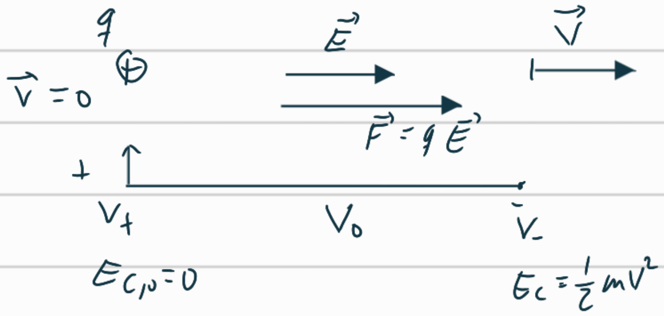
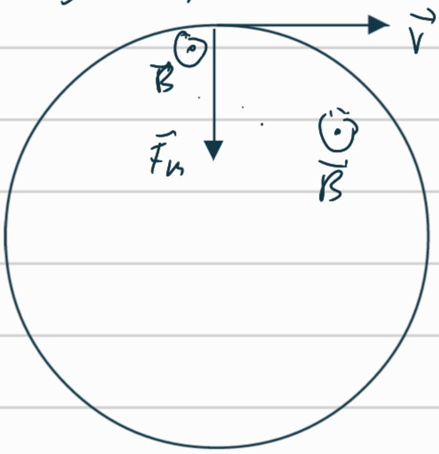
GRUPO 1. PARCIAL 2. FÍSICA 2. 28/05/2021

1. Una partícula de carga q y masa m que parte del reposo se acelera en un campo eléctrico mediante un potencial acelerador V_0 (diferencia de potencial entre el punto inicial y final del proceso de aceleración). Tras dicho proceso entra en un campo magnético uniforme de módulo B perpendicular a su trayectoria donde describen una circunferencia de radio R. (a) Determinar la expresión de la razón carga/masa (q/m) de la partícula en función de V_0, R y B. (b) Determinar el cambio en el periodo con que recorre la orbita si V_0, se duplica.



Suponemos que la carga es positiva en el dibujo, aunque no es relevante para el problema. La carga recibe un trabajo $W = q(V_+ - V_-) = qV_0$ que por el teorema del trabajo es igual a un aumento de energía cinética $E_c - \underbrace{E_{c,0}}_{0} = qV_0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 = qV_0$ o $V = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$ (1)

Supongamos que $\vec{B}$ va hacia fuera del papel.



La fuerza magnética es la fuerza normal

$\vec{F}_m = \vec{F}_n \Rightarrow F_m = F_n \Rightarrow |q\vec{v}\times\vec{B}| = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow$

$qvB\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow qB = m\frac{V}{R} \Rightarrow R = \frac{mV}{qB}$ (2)

como hemos visto en teoría. Despejamos $\frac{q}{m}$ y sustituimos (1):

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{RB}v = \frac{1}{RB}\sqrt{\frac{2qV_0}{m}} = \frac{1}{RB}\sqrt{\frac{q}{m}}\sqrt{2V_0} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{q}{m}} = \frac{1}{RB}\sqrt{2V_0} \Rightarrow \boxed{\frac{q}{m} = \frac{2V_0}{R^2B^2}} \quad (3)$$

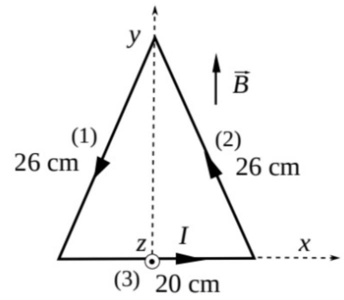
(b) De (2) obtenemos el periodo de rotación

$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{v}\left(\frac{mV}{qB}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$. T no depende de v y por lo tanto no depende de $E_c = qV_0$.

