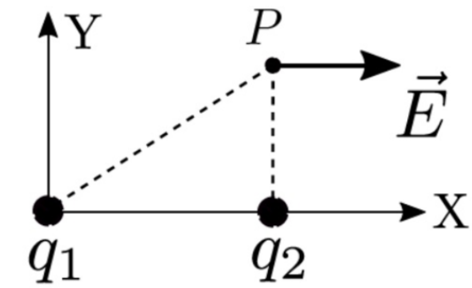
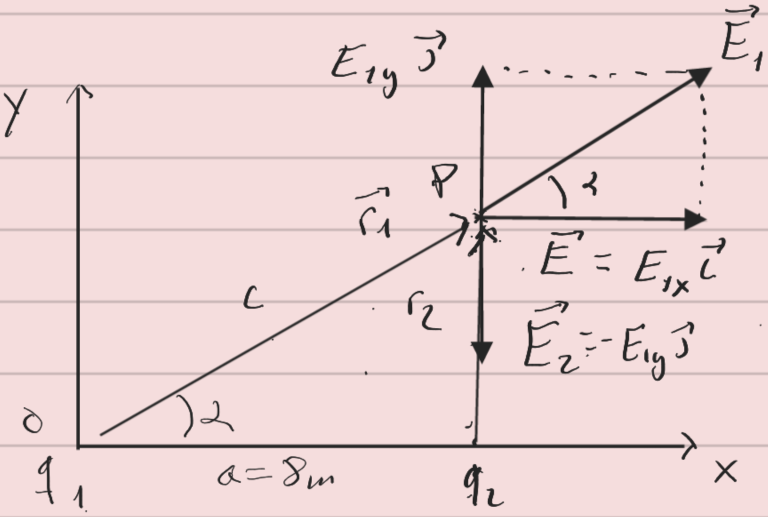
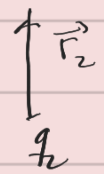
1. Opción A

Las dos cargas puntuales q_1 y q_2 de la figura se encuentran situadas en el origen de coordenadas y en el punto $x = 8\,\text{m}$ del eje X, respectivamente. (**a**) Sabiendo que el campo eléctrico que crean en el punto $P = (8, 6)\,\text{m}$ es $\vec{E} = 252\,\vec{\imath}\ \text{N/C}$(**a**) realizar un dibujo con los campos creados por cada carga $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ y el campo total $\vec{E}$. (**b**) Determinar: (**a**) el signo de cada carga; (**b**) el valor de la carga q_1 situada en el origen de coordenadas. (**c**) El valor de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en P. (**d**) La energía potencial de una carga $q_3 = 1\,\mu\text{C}$ en el punto P. (**Datos:** $k = 9 \times 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^2$.)





(a) $\vec{E}_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2$ tiene dirección vertical como $\vec{r}_2$, luego la componente horizontal de $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ sólo puede provenir de $\vec{E}_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1$. $\vec{E}_1$ tendrá que alejarse de q_1 para que $\vec{E}$ tenga una componente horizontal positiva. Como $\vec{E}$ es horizontal, la componente vertical de $\vec{E}_1$ debe anularse con $\vec{E}_2$, es decir $\vec{E}_2 = -E_{1y}\vec{j}$. Entonces $\vec{E} = E_{1x}\vec{i}$. Estas propiedades se observan en el dibujo.



(a') Recordemos que $\vec{E}$ tiene el sentido de una fuerza sobre una carga positiva. Como $\vec{E}_2$ apunta a q_2: $\boxed{q_2 \text{ es negativa}}$. Como $\vec{E}_1$ se aleja de q_1: $\boxed{q_1 \text{ es positiva}}$.

(b') Sabemos que $\vec{E} = E_{1x}\vec{i} = 252\,\vec{i}\ N/C \Rightarrow E_{1x} = E_1 \cos\alpha = E = 252\ N/C$. (1)

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+6^2} = 10\,m$, $\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10}$, $E = k_e \frac{q_1}{r_1^2} = k_e \frac{q_1}{c^2}$. Luego, de (1):

$k_e \frac{q_1}{c^2}\frac{a}{c} = 252 \Rightarrow q_1 = \frac{252 \times c^3}{k_e a} = \frac{252 \times 10^3}{9 \times 10^9 \times 8} \Rightarrow \boxed{q_1 = 3{,}5 \times 10^{-6}\,C = 3{,}5\,\mu C}$

