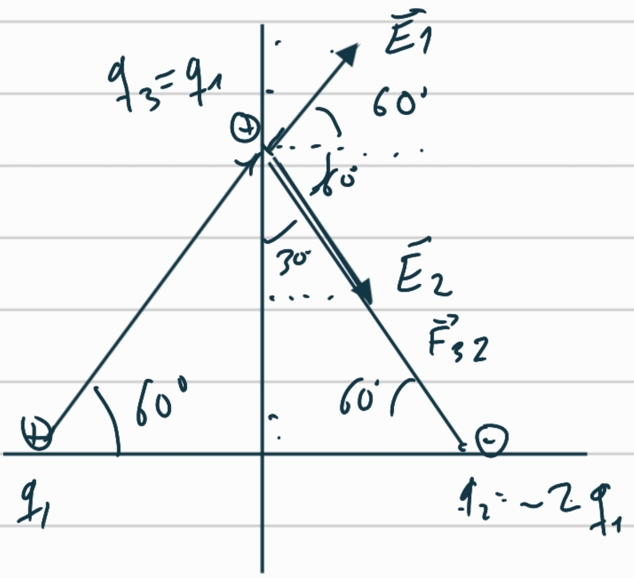


Módulo $E_1 = k_e\frac{|q_1|}{a^2}$; $E_2 = k_e\frac{|q_2|}{a^2} = 2k_e\frac{q_1}{a^2}$

Viendo la figura de abajo, vemos que las componentes y se restan y la x se suman. Usamos $E_2 = 2E_1$

$$\left.\begin{array}{l} E_x = E_1\cos 60 + E_2\cos 60 \\ E_y = E_1 \sin 60 - E_2 \sin(60) \end{array}\right\}$$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$, $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow$ $E_x = 3E_1\cos(60°) = 3E_1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}E_1 = \frac{3}{2}k_e\frac{q_1}{a^2}$

$E_y = -E_1\sin(60°) = -E_1\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}k_e\frac{q_1}{a^2}$

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4\times 3} = \sqrt{3} \Rightarrow$

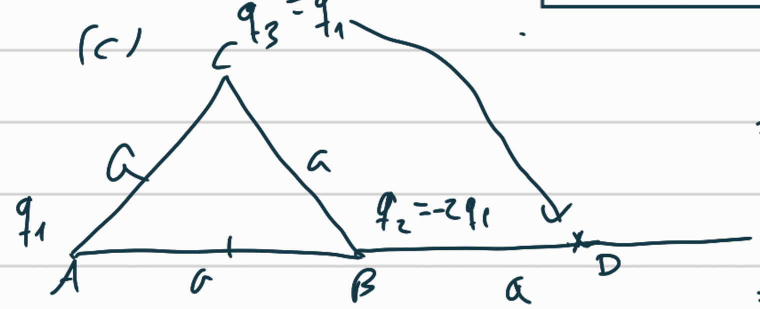
$E = E_1\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{3}\,k_e\frac{q_1}{a^2}}$

b) $\vec{F}_3 = q_3\vec{E} = q_1\vec{E}$

$\vec{F}_3 = q_1(E_x\vec{i} + E_y\vec{j}) = q_1\left(\frac{3}{2}E_1\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}E_1\vec{j}\right) \Rightarrow$

$q_1E_1 = k_e\frac{q_1^2}{a^2} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_3 = k_e\frac{q_1^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)}$

(c)



$\frac{3}{2}a = \frac{a}{2} + a$ $r_{AD} = 2a$; $r_{BD} = a$

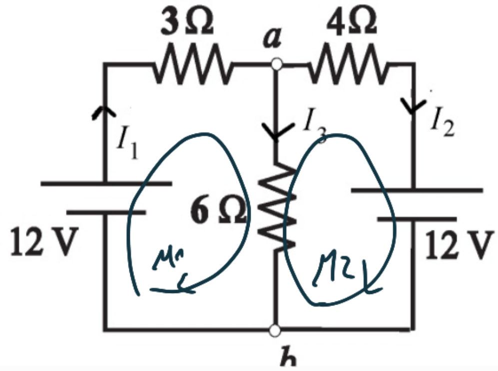
$W_{CD} = q_3(V(C) - V(D)) =$

$= q_3(V_1(C) + V_2(C) - V_1(D) - V_2(D)) =$

$= q_1\left(k_e\frac{q_1}{a} + k_e\frac{(-2q_1)}{a} - k_e\frac{q_1}{2a} - k_e\frac{(-2q_1)}{a}\right)$