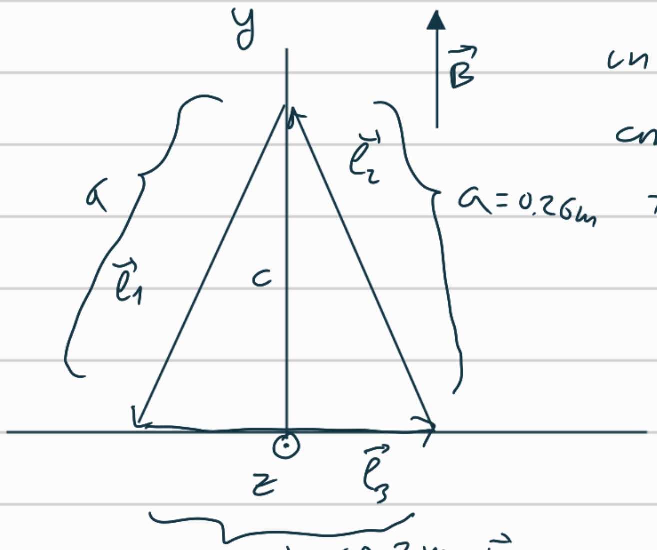
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{T no varía al cambiar } V_0}$

Si la carga q fuese negativa, (3) cambiaría a $\frac{|q|}{m} = \frac{2V_0}{R^2B^2}$

2. La espira de la figura, con forma de triángulo isósceles, está circulada por una intensidad $I = 2\,\mathrm{A}$ y se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{B} = 0.4\,\hat{\jmath}\,\mathrm{T}$. La longitud de cada lado se indica en la figura. (a) Determinar la fuerza (vector) debida al campo magnético sobre cada lado. (b) El (vector)momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ de la espira. (c) El (vector) momento de fuerzas $\vec{\tau}$ que actua sobre la espira. Nota: use magnitudes simbólicas antes de operar para que el cálculo sea mucho más sencillo.



Llamamos $a = 26\,\mathrm{cm} = 0.26\,\mathrm{m}$, $b = 20\,\mathrm{cm} = 0.2\,\mathrm{m}$ y c a la altura de triángulo



Como la fuerza sobre un conductor recto en un campo magnético uniforme es $\vec{F}_m = I\vec{\ell}\times\vec{B}$ (1) con $\vec{\ell}$ en el sentido de la intensidad, tenemos tres conductores de vector $\vec{\ell}$:

$$\vec{\ell}_3 = b\,\vec{i}\,,\quad \vec{\ell}_2 = -\frac{b}{2}\vec{i} + c\,\vec{j}$$
$$\vec{\ell}_1 = -\frac{b}{2}\vec{i} - c\,\vec{j}$$

$\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 = 0$, como debe ser.

$\left(\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \quad \vec{k}\ \vec{j}\ \vec{i}\right)$

Usamos (1) para obtener las tres fuerzas.

$$\vec{F}_3 = I\,b\,\vec{i}\times B\vec{j} = IbB\,\vec{k} \quad (2)$$
$$\vec{F}_1 = I\left(-\frac{b}{2}\vec{i} + c\vec{j}\right)\times B\vec{j} = -I\frac{b}{2}B\,\vec{k} \quad (3)$$
$$\vec{F}_2 = I\left(-\frac{b}{2}\vec{i} - c\vec{j}\right)\times B\vec{j} = -I\frac{b}{2}B\,\vec{k} \quad (4)$$

Vemos que $\vec{F}_3 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, como sabemos y que $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -\frac{\vec{F}_3}{2}$ (5)

Numéricamente $\vec{F}_3 = 2\,\mathrm{A}\times 0.2\times 0.4\,\mathrm{T}\,\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_3 = 0.16\,\mathrm{N}\,\vec{k}}$

Usando (5): $\boxed{\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -0.08\,\mathrm{N}\,\vec{k}}$

(b) $\vec{\mu} = I\vec{A}$, con $\vec{A}\perp$ espira, A: área de la espira y sentido, la regla de Maxwell o de la mano derecha relacionándolo con la intensidad, que es antihorario.