(c) $\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j}$. Conocemos $E_{1x} = 252\,\vec{i}\ N/C$ y $\frac{E_{1y}}{E_{1x}} = \tan\alpha = \frac{b}{a}$, luego

$E_{1y} = \frac{b}{a}E_{1x} = \frac{6}{8}252\ N/C \Rightarrow E_{1y} = 18\ N/C \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = 252\,\vec{i} + 188\,\vec{j}\ N/C}$

Además $\vec{E}_2 = -E_{2y}\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -189\ N/C\ \vec{j}}$ $\qquad E_1 = \sqrt{252^2 + 189^2} = 315\ N/C$

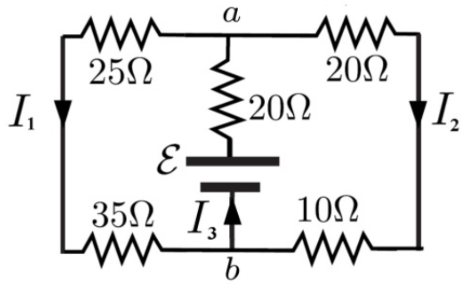
(d) $U = q_3\left(k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2}\right) = q_3\left(k_e \frac{q_1}{r_1^2} r_1 - k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} r_2\right) = q_3(E_1 r_1 - E_2 r_2) =$

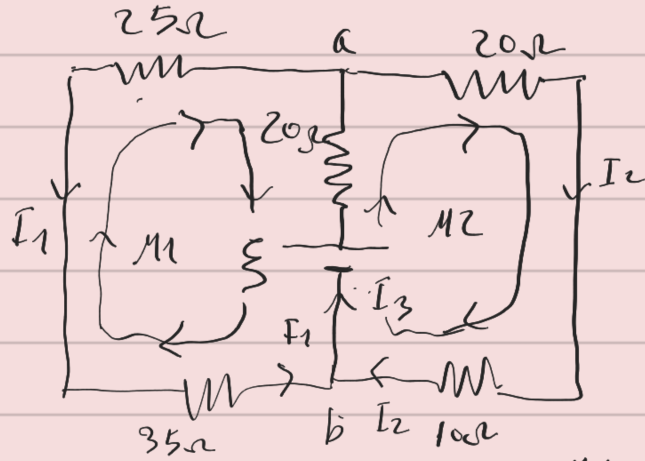
$\Rightarrow U = 1 \times 10^{-6}(315 \times 10 - 189 \times 6) \Rightarrow \boxed{U = 2{,}016\,mJ}$

$\left[\text{o calculando } |q_2| = \frac{E_2 r_2^2}{k_e} = \frac{189 \times 6^2}{9 \times 10^9} \Rightarrow q_2 = -0{,}756\,\mu C\right]$

2. Opción A

En el circuito de la figura (**a**) Escribir las reglas de Kirchhoff para las mallas y nudos. (**b**) Si la diferencia de potencial en la resistencia de 25 Ω es de 5 V, obtener las tres intensidades. (**c**) Calcular la f.e.m ξ del generador. (**d**) Obtener la resistencia equivalente vista desde el generador. (**e**) Calcular la potencia producida en el generador y la total consumida en las resistencias.





(a) Ecuaciones de nudo $\sum I_i = 0$ ($+I_i$ si sale, $-I_i$ si entra)

Nudo a: $\boxed{I_1 + I_2 - I_3 = 0}$

Nudo b: $\boxed{-I_1 - I_2 + I_3 = 0}$ (que es redundante)

Ecuaciones de mallas $\sum \xi_i = \sum R_i I_i$ (+ sentido de la malla, − en contra)

Tomamos las mallas indicadas en sentido horario:

