F.F.I. Boletín 0

1. Expresar el vector (9, 8) como combinación lineal de los vectores (3, 1) y (1, 2) y representar gráficamente el resultado.
Sol.: (9, 8)=2(3, 1)+ 3(1, 2).

2. Encontrar el unitario en la dirección dada por los puntos de coordenadas $(3, 2, 0)$ y $(6, 8, 2)$.
Sol.: $\hat{u}$=(3/7, 6/7, 2/7).

3. Encontrar el ángulo formado por los vectores $(3, 6, 2)$ y $(8, 6, 0)$ utilizando dos técnicas diferentes (producto escalar y vectorial).
Sol.: $\alpha = 31{,}003^o$.

4. Descomponer el vector $\vec{a} = (1, 5, 5)$ como suma de un vector paralelo y otro perpendicular a la dirección dada por el unitario $\hat{u}$=(0, 3/5, 4/5).
Sol.: $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$, siendo $\vec{a}_{\parallel}$=(0, 21/5, 28/5) y $\vec{a}_{\perp}$=(1, 4/5, -3/5).

5. Descomponer el vector $(7, 5, 2)$ como suma de un vector en la dirección dada por la recta que une los puntos $(5, 4, 3)$ y $(2, 1, 2)$ y un vector perpendicular a dicha dirección.
Sol.: $(7, 5, 2) = (6, 6, 2) + (1, -1, 0)$.

6. Utilizando el concepto de producto vectorial, calcular el vector unitario perpendicular al plano determinado por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ y $(3, 3, 1)$.
Sol.: $\hat{n} = (-7, 8, -3)/\sqrt{122}$

7. Demostrar que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que puede formarse usando dichos vectores como lados. Como aplicación, determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$, $(4, 5, 2)$ y $(3, 1, 2)$.
Sol.: Área=$\sqrt{117}/2$.

8. Encontrar los vectores unitarios radial y tangente en los puntos (x, y) de una circunferencia de radio R que se halla en el plano xy y tiene su centro en el origen de coordenadas. Repetir lo anterior suponiendo ahora que la circunferencia tiene su centro en el punto $(3, 2)$.
Sol.: centro en $(0, 0)$: $\hat{u}_r = (x/R, y/R)$, $\hat{u}_t = (-y/R, x/R)$; centro en $(3, 2)$: $\hat{u}_r = ((x-3)/R, (y-2)/R)$, $\hat{u}_t = (-(y-2)/R, (x-3)/R)$.

9. Indicar cuales de las siguientes expresiones tienen sentido y cuales no: (**a**) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$; (**b**) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; (**c**) $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$; (**d**) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$; (e) $\vec{F} = ma$.
Sol.: correctas: (b), (c); incorrectas: (a), (d) y (e).

10. Utilizando el hecho de que $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}$, demostrar que el módulo del vector suma de dos vectores, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, responde a la expresión: $|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha}$, siendo α el ángulo que forman los vectores sumados.

11. Una partícula se encuentra en el punto x_0 del eje x en $t = 0$ con una velocidad $v_0\vec{\imath}$. Determinar su aceleración, velocidad y posición en dos casos: (**a**) no actúa ninguna fuerza sobre la partícula; (**b**) actúa una fuerza constante de valor $\vec{F} = F\vec{\imath}$.
Sol.: (a) $\vec{a} = 0$, $\vec{v} = v_0\vec{\imath}$ y $x = x_0 + v_0 t$; (b) $\vec{a} = a\vec{\imath}$, siendo $a = F/m$, $\vec{v} = (v_0 + at)\vec{\imath}$ y $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$.

12. Una partícula de masa m se encuentra en el punto $(0,0)$ en el instante $t = 0$ con una velocidad $\vec{v} = v_0\vec{\mathrm{i}}$ (v_0 positiva). Si sobre la misma actúa una fuerza uniforme $\vec{F} = F\vec{\mathrm{j}}$ (F positiva), determinar la aceleración, velocidad y posición de la partícula en función del tiempo así como la ecuación $y(x)$ de la trayectoria descrita.
Sol.: $\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, F/m)$ ($a_y = F/m$ es constante); $\vec{v}(t) = (v_x, v_y) = (v_0,\ a_y t)$ y $\vec{r}(t) = (x, y) = (v_0 t,\ a_y t^2/2)$. La coordenada x responde a un movimiento uniforme y la y a un movimiento uniformemente acelerado. Sustituyendo $t = x/v_0$ en $y = a_y t^2/2$ obtenemos $y = cx^2$ siendo la constante $c = (a_y/v_0)^2/2$. Luego describe una parábola.

13. Encontrar las coordenadas $(x(t), y(t))$ de una partícula que realiza un movimiento circular a velocidad constante (en módulo) v en el plano xy habiendo partido del punto $(R, 0)$ en $t = 0$ y sabiendo que gira en sentido contrario a las agujas del reloj.
Sol.: $(x(t), y(t))$= $(R\cos(vt/R), R\,\mathrm{sen}(vt/R))$

14. Utilizando el resultado del movimiento circular del problema anterior y sabiendo que la partícula tiene masa m, determinar la velocidad (vector) de la partícula, su aceleración (vector), la fuerza (vector) que actúa sobre la misma y el módulo de dicha fuerza. Dibujar los vectores obtenidos.
Sol.: $\vec{v} = (-v\,\mathrm{sen}(vt/R), v\cos(vt/R))$, $\vec{a} = ((-v^2/R)\cos(vt/R),\ -(v^2/R)\,\mathrm{sen}(vt/R))$,
$\vec{F} = m\vec{a} = (mv^2/R)(-\cos(vt/R), -sen(vt/R))$ y $|\vec{F}| = mv^2/R$. La fuerza obtenida se denomina centrípeta, es de módulo constante y está dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita.

15. Las coordenadas de una partícula móvil de masa $m = 2$ kg en función del tiempo son $\mathbf{r}(t) = (3t, t^2, t^3)$ m (t en segundos). Determinar: (**a**) la velocidad y aceleración de la partícula; (**b**) la fuerza que actúa sobre la misma en el instante $t = 1$ s, así como las componentes de dicha fuerza en la dirección perpendicular y tangente a la trayectoria.
Sol.: (a) $\vec{v}(t) = (3, 2t, 3t^2)$ m/s, $\vec{a}(t) = (0, 2, 6t)$ m/s^2; (b) $\vec{F} = (0, 4, 12)N = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$, donde $\vec{F}_{\perp} = (-6, 0, 6)$ N, y $\vec{F}_{\parallel} = (6, 4, 6)$ N.