Luego $\vec{\mu} = IA\,\vec{k}$

Además, $c = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,\mathrm{cm} = 0.24\,\mathrm{m} \Rightarrow A = \frac{bc}{2} \Rightarrow$

$A = \frac{1}{2}\,0.2\times 0.24 = 0.024\,\mathrm{m}^2$;

$\mu = IA = 2\times 0.024 = 0.048\,\mathrm{Am}^2$

$\boxed{\vec{\mu} = 0.048\,\vec{k}\,\mathrm{Am}^2}$

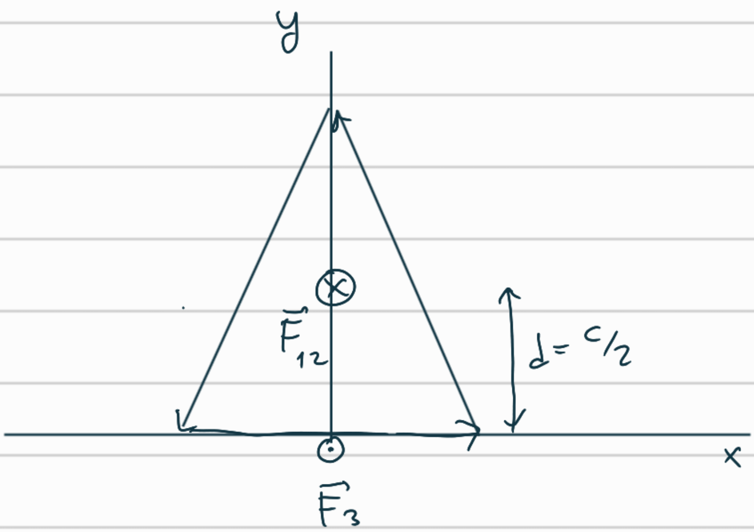
(c) El momento de fuerzas sobre una espira es $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = \mu\vec{k}\times B\vec{j} \Rightarrow$

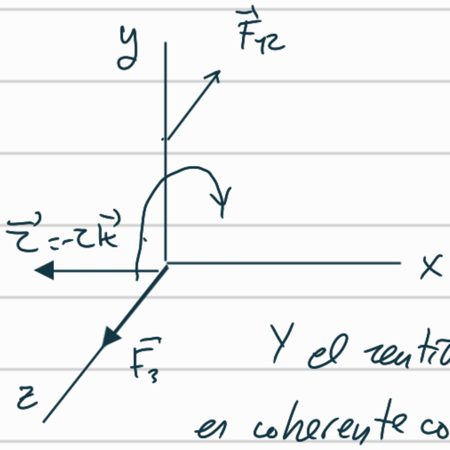
$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = 0.048\,\vec{k}\times 0.4\,\vec{j} = -0.019\,\vec{i}$

$\boxed{\vec{\tau} = -0.019\,\vec{i}\,\mathrm{N\cdot m}}$

También se puede calcular directamente. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ actúan sobre los puntos medios de sus lados y equivalen a una fuerza $\vec{F}_{12} = 2\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ aplicada en el punto medio. Luego, el par de fuerzas tiene momento

$$\tau = |F_3| \frac{c}{2} = I b B \frac{c}{2} = I \frac{bc}{2} B = I A B = \mu B$$