M1: $-\xi = -I_1(25+35) - I_3 20$ ó $\boxed{\xi = 60 I_1 + 20 I_3}$

M2: $\xi = I_2(20+10) + I_3 20$ ó $\boxed{\xi = 30 I_2 + 20 I_3}$

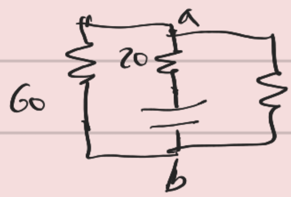
(b) Entonces $5V = 25\Omega\, I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = 0{,}2\,A}$, Para obtener I_2, calculamos primero $V_{ab} = I_1(25+35) = 0{,}2 \times 60 \Rightarrow \underline{V_{ab} = 12V}$ y como $V_{ab} = I_2(20+10) = 30 I_2 \Rightarrow$ $I_2 = \frac{12V}{30\Omega} \Rightarrow \boxed{I_2 = 0{,}4A}$. De la ecuación del nudo a: $I_3 = I_1 + I_2 = 0{,}2 + 0{,}4 \Rightarrow \boxed{I_3 = 0{,}6A}$

(c) Usamos la ecuación de la malla (1): $\xi = 60 \times 0{,}2 + 20 \times 0{,}6 \Rightarrow \boxed{\xi = 24V}$

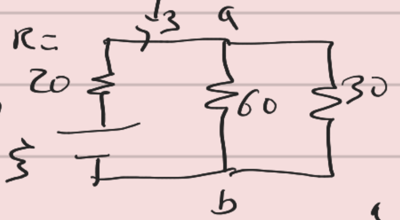
(d) Las resistencias 25 y 35 están en serie y equivalen a una de $25+35 = 60\Omega$

" " 20 y 10 " " " " " " " $20+10 = 30\Omega$

El circuito queda



, o bien



30Ω y 60Ω están en paralelo, pues están conectadas a la misma ddp V_{ab}.

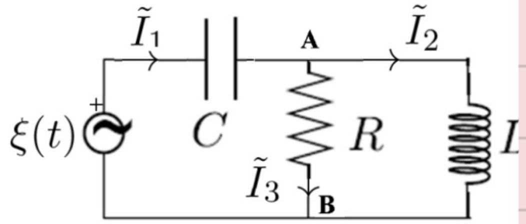
R': resistencia equivalente a 60Ω y 30Ω en paralelo: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} = \frac{1+2}{60} \Rightarrow R' = 20\Omega$ y R' está en serie con $R = 20\Omega \Rightarrow R_{eq} = R + R' = 20+20$ $\Rightarrow \boxed{R_{eq} = 40\Omega}$

(e) $P_\xi = \xi I_3 = 24 \times 0{,}6 \Rightarrow \boxed{P_\xi = 14{,}4W}$ Hemos usado que I_3 y ξ tienen igual sentido.

$P_R = I_3^2 R_{eq} = 0{,}6^2 \times 40 \Rightarrow \boxed{P_R = 14{,}4W}$ Como es lógico salen iguales, lo que se conoce como el balance de potencia. También se podría calcular la potencia consumida como: $P_R = I_1^2 60 + I_2^2 30 + I_3^2 20 \Rightarrow$

$P_R = 0{,}2^2 \times 60 + 0{,}4^2 \times 30 + 0{,}6^2 \times 20 = 14{,}4W$

3. En el circuito de la figura, $\xi(t) = 8\cos(100\pi t)$ V, siendo $R = 100\,\Omega$ y las reactancias (módulo de las impedancias) del condensador y de la bobina iguales $X_L = X_C = 100\,\Omega$. Calcular: (a) las impedancias $\tilde Z_L$, $\tilde Z_C$ y $\tilde Z_R$ de cada elemento. (b) La impedancia equivalente (c) La intensidad $\tilde I_1$ que atraviesa el generador. (d) la diferencia de potencial $\tilde V_{AB}$ usando el camino que pasa por el generador. (e) La intensidad que atraviesa la bobina $\tilde I_2$ y la resistencia $\tilde I_3$. (f) Dibujar el diagrama fasorial de las intensidades. (g) Calcular la potencia consumida en el circuito y la generada en la fuente.



(a). Como las impedancias de R, L y C son $\tilde Z_R = R$; $\tilde Z_L = j\omega L$ y $\tilde Z_C = -\frac{j}{\omega C} \Rightarrow$

$\boxed{\tilde Z_R = 100\,\Omega;\ \tilde Z_L = 100j\,\Omega \text{ y } \tilde Z_C = -100j\,\Omega}$

(b) $\tilde Z_R$ y $\tilde Z_L$ están en paralelo, luego: $\frac{1}{\tilde Z_{RL}} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100j} = \frac{1}{100}(1-j) \Rightarrow \tilde Z_{CR} = \frac{100}{(1-j)} \Rightarrow$

