F.F.I. Boletín Tema 6

Ondas armónicas

1. (**a**) Demostrar, calculando explícitamente las derivadas, que la función $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$ satisface la ecuación de ondas correspondiente a una onda que se propaga sin deformación en sentido positivo del eje x con velocidad de fase ω/k. Comprobar que es posible escribir dicha onda en la forma $f(x - vt)$, siendo $v = \omega/k$. (**b**) Repetir lo anterior para la onda $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi)$ que se propaga en sentido negativo del eje x y comprobar que en este caso puede escribirse en la forma $f(x + vt)$.

2. Una onda armónica transversal de ecuación $y(x,t) = 0{,}03\,\mathrm{sen}(3x - 6t)$ m (t en segundos) se propaga en una cuerda tensa. Calcular: (**a**) el desplazamiento de los puntos de la cuerda de abscisa $x = 0{,}1$ m, 0,2 m y 0,3 m, en el instante $t = 0$; (**b**) la longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de fase de la onda; (**c**) la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda, indicando el valor máximo de la misma; (**d**) la diferencia de fase entre dos puntos distanciados 5 metros así como la distancia (expresada en función de la longitud de onda) entre dos puntos cuya diferencia de fase sea $\pi/6$ rad.
Sol.: (a) 8,86, 16,9 y 23,5 mm; (b) $\lambda = 2{,}0944$ m; f=0,95 Hz; T=1,05 s; v=2 m/s; (c) $v_y = \partial y(x,t)/\partial t = -0{,}18\cos(3x - 6t)$ m/s, $v_{y\text{máx.}} = 0{,}18$ m/s; (d) diferencia de fase $= k(x_2 - x_1) = 3 \times 5 = 15$ radianes; distancia=$\lambda/12$.

3. Una onda armónica plana se propaga en sentido positivo del eje x a 3×10^8 m/s (onda electromagnética). Se sabe que la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase son $\pi/3$ radianes es de 5 cm en la dirección de propagación. Determinar su longitud de onda, número de onda y frecuencia. ¿Qué diferencia de fase hay entre dos puntos que distan 7,5 cm en la dirección de propagación? ¿y entre dos puntos que distan 15 cm y se encuentran en un plano perpendicular al eje x?
Sol.: 30 cm, $2\pi/30$ rad/cm, 1 GHz. Diferencias de fase: $\pi/2$ rad, y 0 rad, están en fase.

4. El rango de frecuencias de la ondas electromagnéticas utilizadas en emisoras comerciales (radio y TV) se extiende, aproximadamente, desde 150 kHz hasta 800 MHz. Si la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en vacío es $c = 3 \times 10^8$ m/s, ¿cuál es el rango de longitudes de onda de las emisoras comerciales? Repítase el problema anterior para el rango de señales acústicas audibles que se extiende, aproximadamente, desde 20 Hz hasta 20 kHz, considerando que el sonido es una onda de presión que se propaga en el aire a una velocidad aproximada de 340 m/s.
Sol.: *Ondas electromagnéticas comerciales*: λ entre 2000 m y 37,5 cm. *Ondas sonaras audibles*: λ entre 17 m y 17 mm.

Ondas estacionarias. Interferencias.

5. Verificar que la función $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$, que representa a una onda estacionaria genérica, satisface la ecuación de ondas siendo la velocidad de propagación $v = \omega/k$. Encontrar además la posición de los vientres y nodos para el caso particular $\alpha = \beta = 0$.
Sol.: nodos $x_n = n\lambda/2$ ($n = 0, \pm1, \pm2$ ...) y vientres $x_m = (2m+1)\lambda/4$ ($m = 0, \pm1, \pm2$ ...).

6. Una cuerda de densidad lineal de masa $\rho = 0{,}3$ g/m se tensa entre dos soportes distantes 60 cm de forma que al excitar el modo fundamental de vibración (onda estacionaría con sólo nodos en los soportes) la cuerda vibra a 440 Hz. Determinar: (**a**) la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y la tensión de la misma [1] (**b**) el modo correspondiente a la mayor frecuencia de vibración de la cuerda que puede ser oída por una persona capaz de escuchar frecuencias hasta 20 Khz, indicando también la frecuencia de dicho modo.
Sol.: (a) 528 m/s, T=83,6 N (b) $n = 45$, $f_{45} = 19,8$ kHz.

[1] En una cuerda tensa la velocidad de propagación se relaciona con la densidad lineal de masa, ρ, y la tensión, T, como sigue $v = \sqrt{T/\rho})$

7. En una cuerda tensa de 3 m de longitud con los extremos fijos se sabe que las frecuencias de dos ondas estacionarias de órdenes consecutivos son 252 Hz y 336 Hz. Determinar la frecuencia del modo fundamental y los órdenes de los modos de vibración correspondientes a las dos frecuencias indicadas.
Sol.: 84 Hz, $n = 3$ y $n + 1 = 4$.

8. La cuerda Mi alta de una guitarra mide 64 cm y tiene una frecuencia en el modo fundamental de 330 Hz. Al presionar en el primer traste (el más cercano al clavijero) la cuerda se acorta de forma que se toca una nota Fa que tiene de frecuencia 350 Hz. ¿A qué distancia se encuentra el primer traste del extremo del mango? (es decir, en cuánto acortamos la cuerda al pulsar el en primer traste).
Sol.: $3,66$ cm.