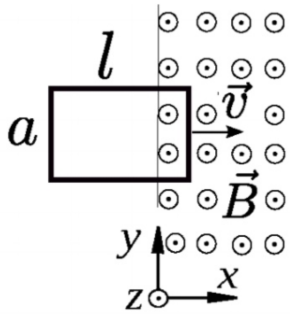


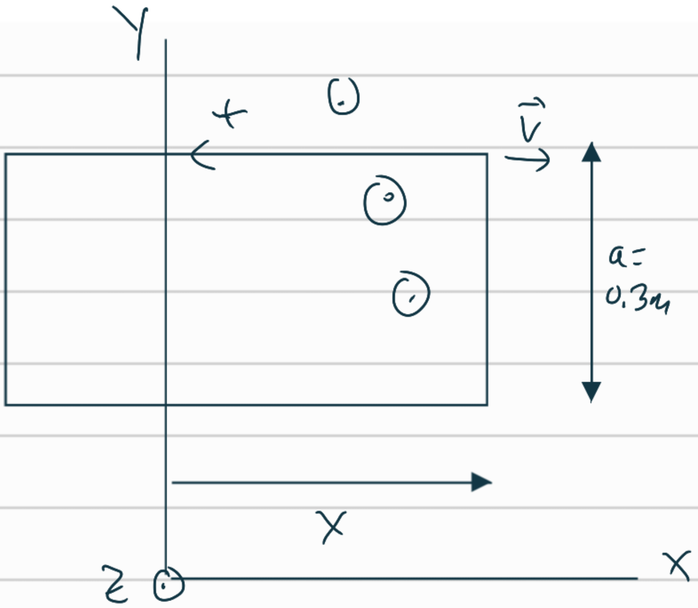


Y el sentido de giro es coherente con $\vec{\tau} = -\tau\vec{k}$

c.q.d.

3. Una espira rectangular conductora de dimensiones $a = 0.3\,\mathrm{m}$ y $l = 0.4\,\mathrm{m}$ penetra a velocidad constante $\vec{v} = 0.2\,\hat{\imath}\,\mathrm{m/s}$ en una región donde existe un campo magnético uniforme de valor $\vec{B} = 0.6\,\hat{k}\,\mathrm{T}$. Sabiendo que empieza a entrar en $t = 0\,\mathrm{s}$. Determinar durante el proceso de entrada de la espira en el campo: (**a**) El flujo magnético que atraviesa la espira; (**b**) La fuerza electromotriz inducida en la espira (en valor absoluto) $|\xi|$; (**c**) El sentido de la corriente inducida;





En los ejes indicados, la coordenada x del conductor vertical que entra nos permite calcular el área introducida en la zona con campo magnético

$$A = a x$$

Elegimos $\vec{A} = A\vec{k}$, que define el sentido antihorario ($\vec{A}$ ⊙) sobre la espira. Como $\vec{B}$ es uniforme en $x > 0$.

$\phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos(0^\circ) \Rightarrow \phi_B = Bax$

Y la f.e.m. inducida, por la ley de Faraday $\xi = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} \Rightarrow$

$\xi = -Bav$, sustituyendo $x = vt$ y los valores numéricos:

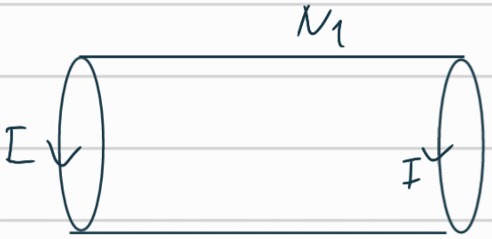
$\phi_B = Bavt = 0.6\,T \times 0.3\,m \times 0.2\,m/s\; t \Rightarrow \boxed{\phi_B = 36\times10^{-3}\,\frac{Wb}{s}\,t}$ (a)

y $|\xi| = Bav \Rightarrow \boxed{|\xi| = 36\times10^{-3}\,V}$ (b)

(c) Obtuvimos $\xi_i = -Bav$, como el sentido positivo es el antihorario, $\boxed{\xi_i \text{ e } I_i \text{ tienen sentido horario}}$

Lo comprobamos con la ley de Lenz: ϕ_B hacia afuera ⊙ aumenta, luego, I_i creará un campo magnético inducido $\vec{B}_i$ que se opone, es decir hacia dentro $\vec{B}_i$ ⊗, por la regla de Maxwell, la I_i que lo produce ($\vec{B}_i$ ⊗) I_i tiene sentido horario, c.q.d.