$\tilde Z_{RL} = \frac{100}{(1-j)}\frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{100(1+j)}{1^2+1^2} \Rightarrow \tilde Z_{RL} = (50+50j)\,\Omega = 50\sqrt2\, e^{j\pi/2}\,\Omega$. Como $\tilde Z_{RL}$ y $\tilde Z_C$ están en serie $\tilde Z = \tilde Z_C + \tilde Z_{LR} = -100j + (50+50j) \Rightarrow \boxed{\tilde Z = (50-50j)\,\Omega = 50\sqrt2\, e^{-j\pi/4}\,\Omega}$

(c) Por la ley de Ohm en c.a.: $\tilde\xi = \tilde I_1 \tilde Z$ y como $\tilde\xi = 8e^{j0} = 8V \Rightarrow$

$\tilde I_1 = \frac{8}{50-50j} = \frac{8}{50}\frac{1}{(1-j)}\frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{8(1+j)}{50\times2} \Rightarrow \boxed{\tilde I_1 = 0{,}08(1+j)A = 0{,}08\sqrt2\, e^{+j\pi/4}A}$

No lo piden, pero $I_1(t) = 0{,}08\sqrt2\cos(100\pi t + \pi/4)A$.

(d) Usando la ley de Kirchhoff del potencial en un camino $V_A - V_B = \sum \tilde I_i \tilde Z_i - (\sum \tilde\xi_i)$ con signo (+) si I_i o ξ_i están en dirección A→B y (−) en caso contrario:

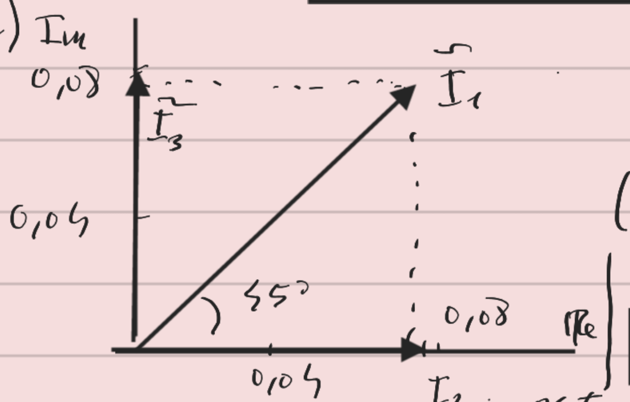
$V_{AB} = V_A - V_B = -\tilde I_1 \tilde Z_C - (-\tilde\xi) = -0{,}08(1+j)(-100j) + 8 = 8(1+j)j + 8 = 8(j+j^2) + 8 \Rightarrow$

$V_{AB} = 8(j-1) + 8 \Rightarrow \boxed{V_{AB} = 8j\,V = 8e^{+j\pi/2}\,V}$

(e) Por la ley de Ohm en c.a.: $\tilde I_2 = \frac{\tilde V_{AB}}{\tilde Z_L}$ y $\tilde I_3 = \frac{\tilde V_{AB}}{\tilde Z_R} \Rightarrow$

$\tilde I_2 = \frac{8j}{100j} \Rightarrow \boxed{\tilde I_2 = 0.08A = 0.08A\,e^{j0}A}$; $\tilde I_3 = \frac{8j}{100} \Rightarrow \boxed{\tilde I_3 = 0{,}08j\,A = 0{,}08\,e^{+j\pi/2}A}$

(f)



Se puede ver que $\tilde I_1 = \tilde I_2 + \tilde I_3$

(g) P generada $P_\xi = \frac12 \xi_0 I_{01}\cos(\Delta\varphi) \Rightarrow$

$P_\xi = \frac12 8 \times 0{,}08\sqrt2\cos(0-45°) = 4\times0{,}08\sqrt2\,\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow$

$\boxed{P_\xi = 0{,}32\,W}$ P consumida la podemos calcular en parte real de la impedancia equivalente o en la resistencia física:

$P_R = \frac12 I_{01}^2 Re(\tilde Z) = \frac12(0{,}08\sqrt2)^2\,50 = 0{,}32\,W$; $P_R' = \frac12 I_{03}^2 R = \frac12(0{,}08)^2\,100 = 0{,}32\,W \Rightarrow \boxed{P_C = 0{,}32\,W}$

Lógicamente $\underline{P_\xi = P_C}$