Homogeneidad de trayectorias magnéticas en el grupo de Lie tridimensional SL(2,R)

Marian Ioan Munteanu
Facultad de Matemáticas de la Universidad "Al.I.Cuza" de Iasi. Iasi, Rumanía

A lo largo del tiempo se ha prestado mucha atención a los sistemas dinámicos en 3-variedades. En particular, las trayectorias magnéticas son soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden (conocida como ecuación de Lorentz) y generalizan las geodésicas.

Un campo magnético en una variedad de Riemann se define por una 2-forma cerrada que ayuda, junto con la métrica, a definir la fuerza de Lorentz. Por otra parte, las curvas magnéticas se derivan del problema variacional de la funcional de Landau-Hall, que es, en ausencia de un campo magnético, simplemente el funcional de la energía cinética.

La dimensión 3 es bastante especial, ya que nos permite identificar 2-formas con campos vectoriales a través del operador $\star$ de Hodge y la forma de volumen de la variedad (orientada). Además, en dimensión 3, se puede definir un producto vectorial y, por lo tanto, la ecuación de Lorentz se puede escribir de una manera más sencilla.

El desafío es resolver la ecuación diferencial para encontrar una solución explícita, es decir, la parametrización explícita de las trayectorias magnéticas. Sin embargo, esto no siempre es posible y, por eso, es necesario comprender el comportamiento de la solución.

Se han realizado estudios recientes en variedades Sasakianas tridimensionales, donde la forma 2 de contacto define naturalmente un campo magnético. Las soluciones de la ecuación de Lorentz, generalmente llamadas trayectorias magnéticas de contacto, a menudo se expresan en una parametrización concreta.

Se puede demostrar un resultado de reducción para la codimensión en un Sasakian space form, es decir, esencialmente, podemos reducir el estudio (de una curva magnética en un Sasakian space form) a dimensión 3.

Recientemente se ha estudiado la geometría de las trayectorias magnéticas en la 3-esfera, en la 3-esfera de Berger, en el grupo de Heisenberg Nil3 y en SL(2,R), respectivamente.

Otro problema importante es la existencia de curvas cerradas, que es un tema fascinante en sistemas dinámicos. En las últimas dos décadas se encontraron órbitas periódicas de los campos magnéticos de contacto en la 3-esfera unitaria y en la 3-esfera de Berger y se obtuvieron las condiciones para la periodicidad. Recientemente se ha obtenido un resultado similar; se demostró que las curvas magnéticas de contacto periódicas en SL(2,R) se pueden cuantificar en el conjunto de números racionales.

La geometría de las curvas magnéticas de contacto en SL(2,R) es mucho más hermosa. Más precisamente, se puede mostrar que cada trayectoria magnética de contacto (de carga q) que comienza en el origen de SL(2,R) con velocidad inicial X y con carga q es el producto de la geodésica homogénea con velocidad inicial X y el flujo Reeb cargado exp(2qs\xi).

Esta charla se basa en varios artículos principalmente en colaboración con el Prof. Jun-ichi Inoguchi (Japón).

Facultad de Matemáticas
Universidad "Al.I.Cuza" de Iasi
Bd. Carol I, n. 11
700506 - Iasi, Rumania

Página web:
https://sites.google.com/view/marian-ioan-munteanu/home

Página web alternativa
http://www.math.uaic.ro/~munteanu