4. (**a**) Se dispone de un solenoide (1) esbelto (ideal) que posee $N_1 = 1500$ espiras y cuyo coeficiente de autoinducción es $L_1 = 3\,\text{mH}$. Se hace circular circular por el mismo una corriente $I_1(t) = 0.5\,t^2\,\text{A}$ (t en segundos), determinar en el instante $t = 2\,\text{s}$ (**a**) El flujo magnético que atraviesa el solenoide. (**b**) La fuerza electromotriz (en valor absoluto), $|\xi|$, inducida en el mismo. (**c**) Se introduce ahora un segundo solenoide (2) de igual longitud y número de vueltas que el solenoide (1) en el interior de este (sin que sobresalga). Si el radio del solenoide (2) es la mitad que el del solenoide (1), esto es $R_2 = R_1/2$, determinar el coeficiente de inducción mutua, M, entre ambos solenoides.



$L_1 = 3\,\text{mH}$; $I(t) = 0.5\,\frac{\text{A}}{\text{s}^2}\,t^2$

$t = 2\,\text{s}$

(a) Por definición de L:

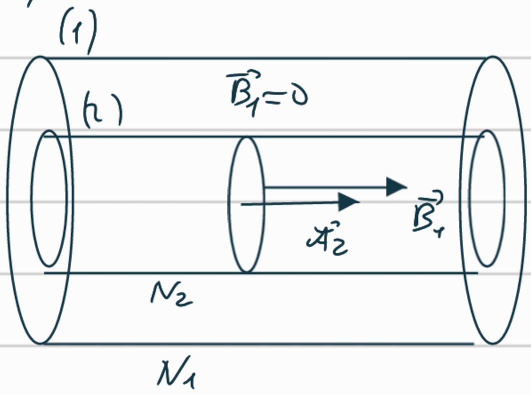
$\phi_B = \phi_{11} = L I_1 \Rightarrow \phi_B = 3\times10^{-3}\,\text{H}\times 0.5\,\frac{\text{A}}{\text{s}^2}\,t^2$

$\Rightarrow \boxed{\phi_B = 1.5\times10^{-3}\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}^2}\,t^2}$ En $t = 2\,\text{s}$: $\phi(2\,\text{s}) = 1.5\times10^{-3}\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}^2}\,2^2\,\text{s}^2 \Rightarrow \boxed{\phi = 6\,\text{mWb}}$

(b) $\xi_i = \xi_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ $\left(\text{o } -\frac{d\phi_B}{dt}\right) \Rightarrow \xi_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -1.5\times10^{-3}(2t)\,\frac{\text{V}}{\text{s}}$

$\Rightarrow \boxed{|\xi_i| = 3\,\frac{\text{mV}}{\text{s}}\,t}$ y en $t = 2\,\text{s} \Rightarrow \boxed{|\xi_i| = 6\,\text{mV}}$

(c)



$N_2 = N_1$, $l_2 = l_1$; $R_2 = \frac{R_1}{2} \Rightarrow$

$S_2 = \pi R_2^2 = \pi\left(\frac{R_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi R_1^2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4} S_1$

Calculamos ϕ_{21}, para obtener $M = M_{21}$ usando $\phi_{21} = M I_1$, aunque M_{12} es igualmente posible

$\phi_{21} = N_2 \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}$, como $\vec{B}_1$ es uniforme en A_2 y $B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1$, $N_2 = N_1$

$\phi_{21} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{A}_2 = N_2 B_1 A_2 \cos(0°) = N_2 \mu_0 n_1 I_1 A_2 \Rightarrow$

