Teoría del primer parcial, Física 2

¿Cómo hacer una pregunta de teoría?
- Explicar de qué se parte.
- Explicar qué se va a hacer
- Hacer un dibujo grande con todas las magnitudes implicadas
- Explicar qué se hace - Comentar el resultado.

GRUPO 1

1.- Opción B Demuestre que el campo electrostático producido por una carga puntual es conservativo y obtenga la función potencial correspondiente.

Una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza entre dos puntos no depende del camino. Si una fuerza $\vec{F}$ es conservativa existe una función de punto, llamada energía potencial $U = U(P)$ tal que

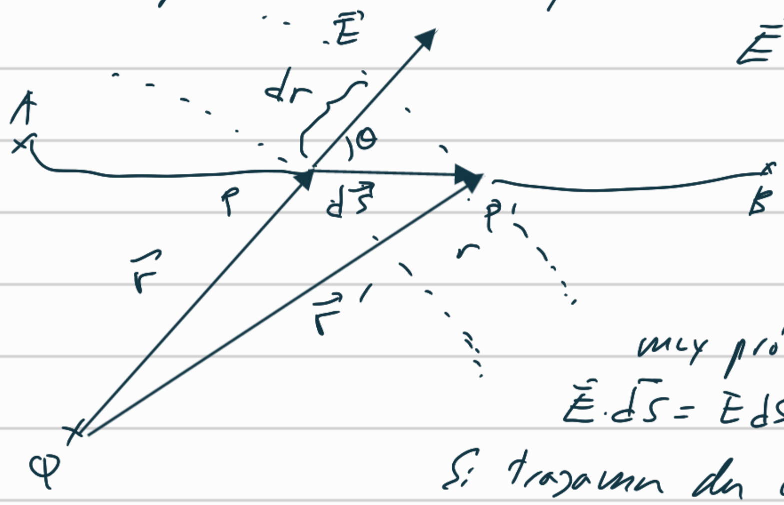
$$U(A) - U(B) = W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

Para el campo eléctrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, definimos el potencial electrostático como $V = \frac{W}{q}$. Dividiendo (1) entre q, queda

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (2),$$ que es lo que vamos a demostrar.

Sea φ una carga en el origen de coordenadas, sabemos que el campo eléctrico en un punto P de vector de posición $\vec{r}$ viene dado por

$$\vec{E} = k_e \frac{\varphi}{r^2} \hat{r} \quad \text{con} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$



Sea $\vec{ds}$ el desplazamiento elemental entre dos puntos muy próximos P y P (con vector de posición $\vec{r}'$)

$$\vec{E} \cdot \vec{ds} = E\, ds \cos\theta$$

Si trazamos dos circunferencias centradas en φ extremos en P y P', tienen radios $r = |\vec{r}|$ y $r + dr = |\vec{r}'|$

Como $|\vec{r}|$ y $|\vec{r}'|$ son muy grandes respecto a $|\vec{ds}|$, la circunferencia de radio $|\vec{r}'|$ es casi una recta perpendicular a $\vec{E}$ cerca de P' y P. Luego

$$dr = |\vec{ds}| \cos\theta \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{ds} = E\, dr$$ y

$$\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = \int_A^B E\, dr = \int_A^B k_e \frac{q}{r^2}\, dr = k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k_e q \left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = k_e \frac{q}{r_A} - k_e \frac{q}{r_B} \quad (3)$$

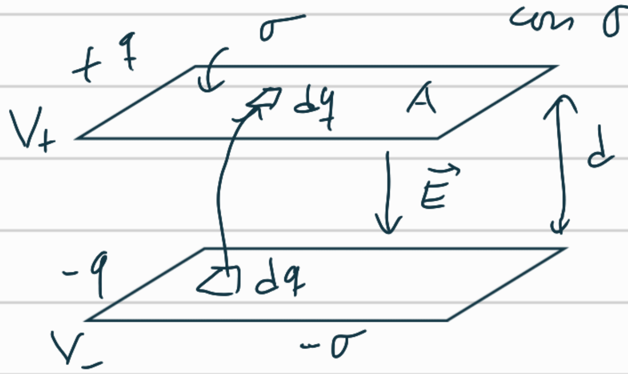
Como $\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$ no depende del camino, $\vec{E}$ es conservativo. Comparando con (2), vemos que $\boxed{V = k_e \frac{q}{r} + c}$, c es una constante arbitraria. Usualmente se define $V(\infty) = 0 \Rightarrow c = 0$ y $V = k_e \frac{q}{r}$. Cualquier c es válida pues se simplifica al restar potenciales.

GRUPO 2

1.- Opción B Obtenga la energía electrostática de un condensador plano así como la densidad de energía del campo eléctrico en su interior.

Propiedades del condensador plano que vamos a usar.

Un condensador plano ideal, se caracteriza en que la distancia entre placas es pequeña respecto a las dimensiones de de las placas. Su capacidad vale $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ en el vacío, siendo A el área de las placas. Además, el campo eléctrico en su interior es uniforme, perpendicular a las placas y de valor $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, con $\sigma = \frac{q}{A}$. La diferencia de potencial entre placas $\Delta V = V_+ - V_- = E d$, pues "$d$" es el desplazamiento en la dirección de $\vec{E}$ y $V_+ > V_-$.



Si q es el valor de la carga (+) del condensador $q = C \Delta V$.

Energía del condensador cargado

El proceso de carga consiste en llevar una carga muy pequeña positiva dq de la placa negativa a la positiva. Muy pequeña, para que ΔV no varíe durante el traslado.

La energía potencial de dq en el punto inicial es $V_- dq$ y en el final $V_+ dq$. Hay que realizar un trabajo:

$$dW = V_+ dq - V_- dq = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

Integrando, desde $q = 0$ a $q = Q$, obtenemos la energía U

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

Densidad de energía del campo eléctrico

Si dividimos $\mathcal{U}$ entre el volumen $\tau = Ad$ obtenemos la densidad de energía. Operamos para expresar $\mathcal{U}$ en función de E y dividimos.

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma A)^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2}\frac{(\epsilon_0 E A)^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0^2 E^2 A^2}{\epsilon_0 A} d = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A d$$

Dividiendo $\rho_E = \frac{\mathcal{U}}{\tau} = \frac{\mathcal{U}}{Ad} \Rightarrow \boxed{\rho_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$, que nos

da la densidad de energía del campo eléctrico y tiene validez general, aunque se haya deducido en un caso particular.