$= k_e\frac{q_1^2}{a}\left[1 - 2 - \frac{1}{2} + 2\right] \Rightarrow \boxed{W_{CD} = \frac{1}{2}k_e\frac{q_1^2}{a}}$

2. En el circuito de la figura determinar (**a**) La corriente en cada rama (**b**) Calcular $V_{ab} = V_a - V_b$ a traves de dos caminos diferentes; (**b**) La potencia consumida en la resistencia de $3\,\Omega$; (**c**) La potencia producida en el generador de la derecha.



(a) RKI: $\sum I_i = 0$ [$+I_i$ si salen, $-I$ si entran]

Nudo a: $\boxed{I_3 + I_2 - I_1 = 0 \ (1)}$. Nudo b: $\boxed{I_1 - I_3 - I_2 = 0}$

Como vemos la segunda ecuación es la primera cambiada de signo y no se usa

RKV para las mallas: $\sum \xi_i = \sum I_i R_i$ [$+\xi_i, +I_i$ si van en el sentido de la malla; $-\xi_i, -I_i$ en caso contrario]

Tomamos ambas mallas en sentido horario:

Usamos V, Ω, A: M1: $\boxed{12 = 3 \cdot I_1 + 6 I_3}$

M2: $\boxed{-12 = 4 \cdot I_2 - 6 I_3}$

Simplificamos las ecuaciones de mallas y sustituimos $I_3 = I_1 - I_2$ de (1) en ellas

$4 = I_1 + 2 I_3$ (2) $\quad$ $4 = I_1 + 2(I_1 - I_2)$ $\quad$ $4 = 3I_1 - 2 I_2$ (4) $\quad$ Restamos (5) de (4)

$6 = -2I_2 + 3 I_3$ (3) $\quad$ $6 = -2I_2 + 3(I_1 - I_2)$ $\quad$ $6 = 3 I_1 - 5 I_2$ (5) $\quad$ $4 - 6 = 3 I_2 \Rightarrow$

$\boxed{I_2 = -\frac{2}{3} A = -\frac{6}{9} A}$ [-0,667] Sustituyendo en (4): $4 = 3 I_1 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 3 I_1 = 4 - \frac{4}{3}$

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{4\times3-4}{3}\right) = \frac{1}{9} 8 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{8}{9} A}$ [0,889]

Sustituyendo I_1 e I_2 en (1) $I_3 = I_1 - I_2 = \frac{8}{9} - \left(-\frac{6}{9}\right) \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{14}{9} A}$ [1,556]

(b) Usamos RKV para un camino $V_{ab} = V_a - V_b = \sum R_i I_i - \left(\sum \xi_i\right)$ [+ si en el sentido del camino; − en caso contrario]

(b1) Usamos el camino por el conductor central.

$V_{ab} = 6 I_3 = 6 \times \frac{14}{9} = \frac{2\times 14}{3} = \frac{28}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3} V}$ ($V_{ab} = 9,33V$)

(b2) Usando el camino por la derecha

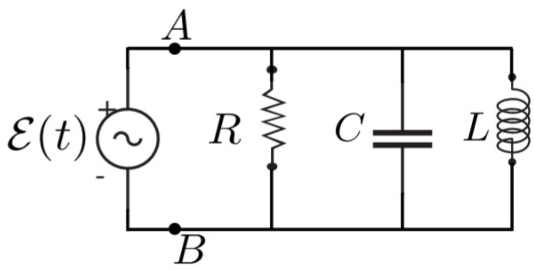
$V_{ab} = 4 I_2 - (-12) = 12 + 4\left(-\frac{6}{9}\right) = \frac{3\times12 - 4\times2}{3} = \frac{36-8}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3} V}$

(b3) Por la izquierda: $V_{ab} = -3 I_1 - (-12) = 12 - 3\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{36-8}{3} \Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{28}{3} V}$