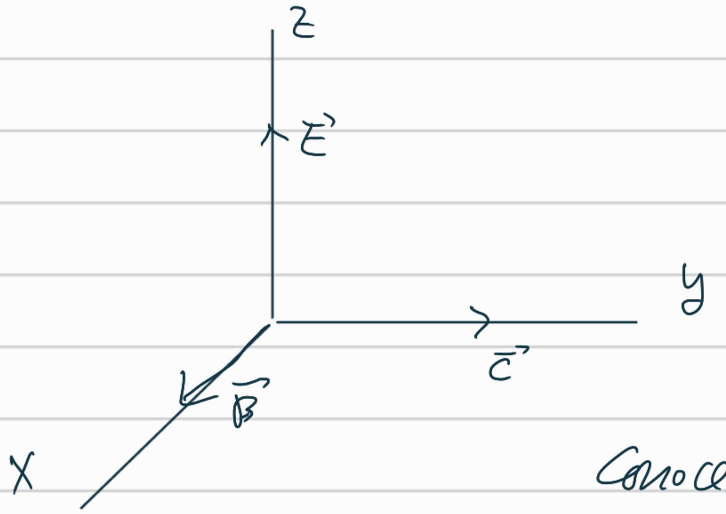
$\phi_{21} = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} A_2 I_1$ y $M = \frac{\phi_{21}}{I_1} \Rightarrow M = \mu_0 \cdot \frac{N_1^2}{l_1} A_2$ (1)

Por otro lado, sabemos que $L_1 = 3\,\text{mH}$ y $L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l_1} A_1$ (2)

Dividiendo $\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{M}{L_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow M = \frac{1}{4} L_1 = \frac{1}{4}\,3\,\text{mH} \Rightarrow$

$\boxed{M = \frac{3}{4}\,\text{mH} = 0.75\,\text{mH}}$

5. Una onda electromagnética de longitud de onda 25 cm se propaga en sentido positivo del eje y de forma que su campo magnético oscila en la dirección del eje x siendo su amplitud de 40 nT. Determinar: (**a**) las expresiones completas de los vectores campo eléctrico y magnético de la onda; (**b**) la potencia, P, que incide sobre una superficie circular de área A=0.2 m^2 perpendicular al eje y.



Elegimos en $t=0$, $x=0$, $\vec B = B\vec i$ con forma coseno:

$$\vec B = B_0 \cos(ky - \omega t)\,\vec i \quad (1)$$

Como $\vec B \times \vec c = \vec E$ (B por c da E),

$$\vec E = B\vec i \times c\vec j = Bc\,\vec k \quad \uparrow\uparrow z \Rightarrow$$

$$\vec E = E_0 \cos(ky - \omega t)\,\vec k \quad (2)$$

Conocemos $B_0 = 50\,\text{nT}$, $\lambda = 0{,}25\,\text{m}$, $c = 3\times10^8\,\text{m/s}$,

calculamos E_0, k y ω:

$$E_0 = B_0 c = 50\times10^{-9}\,\text{T}\times3\times10^8\,\text{m/s} = 120\times10^{-1}\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \Rightarrow \underline{E_0 = 12\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8\,\text{m/s}}{0.25\,\text{m}} \Rightarrow f = 12\times10^8\,\text{s}^{-1} \Rightarrow f = 1{,}2\times10^9\,\text{Hz}$$

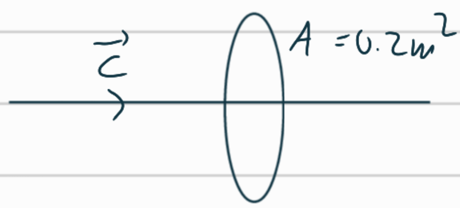
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2.4\times10^9\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.25\,\text{m}} \Rightarrow k = 8\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Sustituyendo en (1) y (2):

$$\boxed{\begin{aligned}\vec B &= 50\,\text{nT}\cos\left(8\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}\,y - 2{,}4\times10^9\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,t\right)\vec i\\ \vec E &= 12\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\cos\left(8\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}\cdot y - 2{,}4\times10^9\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,t\right)\vec k\end{aligned}}$$

(b)



Como A es perpendicular a la dirección de propagación:

$P = IA$, calculamos I.

$$I = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0 = \frac{1}{2\times4\pi\times10^{-7}}\,12\times50\times10^{-9}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{60}{\pi}\times10^{-2}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{0.6}{\pi}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0.191\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$P = IA = \frac{0.6}{\pi}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\,0.2\,\text{m}^2 = \frac{0.12}{\pi}\,\text{W} \Rightarrow \boxed{P = \frac{0.12}{\pi}\,\text{W} = 38.2\,\text{mW}}$$