9. Puede demostrarse matemáticamente que dos ondas armónicas planas de igual frecuencia que se propagan en la misma dirección y con igual sentido interfieren dando lugar a una onda plana de igual frecuencia que también se propaga con igual dirección y sentido que dichas ondas. Si las ecuaciones de las ondas son: $y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1)$ e $y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2)$, determinar, en función de ϕ_1 y ϕ_2, en qué casos la amplitud resultante tras la interferencia es máxima y en cuáles es mínima e indicar el valor de dichas amplitudes.
Sol.: La diferencia de fase es $\delta = \phi_2 - \phi_1$, que no depende de x. Si $\delta = 2n\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2...$ para todo x se oscila en fase, y la onda resultante tiene una amplitud máxima $A = A_1 + A_2$. Si $\delta = (2n+1)\pi$ oscilan en oposición de fase y la amplitud es mínima $A = |A_1 - A_2|$.

10. Dos focos sonoros oscilan en fase emitiendo. Considere un punto a una distancia de 5 m de un foco y $5,17$ m del otro foco. Determinar el desfase entre las ondas recibidas en dicho punto e indicar si hay o no interferencia constructiva o destructiva para las siguientes frecuencias de emisión: (**a**) 1000 Hz, (**b**) 2000 Hz, (**c**) 500 Hz.
(**Dato**: velocidad del sonido 340 m/s).
Sol.: (a) desfase π, destructiva; (b) desfase 2π, constructiva; (c) desfase $\pi/2$, caso intermedio.

11. Dos fuentes sonoras coherentes que distan 8 m oscilan en fase emitiendo ondas armónicas de 100 Hz. Calcular: (**a**) la diferencia de fase en un punto situado a 5 m de la primera y 5,85 m de la segunda; (**b**) determinar las distancias a la fuente primera de los puntos del segmento que une ambas fuentes en los cuales haya interferencia constructiva.
(**Dato**: velocidad del sonido 340 m/s).
Sol.: (a) $\pi/2$ rad; (b) $0,6$ m; $2,3$ m; 4 m; $5,7$ m; $7,4$ m.

Ondas electromagnéticas

12. Una onda electromagnética (OEM) plana de frecuencia 1 GHz se propaga en el vacío siendo la amplitud de su campo eléctrico de 27 mV/m. Calcular: (**a**) la longitud de onda, la amplitud del campo magnético y la intensidad (potencia promedio por unidad de superficie); (**b**) la diferencia de fase entre dos puntos que que se encuentran sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación y que distan entre sí 15 cm y la distancia entre dos planos de fase en los cuales se oscila en oposición de fase.
(**Dato**. velocidad de la luz en vacío $c = 3 \times 10^8$ m/s para todos los problemas).
Sol.: (a) $\lambda = 30$ cm, $B_0 = 90$ pT e $I = 0{,}97$ μW/m^2; (b) 0 rad, 15 cm

13. El campo eléctrico de una OEM armónica plana tiene la expresión $\vec{E}(x,t) = 3\cos(kx - 2\pi \times 10^8 t)\vec{\mathrm{j}}$ mV/m. Determinar: (**a**) la longitud de onda, frecuencia, periodo y número de onda; (**b**) el campo magnético, $\vec{B}(x,t)$ y la intensidad promedio de la onda, I; (**c**) la diferencia de fase entre el origen de coordenadas y el punto de coordenadas $(37.5,\ 75,\ 150)$ cm y dibujar el plano de fase que pasa por dicho punto y escribir su ecuación. **Sol.**: (a) $\lambda = 3$ m, $f = 100$ MHz, $T = 10$ ns, $k = 2\pi/3$ rad/m; (b) $\vec{B}(x,t) = 0{,}01\cos(2\pi x/3 - 2\pi \times 10^8 t)\ \vec{\mathrm{k}}$ nT, $I = 0{,}01195$ μW/m^2 (c) $\pi/4$ rad, plano $x = 37,5$ cm.

14. Considere una OEM armónica plana de longitud de onda $\lambda = 6$ m y cuyo campo magnético tiene una amplitud de $0,2$ nT. (**a**) Escriba las expresiones de los campos eligiendo el sentido positivo del eje y para la propagación de la onda y la dirección del eje z para el campo eléctrico de la misma. (**b**) Repita el apartado anterior si la onda se propaga ahora en sentido negativo del eje y siendo la dirección del campo eléctrico la misma. (**c**) Repita de nuevo el ejercicio si la onda se propaga en sentido positivo del eje z y el campo eléctrico oscila en dirección x.
Sol.: (a) $\vec{E}(y,t) = 60\cos(\pi y/3 - \pi \times 10^8 t)\,\vec{\text{k}}$ mV/m, $\vec{B}(y,t) = 0,2\cos(\pi y/3 - \pi \times 10^8 t)\,\vec{\text{i}}$ nT.
(b) $\vec{E}(y,t) = 60\cos(\pi y/3 + \pi \times 10^8 t)\,\vec{\text{k}}$ mV/m, $\vec{B}(y,t) = 60\cos(\pi y/3 + \pi \times 10^8 t)\,(-\vec{\text{i}})$ nT.
(c) $\vec{E}(z,t) = 60\cos(\pi z/3 - \pi \times 10^8 t)\,\vec{\text{i}}$ mV/m, $\vec{B}(y,t) = 0,2\cos(\pi z/3 - \pi \times 10^8 t)\,\vec{\text{j}}$ nT.