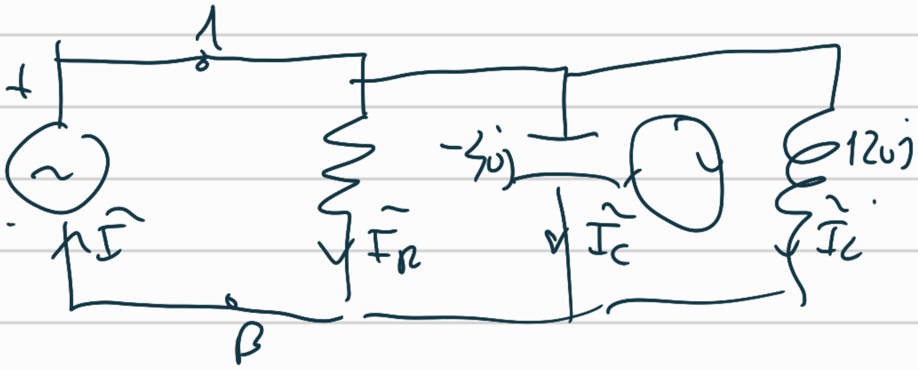
(c) $P_3 = R_3 I_1^2 = 3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \Rightarrow \boxed{P_3 = 2,37 W}$

(d) I_2 en contra de ξ, luego consume $P = \xi I_2 = 12\left(-\frac{2}{3}\right) = -8 W$. Es negativa, luego produce $\boxed{P' = 8W}$ o bien, definimos: $I_2' = -I_2$ Está a favor de ξ y produce $P' = \xi I_2' = 12\left(\frac{2}{3}\right) W$. c.q.d.

3. En el circuito de la figura, $\xi(t) = 216\cos(2000t)$ V, siendo $R = 180\,\Omega$; $\tilde{Z}_C = -40\mathrm{j}\,\Omega$ y $\tilde{Z}_L = 120\mathrm{j}\,\Omega$. Los fasores intensidad se definen hacia abajo salvo el que pasa por el generador, hacia arriba. Calcular: **(a)** los fasores de las intensidades que circulan por la resistencia y el condensador $\tilde{I}_R$ e $\tilde{I}_C$ **(b)** El fasor intensidad que pasa por la bobina $\tilde{I}_L$ usando la regla de Kirchhoff para la malla LC. **(c)** El fasor intensidad que pasa por el generador $\tilde{I}$ usando la regla de Kirchoff de nudos **(d)** la potencia media media consumida por cada elemento del circuito y la producida por el generador. **(e)** Representar en un diagrama fasorial las cuatro intensidades. Nota: puede obtener las magnitudes pedidas de otra forma, pero puntúan menos.



$\xi(t) = 216\cos(2000t)$ V $\Rightarrow \tilde{\xi} = 216$ V. $R = 180\,\Omega$; $\tilde{Z}_C = -50j\,\Omega$,
$\tilde{Z}_L = 120j\,\Omega$



$\tilde{I}_R = \frac{\tilde{\xi}}{R} = \frac{216}{180} \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_R = 1.2\angle 0^\circ}$

$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{Z}_C} = \frac{216}{-50j} \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_C = 5.5j\text{ A} = 5.5e^{j\pi/2}\text{ A}}$

RKV $\quad 120j\tilde{I}_L - (-50j)\tilde{I}_C = 0 \Rightarrow \tilde{I}_L = \frac{-50j}{120j}\tilde{I}_C = -\frac{1}{3}5.5j$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{I}_L = -1.8j\text{ A} = 1.8e^{-j\pi/2}\text{ A}}$

(c) Nudo A. $\quad -\tilde{I} + \tilde{I}_R + \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = 0 \Rightarrow \tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = 1.2 + 5.5j - 1.8j$

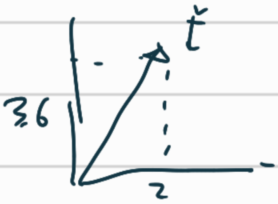
$\Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 1.2 + 3.6j\text{ A}}$ $\qquad I_0 = \sqrt{1.2^2 + 3.6^2} = 1.2\sqrt{1+3^2} = 1.2\sqrt{10}$ A

$\varphi = \operatorname{atg}\frac{3.6}{1.2} = \operatorname{atg} 3 = 71.56^\circ$

(d) En L y C $\quad P_m = 0$.