15. Un haz láser de 1 mm de diámetro transporta una potencia media de 1 kW en su frente de onda. Suponiendo que el haz láser pueda aproximarse como una onda plana armónica (el láser produce radiación electromagnética coherente de una frecuencia muy precisa), determinar las amplitudes de los campos eléctrico y magnético del haz.
Sol.: $E_0 = 979{,}8$ kV/m y $B_0 = E_0/c = 3{,}266$ mT.

16. Una antena emite 1000 W de potencia a una frecuencia de 900 MHz. Suponiendo que la emisión de potencia fuese radiada igual en todas las direcciones (antena isotrópica), determinar: (**a**) la distancia a partir de la cual la intensidad recibida será menor de $0{,}57$ mW/cm^2; (**b**) el valor del campo eléctrico a dicha distancia; (**c**) la longitud de onda emitida.
Sol.: (a) $3,74$ m; (b) $65,5$ V/m; (c) $\lambda = 1/3$ m.

17. Una antena tipo dipolo (en forma de varilla) radia de forma que la intensidad recibida a una distancia r de la misma depende del ángulo θ que forma la dirección de la antena con la dirección que une el punto de recepción y la antena como sigue $I(r,\theta) = A\,\mathrm{sen}^2(\theta)/r^2$, siendo A una constante (con dimensiones de potencia) que depende de la antena y de la frecuencia de emisión. (**a**) Determinar el valor de θ para el cual se recibe la máxima intensidad para una distancia r dada. (**b**) Encontrar el valor de θ para el cual se recibe la mitad de intensidad que si se midiese en la dirección de máxima recepción (supuestas ambas medidas a igual distancia r). (**c**) Si en un punto situado a diez metros de la antena se reciben 450 μW/cm^2 en la dirección de máxima recepción, determinar cuánto hemos de alejarnos del punto siguiendo dicha dirección para que la intensidad disminuya un 75 %.
Sol.: (a) 90º. (b) 45º. (c) 10 m.

18. Se emplea como antena receptora una bobina circular prácticamente plana de radio 2 cm y 200 vueltas para detectar una OEM plana. El plano de la espira se coloca perpendicularmente a la dirección de oscilación del campo magnético de la onda. Si la frecuencia de la onda es de 10 MHz y la amplitud de su campo eléctrico es 0,6 V/m, determinar el valor eficaz de la tensión inducida entre sus extremos (**nota**. Compruebe que la longitud de onda es mucho mayor que el radio de la bobina con lo que supondremos que el campo magnético que atraviesa la bobina puede considerarse básicamente uniforme).
Sol.: 22,33 mV.

Espectro electromagnético

19. Determinar el rango de frecuencias del espectro visible sabiendo que su correspondiente rango de longitudes de onda se extiende desde 400 nm hasta 700 nm (el ojo humano es sensible a radiaciones electromagnéticas comprendidas en este rango).
Sol.: de 750 THz a 428 THz, donde el prefijo T (tera) indica 10^{12}.

20. Calcular la frecuencia de las siguientes radiaciones electromagnéticas: señal de televisión de longitud de onda 60 cm; señal de radar de longitud de onda 24,7 cm; radiación de microondas de longitud de onda 12,2 cm (radiación

típica producida por el magnetrón de los hornos de microondas); rayos X de longitud de onda $0{,}1$ nm.
Sol.: $0{,}5$ GHz; $1{,}21$ GHz; $2{,}46$ GHz; 3 EHz, donde E (exa) 10^{18}.

21. Determinar el rango de longitudes de onda correspondientes a cada una de las bandas de frecuencias de las ondas de radio que se detallan a continuación: (**a**) *Señales de modulación* AM (amplitud modulada): banda LW (ondas largas) de 150 kHz a 270 kHz; banda MW (onda media) de 510 kHz a 1600 kHz; banda SW (onda corta) de 6 MHz a $17{,}9$ MHz; (**b**) *Señales de modulación* FM (frecuencia modulada): de $87{,}5$ MHz a 108 MHz.
Sol.: LW de $1{,}11$ km a 2 km; MW de $187{,}5$ m a 588 m; SW de $16{,}76$ m a 50 m; FM de $2{,}77$ m a $3{,}43$ m.

22. Calcular las dos longitudes de onda correspondientes a las señales emitidas por los satélites usados por el sistema G.P.S. (sistema de posicionamiento global) sabiendo que emiten a frecuencia $1575{,}42$ MHz (señal de la banda denominada L1) y a $1227{,}6$ MHz (señal de la banda denominada L2).
Sol.: 19 cm y $24{,}4$ cm respectivamente.