En R: $\quad P_R = \frac{1}{2}|\tilde{I}_R|^2 R = \frac{1}{2}1.2^2 \times 180 \Rightarrow \boxed{P_R = 129.6\text{ W}}$

generador $\quad P_{gen} = \frac{1}{2}\xi_0 I_0 \cos(\varphi) = \frac{1}{2}216 \times 1.2\sqrt{10}\cos(71.56^\circ) \simeq 129.65\ldots$ W

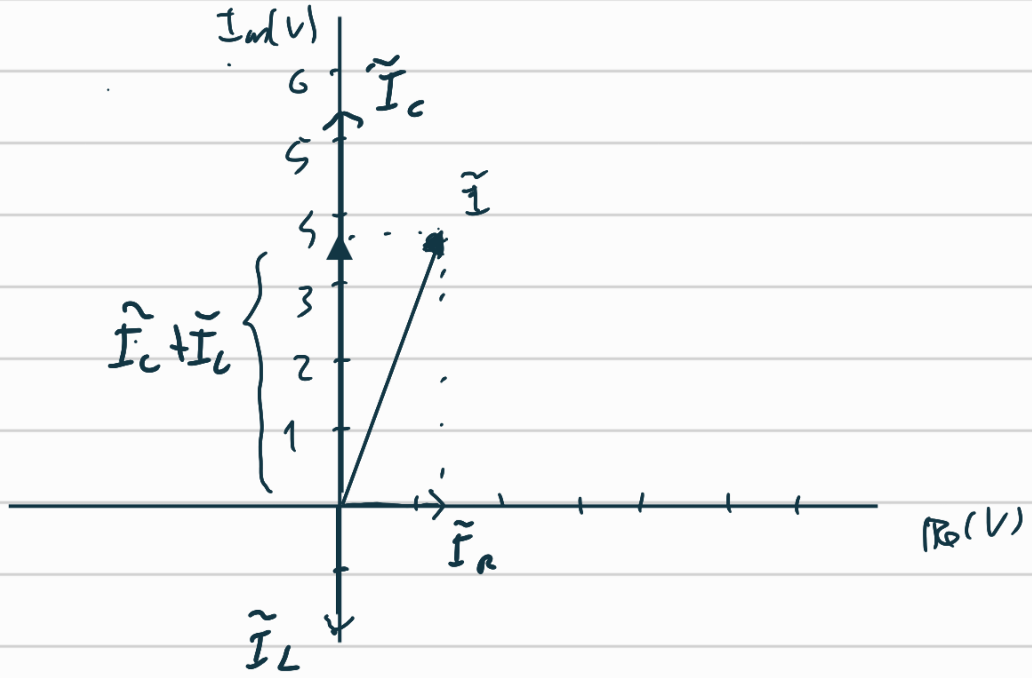


pero mejor $I_0\cos(\varphi)$ es la parte real de $\tilde{I}$ igual a 1.2

$\Rightarrow P_{gen} = \frac{1}{2}216 \times 1.2 \Rightarrow \boxed{P_{gen} = 129.6\text{ W}}$

De esta forma hemos eliminado los errores de redondeo $\sqrt{10}$, atan(3), cos(71.56°)...

(e) Diagrama fasorial $\tilde{I}$ $\quad \tilde{I} = 1.2 + 3.6j$; $I_R = 1.2$; $\tilde{I}_C = 5.4j$; $\tilde{I}_L = -1.8j$ (en A)



Nota: No es necesario, pero:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_{LC}} = \frac{1}{-40j} + \frac{1}{120j} = \frac{1}{40j}\left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{40j}\left(\frac{-3+1}{3}\right) = \frac{-2}{120j} = \frac{1}{-60j} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\tilde{Z}_{LC} = -60j\,\Omega}$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_{LC}} = \frac{1}{180} + \frac{1}{-60j} = \frac{1}{60}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{60}\left(\frac{1}{3} + j\right) = \frac{1}{60}\left(\frac{1+3j}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{Z} = \frac{180}{1+3j}\,\frac{(1-3j)}{(1-3j)} = \frac{180(1-3j)}{\underbrace{1^2+3^2}_{10}} = 18(1-3j) \Rightarrow \underline{\tilde{Z} = 18 - 54j\,\Omega}$$

Podemos calcular $\tilde{I}$ también como $\tilde{I} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}} = \frac{216}{18(1-3j)}\,\frac{(1+3j)}{(1+3j)}$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{12(1+3j)}{\underbrace{1^2+3^2}_{10}} = 1{,}2(1+3j) \Rightarrow \underline{\tilde{I} = 1{,}2 + 3{,}6j\ A}$$